

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА  
К ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. В. ПАВЛЕНКО

(Днепропетровск)

Задачи о передаче нагрузки в исследованиях поведения композитных материалов имеют особое значение. Область плоских контактных задач о передаче нагрузки через упругие одномерные элементы к упругим пластинам достаточно хорошо разработана [1, 2]. Соответствующие пространственные контактные задачи почти не исследованы. Исключение составляют лишь [1, 3]. Первая из этих работ посвящена определению контактных напряжений на боковой поверхности цилиндрического стержня, погруженного в упругое пространство или полупространство. Во второй рассматриваются контактные задачи о передаче нагрузки через упругие накладки, расположенные на границе полупространства.

Такое положение в области пространственных задач объясняется тем, что при их решении встречаются значительные математические трудности [3]. Анизотропия и (или) неоднородность упругой среды обычно приводят к существенным дополнительным трудностям.

Однако для широкого класса конструкций характеристики анизотропии упругой среды могут быть использованы в качестве параметров асимптотического интегрирования. Асимптотический анализ уравнений равновесия (движения) и граничных условий позволяет расчленить напряженно-деформированное состояние на элементарные составляющие, определение которых является, как правило, более простой задачей, чем расчет изотропной среды. Этот метод разработан и использован для решения ряда конкретных плоских задач теории упругости в [4-6].

В данной работе идеи указанного асимптотического метода обобщаются на пространственные краевые задачи теории упругости для композитных материалов. При этом вопрос об определении упругих постоянных композитов не затрагивается, тело рассматривается как однородное анизотропное. Затем обсуждается задача о передаче нагрузки через тонкое упругое включение к анизотропному полупространству (ось включения перпендикулярна границе полупространства).

1. Пусть через каждую точку однородного анизотропного тела проходит три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии. Предполагая, что в каждой точке тела эти плоскости перпендикулярны соответствующим декартовым координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получаем следующие уравнения обобщенного закона Гука [7]:

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{33}, & e_{23} &= \frac{1}{G_{23}} \sigma_{23} \\
 e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_{33}, & e_{13} &= \frac{1}{G_{13}} \sigma_{13} \\
 e_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33}, & e_{12} &= \frac{1}{G_{12}} \sigma_{12}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

$$\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \quad \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3, \quad \nu_{31}E_3 = \nu_{13}E_1$$

Компоненты тензора деформаций  $e_{11}, e_{22}, \dots, e_{12}$  через проекции  $u, v, w$  вектора перемещений выражаются по формулам

$$\begin{aligned} e_{11} &= u_x, e_{22} = v_y, e_{33} = w_z, e_{23} = v_z + w_y \\ e_{13} &= u_z + w_x, e_{12} = u_y + v_x \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $E_1, E_2, E_3$  — модули упругости вдоль главных направлений  $x, y, z$ ;  $\nu_{12}, \dots, \nu_{32}$  — коэффициенты Пуассона;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  — модули сдвига;  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  — нормальные напряжения;  $\sigma_{12} = \sigma_{21}, \sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{23} = \sigma_{32}$  — касательные напряжения; индексы  $x, y, z$  обозначают дифференцирование по соответствующим координатам.

Решая уравнения обобщенного закона Гука (1.1) относительно напряжений и учитывая (1.2), получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_1(u_x + \nu_{12}v_y + \nu_{13}w_z), & \sigma_{12} &= G_{12}(u_y + v_x) \\ \sigma_{22} &= E_1q(\nu_{21}u_x + v_y + \nu_{23}w_z), & \sigma_{13} &= G_{13}(u_z + w_x) \\ \sigma_{33} &= E_1q_1(\nu_{31}u_x + \nu_{32}v_y + w_z), & \sigma_{23} &= G_{23}(v_z + w_y) \\ q &= E_2/E_1, & q_1 &= E_3/E_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь предполагается, что коэффициенты Пуассона достаточно малы и без нарушения общности пренебрегается их произведением.

При сделанных предположениях вопрос о напряженно-деформированном состоянии анизотропного тела сводится к интегрированию уравнений равновесия

$$\begin{aligned} u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + k_1 \varepsilon u_{zz} + m \varepsilon v_{xy} + m_1 k_1 \varepsilon w_{xz} &= 0 \\ \varepsilon v_{xx} + q v_{yy} + k_2 \varepsilon v_{zz} + m \varepsilon u_{xy} + m_2 k_2 \varepsilon w_{yz} &= 0 \\ k_1 \varepsilon w_{xx} + k_2 \varepsilon w_{yy} + q_1 w_{zz} + m_1 k_1 \varepsilon u_{xz} + m_2 k_2 \varepsilon v_{yz} &= 0 \\ \varepsilon &= G_{12}/E_1, \quad k_1 = G_{13}/G_{12}, \quad k_2 = G_{23}/G_{12}, \quad m = 1 + \mu \\ \mu &= \nu_{12}E_1/G_{12} = \nu_{21}qE_1/G_{12}, \quad m_1 = 1 + \mu_1, \quad m_2 = 1 + \mu_2 \\ \mu_1 &= \nu_{13}E_1/G_{13} = \nu_{31}q_1E_1/G_{13}, \quad \mu_2 = \nu_{23}qE_1/G_{23} = \nu_{32}q_1E_1/G_{23} \end{aligned} \quad (1.4)$$

при соответствующих граничных условиях.

Отношения модулей упругости  $q, q_1$  в реальных конструкциях могут быть самыми разнообразными ( $q \leq 1 (\geq 1), q_1 \leq 1 (\geq 1)$ ). Остановимся подробно на анализе случая, когда  $q = q_1 = 1, k_1 = k_2 = 1, m_2 = m_1 = m$  (анализ других случаев проводится совершенно аналогично). При этом величину  $\varepsilon = G_{12}/E_1$  можно рассматривать как «малый» параметр при асимптотическом интегрировании системы (1.4). Материалы с такими упругими характеристиками широко применяются на практике. Кроме того, здесь возможен переход к изотропной среде.

Введем следующие аффинные преобразования координат и искомых функций:

$$\xi_1 = \alpha \varepsilon^{1/2} x, \quad \eta_1 = y, \quad \zeta_1 = z, \quad u = U^{(1)}, \quad v = \varepsilon^{3/2} V^{(1)}, \quad w = \varepsilon^{3/2} W^{(1)} \quad (1.5)$$

$$\xi_2 = x, \quad \eta_2 = \beta \varepsilon^{1/2} y, \quad \zeta_2 = z, \quad u = \varepsilon^{3/2} U^{(2)}, \quad v = V^{(2)}, \quad w = \varepsilon^{3/2} W^{(2)} \quad (1.6)$$

$$\xi_3 = x, \quad \eta_3 = y, \quad \zeta_3 = \gamma \varepsilon^{1/2} z, \quad u = \varepsilon^{3/2} U^{(3)}, \quad v = \varepsilon^{3/2} V^{(3)}, \quad w = W^{(3)} \quad (1.7)$$

Из (1.5)–(1.7) видно, что решения системы, полученной из (1.4) после введения преобразований (1.5), ((1.6) или (1.7)), относительно медленнее изменяются вдоль координаты  $x$  ( $y$  или  $z$ ) по сравнению с ана-

логичными решениями системы, полученной после применения других преобразований.

Компоненты вектора перемещений будем представлять в виде суперпозиции решений всех типов.

Разыскивая функции  $U^{(n)}$ ,  $V^{(n)}$ ,  $W^{(n)}$  ( $n=1, 2, 3$ ) в виде рядов по дробным степеням параметра  $\varepsilon$ , необходимо выбрать соответствующие асимптотические последовательности. Вид асимптотической последовательности определяется структурой уравнений равновесия и порядком по  $\varepsilon$  невязки в краевых условиях, возникающей после решения задачи в нулевом приближении ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Чтобы учесть все возможные случаи, функции  $U^{(n)}$ ,  $V^{(n)}$ ,  $W^{(n)}$  ( $n=1, 2, 3$ ) будем определять в виде рядов по параметру  $\varepsilon^{1/2}$  (из преобразований (1.5)–(1.7) видно, что рядов по меньшим степеням параметра  $\varepsilon$  возникнуть не может):

$$U^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} U^{n,j}, \quad V^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} V^{n,j}, \quad W^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} W^{n,j} \quad (n=1,2,3) \quad (1.8)$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  также представим в виде рядов по параметру  $\varepsilon^{1/2}$ :

$$\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \alpha_j, \quad \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \beta_j, \quad \gamma = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \gamma_j, \quad \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1 \quad (1.9)$$

причем коэффициенты  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ), вычисляемые соответствующим образом в процессе решения, используются в дальнейшем для упрощения уравнений высших приближений.

Подставим (1.5) в (1.4) и используем соответствующие разложения из (1.8), (1.9). После расщепления полученной системы по параметру  $\varepsilon^{1/2}$  приходим к бесконечной системе уравнений относительно функций  $U^{1,j}$ ,  $V^{1,j}$ ,  $W^{1,j}$  ( $j=0, 1, \dots$ ), которые определяют решения, сравнительно медленно изменяющиеся вдоль координаты  $x$  (такое напряженно-деформированное состояние будем называть состоянием первого типа):

$$U_{\xi\xi}^{1,j} + U_{\eta\eta}^{1,j} + U_{\zeta\zeta}^{1,j} = - \sum_{\nu=0}^{j-1} U_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu} - m \sum_{\nu=0}^{j-4} (V_{\xi\eta}^{1,\nu} + W_{\xi\zeta}^{1,\nu}) \alpha_{j-\nu-4}, \quad c_p = \sum_{s=0}^p \alpha_s \alpha_{p-s} \quad (1.10)$$

$$V_{\eta\eta}^{1,j} + m U_{\xi\eta}^{1,j} = -m \sum_{\nu=j}^{j-1} U_{\xi\eta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} - V_{\xi\zeta}^{1,j-2} - m W_{\eta\zeta}^{1,j-2} - \sum_{\nu=0}^{j-4} V_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu-4}$$

$$W_{\xi\zeta}^{1,j} + m U_{\xi\zeta}^{1,j} = -m \sum_{\nu=0}^{j-1} U_{\xi\zeta}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} - W_{\eta\eta}^{1,j-2} - m V_{\eta\zeta}^{1,j-2} - \sum_{\nu=0}^{j-4} W_{\xi\xi}^{1,\nu} c_{j-\nu-4}$$

После подстановки (1.6) в (1.4) с использованием соответствующих разложений из (1.8), (1.9) и расщепления по параметру  $\varepsilon^{1/2}$  получим бесконечную систему уравнений относительно функций  $U^{2,j}$ ,  $V^{2,j}$ ,  $W^{2,j}$  ( $j=0, 1, \dots$ ), которые определяют решения второго типа

$$U_{\xi\xi}^{2,j} + m V_{\xi\eta}^{2,j} = -m \sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\xi\eta}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} - U_{\xi\zeta}^{2,j-2} - m W_{\xi\zeta}^{2,j-2} - \sum_{\nu=0}^{j-4} U_{\eta\eta}^{2,\nu} d_{j-\nu-4} \quad (1.11)$$

$$V_{\xi\xi}^{2,j} + V_{\eta\eta}^{2,j} + V_{\zeta\zeta}^{2,j} = - \sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\eta\eta}^{2,\nu} d_{j-\nu} - m \sum_{\nu=0}^{j-4} (U_{\xi\eta}^{2,\nu} + W_{\eta\zeta}^{2,\nu}) \beta_{j-\nu-4},$$

$$d_p = \sum_{s=0}^p \beta_s \beta_{p-s}$$

$$W_{\xi\xi}^{2,j} + mV_{\eta\xi}^{2,j} = -m \sum_{\nu=0}^{j-1} V_{\eta\xi}^{2,\nu} \beta_{j-\nu} - W_{\xi\xi}^{2,j-2} - mU_{\xi\xi}^{2,j-2} - \sum_{\nu=0}^{j-4} W_{\eta\eta}^{2,\nu} d_{j-\nu-4}$$

Подставляя (1.7) в (1.4), используя разложения (1.8), (1.9) и расщепляя по параметру  $\varepsilon^{1/2}$ , получим бесконечную систему уравнений относительно функций  $U^{3,j}$ ,  $V^{3,j}$ ,  $W^{3,j}$  ( $j=0, 1, \dots$ ), которые определяют решения, сравнительно медленно изменяющиеся вдоль координаты  $z$  (напряженно-деформированное состояние третьего типа):

$$U_{\xi\xi}^{3,j} + mW_{\xi\xi}^{3,j} = -m \sum_{\nu=0}^{j-1} W_{\xi\xi}^{3,\nu} \gamma_{j-\nu} - U_{\eta\eta}^{3,j-2} - mV_{\xi\eta}^{3,j-2} - \sum_{\nu=0}^{j-4} U_{\xi\xi}^{3,\nu} g_{j-\nu-4} \tag{1.12}$$

$$V_{\eta\eta}^{3,j} + mW_{\eta\xi}^{3,j} = -m \sum_{\nu=0}^{j-1} W_{\eta\xi}^{3,\nu} \gamma_{j-\nu} - V_{\xi\xi}^{3,j-2} - mU_{\xi\eta}^{3,j-2} - \sum_{\nu=0}^{j-4} V_{\xi\xi}^{3,\nu} g_{j-\nu-4}$$

$$W_{\xi\xi}^{3,j} + W_{\eta\eta}^{3,j} + W_{\xi\xi}^{3,j} = - \sum_{\nu=0}^{j-1} W_{\xi\xi}^{3,\nu} g_{j-\nu} - m \sum_{\nu=0}^{j-4} (U_{\xi\xi}^{3,\nu} + V_{\eta\xi}^{3,\nu}) \gamma_{j-\nu-4},$$

$$g_p = \sum_{s=0}^p \gamma_s \gamma_{p-s}$$

Здесь и в дальнейшем принято, что дифференцирование (индексы  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) производится по тем координатам  $\xi_n$ ,  $\eta_n$ ,  $\zeta_n$  ( $n=1, 2, 3$ ), индексы которых совпадают с первыми верхними индексами функций. Кроме того, следует иметь в виду, что если верхний предел суммирования меньше нижнего или у какой-либо из функций  $U^{n,h}$ ,  $V^{n,h}$ ,  $W^{n,h}$  ( $n=1, 2, 3$ ) второй верхний индекс отрицателен, то такие суммы и функции необходимо полагать равными нулю.

Так, при  $j=0$  из (1.10)–(1.12) получим:  
напряженное состояние первого типа

$$U_{\xi\xi}^{1,0} + U_{\eta\eta}^{1,0} + U_{\xi\xi}^{1,0} = 0, \quad V_{\eta\eta}^{1,0} + mU_{\xi\eta}^{1,0} = 0, \quad W_{\xi\xi}^{1,0} + mU_{\xi\xi}^{1,0} = 0 \tag{1.13}$$

напряженное состояние второго типа

$$U_{\xi\xi}^{2,0} + mV_{\xi\eta}^{2,0} = 0, \quad V_{\xi\xi}^{2,0} + V_{\eta\eta}^{2,0} + V_{\xi\xi}^{2,0} = 0, \quad W_{\xi\xi}^{2,0} + mV_{\eta\xi}^{2,0} = 0 \tag{1.14}$$

напряженное состояние третьего типа

$$U_{\xi\xi}^{3,0} + mW_{\xi\xi}^{3,0} = 0, \quad V_{\eta\eta}^{3,0} + mW_{\eta\xi}^{3,0} = 0, \quad W_{\xi\xi}^{3,0} + W_{\eta\eta}^{3,0} + W_{\xi\xi}^{3,0} = 0 \tag{1.15}$$

Из (1.13)–(1.15) следует, что функции  $U^{1,0}$ ,  $V^{2,0}$ ,  $W^{3,0}$  определяются из уравнений Лапласа. Функции  $V^{1,0}$ ,  $W^{1,0}$ ;  $U^{2,0}$ ,  $W^{2,0}$ ;  $U^{3,0}$ ,  $V^{3,0}$  выражаются через  $U^{1,0}$ ,  $V^{2,0}$ ,  $W^{3,0}$  простым интегрированием. При этом, как правило, ограничиваемся лишь частными интегралами.

Коэффициенты  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) пока не определены. Справедливо следующее предложение: если коэффициенты  $\alpha_j$  находятся по формулам

$$\alpha_0=1, \quad \alpha_j = \frac{1}{2} m^2 \left( \omega_{j-1} + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k \omega_{j-1-k} \right) \quad (j=1,2,\dots) \quad (1.16)$$

$$\omega_s = \alpha_s + (1-m) \sum_{n=0}^{s-2} (2\alpha_n - c_n) \omega_{s-n-2} \quad (s \geq 0) \quad (1.17)$$

то правая часть первого уравнения системы (1.10) обращается в нуль, т. е. функции  $U^{1,j}$  определяются из уравнений Лапласа.

Докажем это методом математической индукции. При  $j=0$  справедливость предложения следует из (1.13). Непосредственно убеждаемся, что предложение справедливо при  $j=1, 2, 3$ , т. е.  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Предположим, что оно справедливо при  $j \leq p$  и докажем его при  $j=p+1$ . При этом заметим, что если функции  $U^{1,j}$  ( $j \leq p$ ) гармонические, то функции  $V^{1,j}$ ,  $W^{1,j}$  ( $j \leq p$ ), определяемые как частные интегралы от гармонических функций из второго и третьего уравнений системы (1.10), также будут гармоническими, причем

$$V_{\xi\xi}^{1,j} + \sum_{v=0}^{j-2} V_{\xi\xi}^{1,v} c_{j-v-2} = -V_{\eta\eta}^{1,j}, \quad W_{\eta\eta}^{1,j} + \sum_{v=0}^{j-2} W_{\xi\xi}^{1,v} c_{j-v-2} = -W_{\xi\xi}^{1,j} \quad (j \leq p) \quad (1.18)$$

Подставим (1.18) во второе и третье уравнения системы (1.10). Первое из полученных равенств проинтегрируем по  $\eta_1$ , а второе — по  $\xi_1$ . Затем оба равенства продифференцируем по  $\xi_1$ . При этом получим систему линейных

алгебраических уравнений относительно функций  $V_{\xi\eta}^{1,j}$ ,  $W_{\xi\xi}^{1,j}$  ( $j \leq p$ ):

$$V_{\xi\eta}^{1,j} = -m \sum_{v=0}^j U_{\xi\xi}^{1,v} \alpha_{j-v} + V_{\xi\eta}^{1,j-2} - m W_{\xi\xi}^{1,j-2} \quad (1.19)$$

$$W_{\xi\xi}^{1,j} = -m \sum_{v=0}^j U_{\xi\xi}^{1,v} \alpha_{j-v} - m V_{\xi\eta}^{1,j-2} + W_{\xi\xi}^{1,j-2}$$

Система (1.19) имеет треугольную матрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали и, следовательно, всегда разрешима. Решение ее имеет вид

$$V_{\xi\eta}^{1,j} = W_{\xi\xi}^{1,j} = -m \sum_{v=0}^j U_{\xi\xi}^{1,v} \omega_{j-v} \quad (1.20)$$

где  $\omega_s$  определяется по формуле (1.17).

Подставляя (1.20) в первое уравнение системы (1.10) при  $j=p+1$  и учитывая (1.16), получим, что правая часть указанного уравнения обращается в нуль, т. е. функция  $U^{1,p+1}$  гармоническая.

Из доказанного предложения следует, что коэффициент  $\alpha$  раскладывается в ряд по степеням  $\varepsilon$ , а не  $\varepsilon^{1/2}$ , как предполагалось в (1.9). Если  $m=1$  (при этом коэффициенты Пуассона принимаются равными нулю), то коэффициент  $\alpha$  раскладывается в ряд по степеням  $\varepsilon^2$ .

Аналогичные предложения могут быть доказаны и для коэффициентов  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ , причем оказывается, что  $\beta_j$  и  $\gamma_j$  определяются по той же формуле (1.16). Поэтому в дальнейшем будем полагать  $\beta_j = \gamma_j = \alpha_j$ .

Используем преобразования (1.5)–(1.7) и разложения (1.8), (1.9) в выражениях для перемещений и напряжений (1.3) (при этом учитываем, что компоненты вектора перемещений разыскиваются в виде суперпозиции решений всех типов); представим последние рядами

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} u_j, \quad v = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} v_j, \quad w = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} w_j, \quad \sigma_{nk} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \sigma_{nk}^j \quad (n, k=1, 2, 3)$$

После расщепления по параметру  $\varepsilon^{1/2}$  получим

$$u_j = U^{1,j} + U^{2,j-3} + U^{3,j-3}, \quad v_j = V^{2,j} + V^{1,j-3} + V^{3,j-3}$$

$$w_j = W^{3,j} + W^{1,j-3} + W^{2,j-3}$$

$$E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{11}^j = \sum_{\nu=0}^j U_{\xi}^{1,\nu} \alpha_{j-\nu} + U_{\xi}^{2,j-2} + U_{\xi}^{3,j-2} + \mu \sum_{\nu=0}^{j-2} (V_{\eta}^{2,\nu} + W_{\zeta}^{3,\nu}) \alpha_{j-\nu-2} +$$

$$+ \mu (V_{\eta}^{1,j-4} + V_{\eta}^{3,j-4} + W_{\zeta}^{1,j-4} + W_{\zeta}^{2,j-4})$$

$$E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{22}^j = \sum_{\nu=0}^j V_{\eta}^{2,\nu} \alpha_{j-\nu} + V_{\eta}^{1,j-2} + V_{\eta}^{3,j-2} + \mu \sum_{\nu=0}^{j-2} (U_{\xi}^{1,\nu} + W_{\zeta}^{3,\nu}) \alpha_{j-\nu-2} +$$

$$+ \mu (U_{\xi}^{2,j-4} + U_{\xi}^{3,j-4} + W_{\zeta}^{1,j-4} + W_{\zeta}^{2,j-4})$$

$$E_1^{-1} \varepsilon^{-1/2} \sigma_{33}^j = \sum_{\nu=0}^j W_{\zeta}^{3,\nu} \alpha_{j-\nu} + W_{\zeta}^{1,j-2} + W_{\zeta}^{2,j-2} + \mu \sum_{\nu=0}^{j-2} (U_{\xi}^{1,\nu} + V_{\eta}^{2,\nu}) \alpha_{j-\nu-2} +$$

$$+ \mu (U_{\xi}^{2,j-4} + U_{\xi}^{3,j-4} + V_{\eta}^{1,j-4} + V_{\eta}^{3,j-4}) \quad (1.21)$$

$$(E_1 \varepsilon)^{-1} \sigma_{12}^j = U_{\eta}^{1,j} + V_{\xi}^{2,j} + U_{\eta}^{3,j-3} + V_{\xi}^{3,j-3} + \sum_{\nu=0}^{j-4} (U_{\eta}^{2,\nu} + V_{\xi}^{1,\nu}) \alpha_{j-\nu-4}$$

$$(E_1 \varepsilon)^{-1} \sigma_{13}^j = U_{\zeta}^{1,j} + W_{\xi}^{3,j} + U_{\zeta}^{2,j-3} + W_{\xi}^{2,j-3} + \sum_{\nu=0}^{j-4} (U_{\zeta}^{3,\nu} + W_{\xi}^{1,\nu}) \alpha_{j-\nu-4}$$

$$(E_1 \varepsilon)^{-1} \sigma_{23}^j = V_{\zeta}^{2,j} + W_{\eta}^{3,j} + V_{\zeta}^{1,j-3} + W_{\eta}^{1,j-3} + \sum_{\nu=0}^{j-4} (V_{\zeta}^{3,\nu} + W_{\eta}^{2,\nu}) \alpha_{j-\nu-4}$$

Из (1.10)–(1.15), (1.21) видно, что напряженно-деформированные состояния первого, второго и третьего типов связаны только через граничные условия. Так как функции  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$ ,  $W^{3,j}$  определяются из уравнений Лапласа, то эффективность метода зависит от того, удастся ли сформулировать соответствующие краевые задачи для нахождения этих функций.

2. Перейдем далее к анализу граничных условий. В случае первой основной задачи теории упругости на ограничивающей плоскости (например,  $x = \text{const}$ ) известны нормальные  $\sigma_{11}$  и касательные  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  напряжения

$$\sigma_{11} = \varphi_1(y, z), \quad \sigma_{12} = \varphi_2(y, z), \quad \sigma_{13} = \varphi_3(y, z) \quad (2.1)$$

Предполагаем, что функции  $\varphi_n(y, z)$  могут быть представлены рядами

$$\varphi_n(y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \varphi_{n,j} \quad (n=1, 2, 3) \quad (2.2)$$

(в противном случае все коэффициенты при  $\varepsilon^{j/2}$  ( $j \geq 1$ ) обращаются в нуль). Тогда на ограничивающей плоскости  $x = \text{const}$  напряжения  $\sigma_{11}^j = \varphi_{1,j}$ ,  $\sigma_{12}^j = \varphi_{2,j}$ ,  $\sigma_{13}^j = \varphi_{3,j}$ .

Используя результаты п. 1, приходим к интегрированию уравнений напряженного состояния:

первого типа (1.10) при следующих граничных условиях для функций  $U^{1,j}$ :

$$U_{\xi}^{1,j} = E_1^{-1} \varepsilon^{-j/2} \varphi_{1,j} - \sum_{v=0}^{j-1} U_{\xi}^{1,v} \alpha_{j-v} - U_{\xi}^{2,j-2} - U_{\xi}^{3,j-2} - \mu \sum_{v=0}^{j-2} (V_{\eta}^{2,v} + W_{\xi}^{3,v}) \alpha_{j-v-2} - \mu (V_{\eta}^{1,j-4} + V_{\eta}^{3,j-4} + W_{\xi}^{1,j-4} + W_{\xi}^{2,j-4}) \quad (j=0,1,\dots) \quad (2.3)$$

уравнений напряженного состояния второго типа (1.11) с крайвыми условиями для функций  $V^{2,j}$ :

$$V_{\xi}^{2,j} = (E_1 \varepsilon)^{-1} \varphi_{2,j} - U_{\eta}^{1,j} - U_{\eta}^{3,j-3} - V_{\xi}^{3,j-3} - \sum_{v=0}^{j-4} (U_{\eta}^{2,v} + V_{\xi}^{1,v}) \alpha_{j-v-4} \quad (j=0,1,\dots) \quad (2.4)$$

уравнений напряженного состояния третьего типа (1.12) при следующих граничных условиях для функций  $W^{3,j}$ :

$$W_{\xi}^{3,j} = (E_1 \varepsilon)^{-1} \varphi_{3,j} - U_{\xi}^{1,j} - U_{\xi}^{2,j-3} - W_{\xi}^{2,j-3} - \sum_{v=0}^{j-4} (U_{\xi}^{3,v} + W_{\xi}^{1,v}) \alpha_{j-v-4} \quad (j=0,1,\dots) \quad (2.5)$$

Для второй основной краевой задачи на ограничивающей плоскости  $x = \text{const}$  заданы смещения

$$u = \psi_1(y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{1,j}, \quad v = \psi_2(y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{2,j}, \quad w = \psi_3(y, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} \psi_{3,j} \quad (2.6)$$

Тогда на ограничивающей плоскости  $u_j = \psi_{1,j}$ ,  $v_j = \psi_{2,j}$ ,  $w_j = \psi_{3,j}$  и из (1.21) граничные условия для функций  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$ ,  $W^{3,j}$  запишутся соответственно

$$U^{1,j} = \psi_{1,j} - U^{2,j-3} - U^{3,j-3}, \quad V^{2,j} = \psi_{2,j} - V^{1,j-3} - V^{3,j-3}, \quad W^{3,j} = \psi_{3,j} - W^{1,j-3} - W^{2,j-3} \quad (j=0,1,\dots) \quad (2.7)$$

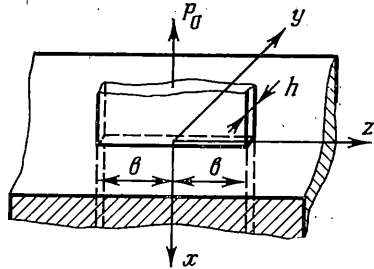
Используя (2.3)–(2.5), (2.7), нетрудно получить крайвые условия для функций  $U^{1,j}$ ,  $V^{2,j}$ ,  $W^{3,j}$  в случае основной смешанной задачи.

Анализ граничных условий показывает, что для всех основных краевых задач граничные условия в нулевом приближении ( $j=0$ ) напряженного состояния первого типа не зависят ни от более высоких приближений, ни от решений уравнений напряженного состояния второго и третьего типов. Поэтому первое уравнение (1.13) решается независимо от остальных, а решение второго и третьего уравнений (1.13) находится простым интегрированием. После этого полностью определяются граничные условия для второго и третьего уравнений из (1.14) и (1.15). Решив эти уравнения и определив функции  $U^{2,0}$ ,  $W^{2,0}$ ,  $U^{3,0}$ ,  $V^{3,0}$ , получим граничные условия для

первого уравнения системы (1.10) напряженного состояния первого типа в первом приближении ( $j=1$ ) и так далее.

Следовательно, решение основных краевых задач сводится к последовательному интегрированию уравнений (1.10) напряженного состояния первого типа, уравнений (1.11) напряженного состояния второго типа и уравнений (1.12) напряженного состояния третьего типа.

Так как функции  $U^{1,j}, V^{2,j}, W^{3,j}$  ( $j=0, 1, \dots$ ) определяются из уравнений Лапласа (если коэффициенты  $\beta_j = \gamma_j = \alpha_j$  находятся по формуле (1.16)) при соответствующих граничных условиях, то на каждом этапе процесса та или иная краевая задача теории упругости сводится к краевой задаче теории потенциала. Это позволяет, например, существенно расширить область эффективного применения интегральных преобразований, что открывает новые перспективы при исследовании многих практически важных задач, возникающих в современной технике.



Аналогично могут быть решены основные краевые задачи теории упругости при других отношениях модулей упругости  $q = E_2/E_1, q_1 = E_3/E_1$ .

В качестве примера рассмотрим простейший случай упругого равновесия ортотропного полупространства, ограниченного плоскостью  $yz$  (ось  $x$  направлена внутрь тела), под действием нормальной нагрузки  $p$ , равномерно распределенной по бесконечной прямой  $x=0, y=0$  (оси  $z$ ). В этом случае (случай обобщенной плоской деформации [7]) на основе предложенного метода получим следующую формулу, например, для напряжения  $\sigma_{11}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & -p\pi^{-1}\epsilon^{1/2} \{ [1 + \epsilon + (m+1)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)] (1 + m^2\epsilon^2 + O(\epsilon^3)) \times \\ & \times x [\epsilon (1 + m^2\epsilon^2 + O(\epsilon^3))^2 x^2 + y^2]^{-1} - \epsilon (1 + \epsilon + O(\epsilon^2)) \times \\ & \times x [x^2 + \epsilon (1 + m^2\epsilon^2 + O(\epsilon^3))^2 y^2]^{-1} \} \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом решение строится в виде разложения в ряд по целым степеням параметра  $\epsilon$ , так как граничные условия для функций с нечетным вторым индексом являются нулевыми (соответствующие функции также обращаются в нуль).

Отметим, что формула (2.8) представляет собой первые члены разложения в ряд по степеням  $\epsilon$  точного решения [7].

Если в начале координат на ограничивающей плоскости к полупространству приложена сосредоточенная сила  $P$  в направлении оси  $x$ , то

$$\sigma_{11} = -P(2\pi)^{-1}\epsilon^{1/2} [x(\epsilon x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + O(\epsilon)] \quad (2.9)$$

Учитывая только нулевое приближение в (2.9), получаем, что погрешность при вычислении напряжения  $\sigma_{11}$  на линии действия силы (оси  $x$ ) даже в самом неблагоприятном с точки зрения применяемого метода случае изотропной среды (в этом случае параметр  $\epsilon$  имеет максимальное значение) не превышает 5% при коэффициенте Пуассона, равном 0.3.

3. Рассмотрим более сложные задачи, связанные с исследованием деформирования композитных материалов, о передаче нагрузок через тонкие упругие включения к анизотропному полупространству.

Пусть в упругое анизотропное полубесконечное тело помещено и непрерывно связано упругое полубесконечное включение прямоугольного поперечного сечения (фигура). Предполагаем, что площадь  $F$  поперечного сечения включения достаточно мала, т. е. толщина  $h$  и полуширина  $b$  достаточно малы. Средняя линия включения перпендикулярна к ограничи-



вающей полупространство плоскости и совпадает с осью  $Ox$ . Требуется определить закон распределения контактных напряжений в полоске соединения включения с полупространством, когда в концевой точке включения действует сосредоточенная сила  $P_0$ , направленная по оси включения.

Будем предполагать, что полуширина  $b$  настолько мала, что в зоне контакта можно пренебречь тангенциальными напряжениями  $\sigma_{23}$ , т. е. в полоске соединения включения с полупространством действуют только тангенциальные контактные напряжения  $\sigma_{12}(x, z)$ .

При постановке пространственных контактных задач для тел с упругими включениями (или накладками) малого поперечного сечения модель одномерного упругого континуума включения в сочетании с моделью контакта по линии непосредственно неприменима [1, 3]. Как и в [3], будем предполагать, что имеет место модель одномерного упругого континуума включения в сочетании с моделью контакта по площади для полупространства, когда закон распределения контактных напряжений дается формулой

$$\sigma_{12}(x, z) = \tau(x) / (\pi \sqrt{b^2 - z^2}) \quad (3.1)$$

где  $\tau(x)$  — напряжение на единицу длины включения, подлежащее определению.

Из этих предположений следует, что в любом поперечном сечении включения осевые напряжения распределены по площади сечения равномерно, а контактные напряжения сосредоточены вдоль средней линии полоски контакта.

В такой постановке задача сводится к интегрированию уравнений равновесия (1.4) ( $q=q_1=1$ ,  $k_1=k_2=1$ ,  $m_2=m_1=m$ ) при следующих граничных условиях:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } x=0; \quad u=u_1, \quad v=w=0 \quad \text{при } y=0, \quad z=0$$

На бесконечности все функции обращаются в нуль. Перемещения  $u_1(x)$  точек средней линии включения удовлетворяют уравнению

$$d^2 u_1 / dx^2 = [P_0 \delta(x) - \tau(x)] / EF \quad (3.2)$$

где  $E$  — модуль упругости материала включения,  $\delta(x)$  — функция Дирака.

Для исследования поставленной задачи, которая не поддается точному решению, применим метод, предложенный в пп. 1, 2.

Контактное напряжение  $\sigma_{12}(x, z)$  будет определяться лишь функцией  $u_y$ , так как  $v=0$  ( $v_x=0$ ) при  $y=0$ , причем  $\sigma_{12}(x, z) = 2G u_y$ , где  $G = G_{12}$ , а  $\sigma_{12}$  определяется формулой (3.1).

Перемещение  $u$  полупространства имеет решающее значение лишь в напряженно-деформированном состоянии первого типа. Ограничиваясь нулевым приближением (учет последующих приближений, как показано в конце п. 2, даже в самом неблагоприятном случае изотропного полупространства приводит к несущественным количественным поправкам и не может влиять на принципиальную сторону вопроса), приходим к интегрированию уравнения (3.2) и первого уравнения (1.13), которое в исходных переменных имеет вид

$$\omega^2 u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad (\omega^2 = E_1 / G = \varepsilon^{-1}) \quad (3.3)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u_x &= 0 \quad \text{при } x=0 \\ u_y &= \tau(x) / (2\pi G \sqrt{b^2 - z^2}) \quad \text{при } y=0, \quad |z| < b \\ u &= u_1 \quad \text{при } y=0, \quad z=0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

На бесконечности все функции обращаются в нуль.

Решение задачи (3.2) — (3.4) можно получить при помощи преобразований Фурье. Выполняя эти преобразования и находя их обращения, получим

$$u_1(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{P_0}{EF} \int_0^\infty \frac{K(s) \cos xs}{s^2 K(s) + \beta} ds, \quad T(x) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{sK(s) \sin xs}{s^2 K(s) + \beta} ds \quad (3.5)$$

$$\tau(x) = \frac{2\beta P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xs}{s^2 K(s) + \beta} ds, \quad K(s) = \int_0^\infty \frac{J_0(bv)}{\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2}} dv, \quad \beta = \frac{2\pi G}{EF}$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя,  $T(x)$  — усилие во включении.

Пользуясь известными соотношениями [8], стр. 695, формула 6.552.1), находим

$$K(s) = I_0(1/2 b \omega s) K_0(1/2 b \omega s), \quad K(-s) = K(s) \quad (s > 0) \quad (3.6)$$

где  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$  — модифицированные функции Бесселя.

Для функций  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$  при больших положительных значениях аргумента  $x$  справедливы следующие асимптотические формулы [8], стр. 976, 977, формулы 8.451.5, 8.451.6):

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (3.7)$$

Рассмотрим функцию  $f(s) = \beta + s^2 K(s)$ . Эта функция непрерывна и строго положительна на всей вещественной оси. Кроме того, согласно формулам (3.7):

$$f(s) \approx \beta + s/b\omega \quad (s \rightarrow +\infty) \quad (3.8)$$

В этом случае из (3.5) получим

$$T(x) = \frac{2P_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xs}{s+g} ds = \frac{2P_0}{\pi} (\text{ci } gx \sin gx - \cos gx \text{ si } gx) \quad (3.9)$$

$$\tau(x) = \frac{2P_0 g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xs}{s+g} ds = -\frac{2P_0 g}{\pi} (\text{ci } gx \cos gx + \sin gx \text{ si } gx) \quad (g = \beta b \omega) \quad (3.10)$$

где si, ci — интегральные синус и косинус.

Большим значениям параметра  $s$  соответствуют малые значения координаты  $x$ . Следовательно, поведение усилий во включении и контактных напряжений  $\tau(x)$  при малых  $x$  полностью определяется формулами (3.9), (3.10), причем  $\tau(x)$  в точке  $x=0$  имеет логарифмическую особенность.

При малых положительных значениях аргумента  $x$  для функций  $I_0(x)$ ,  $K_0(x)$  справедливы представления [8] ( $\gamma$  — константа Эйлера)

$$I_0(x) \approx 1, \quad K_0(x) \approx \ln(2/\gamma x) \quad (3.11)$$

Используя формулы (3.11), усилие во включении  $T(x)$  при малых  $s$  (малым значениям параметра  $s$  соответствуют большие значения координаты  $x$ ) можно представить в виде

$$T(x) = \frac{2P_0}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{\sin xs}{s(\lambda(s)+1)} ds \right], \quad \lambda(s) = \frac{EF}{2\pi G} s^2 \ln \left( \frac{4}{\gamma \omega b s} \right) \quad (3.12)$$

Интеграл в (3.12) при возрастании  $x$  (убывании  $s$ ) довольно быстро стремится к  $\pi/2$ . Действительно, при малых значениях параметра  $s$  и конечном отношении  $EF/2\pi G$  можно пренебречь функцией  $\lambda(s)$  по сравнению с единицей. В этом случае

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xs}{s} ds = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, в пространственной задаче при возрастании координаты  $x$  убывание усилий во включении (следовательно, и контактных напряжений) происходит значительно быстрее, чем в плоской задаче, где соответствующие величины выражаются формулами, аналогичными (3.9), (3.10).

4. Пусть тонкие упругие включения занимают в полупространстве каждую из полос  $0 \leq x < \infty$ ,  $|z| \leq b$ ,  $y = 2ak$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) (имеет место периодичность по координате  $y$ ). При тех же предположениях, что и выше, контактное напряжение  $\tau(x)$  определяется формулой

$$\tau(x) = \frac{2\beta P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos xs}{\beta + s^2 L(s)} ds \quad (4.1)$$

$$L(s) = \int_0^{\infty} \frac{J_0(bv)}{\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2}} \operatorname{cth}(a\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2}) dv$$

При  $a \rightarrow \infty$  ( $2a$  — расстояние между включениями) (4.1) переходит в решение (3.5) для одиночного включения.

Если в периодической задаче включения нагружены через один, то контактные напряжения  $\tau_0(\tau_1)$  в полоске соединения нагруженного (ненагруженного) включения с полупространством запишутся соответственно

$$\tau_0(x) = \frac{4\beta P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(s^2 M(s) + 2\beta) \cos xs}{(s^2 M(s) + 2\beta)^2 - s^4 N^2(s)} ds$$

$$\tau_1(x) = \frac{4\beta P_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^2 N(s) \cos xs}{(s^2 M(s) + 2\beta)^2 - s^4 N^2(s)} ds$$

$$M(s) = \int_0^{\infty} \frac{J_0(bv)}{\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2}} [\operatorname{th}(a\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2}) + \operatorname{cth}(a\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2})] dv$$

$$N(s) = 2 \int_0^{\infty} \frac{J_0(bv)}{\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2}} \frac{dv}{\operatorname{sh}(2a\sqrt{\omega^2 s^2 + v^2})}$$

Предельный переход при  $a \rightarrow \infty$  и в этом случае дает решение для одиночного включения.

Автор благодарит Л. И. Маневича за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Sternberg E.* Load-transfer and load-diffusion in elastostatics. Proc. 6th U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech. New York, ASME, 1970, p. 34-61. (Рус. перев.: *Механика*. Сб. перев., 1972, № 6).
2. *Абрамян Б. Л.* Об одной контактной задаче для полуплоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
3. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* К решению контактных задач теории упругости для ортотропной полосы с учетом сил трения. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 6.
5. *Маневич Л. И., Павленко А. В.* Передача продольной динамической нагрузки, действующей на ребра жесткости, к упругой ортотропной пластине. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
6. *Коблик С. Г., Маневич Л. И.* Контактная задача для ортотропной полосы при наличии в области контакта участков сцепления и скольжения. В сб.: *Гидроаэромеханика и теория упругости*, вып. 20. Изд-во Днепропетровск. ун-та, 1976.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., «Наука», 1977.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.