

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
ВБЛИЗИ УГЛОВЫХ ТОЧЕК И ЛИНИЙ

А. Я. АЛЕКСАНДРОВ, Б. М. ЗИНОВЬЕВ, Л. М. КУРШИН

(Новосибирск)

Излагается способ решения задач теории упругости при помощи численной реализации метода интегральных уравнений [1], позволяющий уточнять решения путем выделения особенностей в окрестности угловых точек для плоской задачи и угловых линий для пространственной. Некоторые предложения, отличные от приведенных в настоящей работе, по уточнению численного счета вблизи угловых точек и линий содержатся в [2-4].

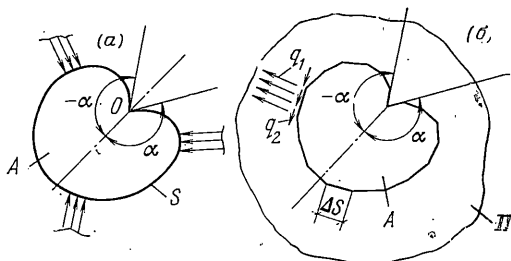
1. Плоская задача. Пусть исследуется напряженно-деформированное состояние тела A с контуром S , имеющим угловую точку O (фиг. 1, а). Согласно [1], представим тело частью бесконечной плоскости Π , внутри которой по контуру S распределены компенсирующие нагрузки q (фиг. 1, б). Значения нагрузок q необходимо найти такими, чтобы удовлетворялись заданные граничные условия на S . Когда нагрузки q найдены, напряжения и смещения в любой точке области A вычислим, суммируя действие этих нагрузок.

Приближенно задача об отыскании нагрузок q может быть решена разбиением S на достаточно большое число участков ΔS , в пределах которых q считается неизвестной постоянной величиной, либо S разбивается на небольшое число участков, на каждом из которых задан закон изменения q , например полином n -й степени с неизвестными коэффициентами. Вводя выражения для напряжений и смещений от действия нагрузки q в граничные условия в некоторых точках, принадлежащих S , получают систему линейных алгебраических уравнений для отыскания неизвестных значений q на участках или коэффициентов полиномов, аппроксимирующих нагрузку. При таком подходе особенности напряжений в угловой точке, если они существуют, учитываются приближенно. Для построения уточненных решений можно использовать то обстоятельство, что закон изменения нагрузки в окрестности угловой точки (назовем их «особыми» нагрузками q_0) определяется, как будет показано, особенностью (сингулярностью) напряжений в этой точке и может быть установлен на основе собственных решений для клиновидных областей [5].

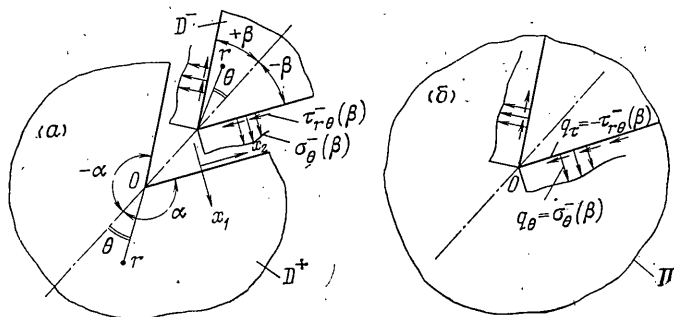
1.1. Функция напряжений в полярной системе координат может быть записана в виде [5]:

$$\begin{aligned} \varphi = r^{\lambda+1} f(\theta), f(\theta) = & C_1 \sin(\lambda+1)\theta + C_2 \cos(\lambda+1)\theta + \\ & + C_3 \sin(\lambda-1)\theta + C_4 \cos(\lambda-1)\theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.



Фиг. 1



Фиг. 2

Напряжения и смещения запишутся в виде

$$\sigma_r = r^{\lambda-1} [f''(\theta) + (\lambda+1)f(\theta)]$$

$$\sigma_\theta = r^{\lambda-1} \lambda(\lambda+1)f(\theta), \quad \tau_{r\theta} = -r^{\lambda-1} \lambda f'(\theta)$$

$$2Gu = r^\lambda [(1+\nu)^{-1} g'(\theta) - (\lambda+1)f(\theta)]$$

$$2Gv = r^\lambda [(1+\nu)^{-1} (\lambda-1)g(\theta) - f'(\theta)]$$

$$g(\theta) = 4(\lambda-1)^{-1} [C_3 \cos(\lambda-1)\theta + C_4 \sin(\lambda-1)\theta], \quad G = E/[2(1+\nu)] \quad (12)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Если применить решение (1.1) к клиновидной области D^+ , ограниченной радиальными кромками $\theta = \pm\alpha$ с однородными граничными условиями на этих кромках (фиг. 2, а), то можно получить трансцендентные характеристические уравнения, из которых можно найти собственные значения λ . Наименьшее положительное значение $\lambda = \lambda_0$, если $\lambda_0 < 1$ (или $\text{Re}(\lambda_0) < 1$, если λ_0 комплексное), определит особенность напряжений в угловой точке области D^+ . Такая же особенность будет иметь место в угловой точке O контура тела A при условии равенства соответствующих углов в вершинах и коэффициентов Пуассона материалов клиновидной пластины D^+ и тела A .

Коэффициенты C_i в случае однородной задачи линейно зависят и кратны одному произвольному множителю C . Следовательно, каждому λ соответствует один неопределенный множитель C .

1.2. Определим, как должны изменяться особые нагрузки q_0 в окрестности угловой точки O на S в сплошной плоскости, чтобы их действие создавало напряженное состояние с требуемой особенностью.

¹ Имеются в виду случаи граничных условий, когда особенность может быть установлена изложенным выше приемом.

Здесь приведем несколько способов определения особых нагрузок в зависимости от характера особенностей в угловой точке.

Пусть особенность напряжений в угловой точке O отвечает однородным условиям по напряжениям на радиальных кромках в D^+ : $\sigma_0^+(\alpha) = \tau_{r\theta}^+(\alpha) = 0$ при $\theta = \pm\alpha$ (фиг. 2, а).

Потребуем, чтобы области D^+ и D^- , дополняющие одна другую до полной плоскости (фиг. 2, а), деформировались как части сплошной плоскости, т. е. имели бы на радиальных кромках одинаковые смещения. Примем для области D^- решение в форме (1.1), введя в него собственное число $\lambda = \lambda_0$, определяющее сингулярность напряжений в области D^+ , и, приравняв смещения радиальных кромок в D^+ и D^- , найдем значения коэффициентов C_i в (1.1) для области D^- . Затем по формулам (1.2) определим напряжения на радиальных кромках в области D^- : $\sigma^-(\beta)$ и $\tau_{r\theta}^-(\beta)$.

Разрывы напряжений на каком-либо отрезке в плоскости определяют интенсивность распределенных по этому отрезку нагрузок, поэтому можем записать

$$q_r = \tau_{r\theta}^+(\alpha) - \tau_{r\theta}^-(\beta), \quad q_\theta = -[\sigma_0^+(\alpha) - \sigma_0^-(\beta)] \quad (1.3)$$

Здесь q_r , q_θ — радиальные и нормальные нагрузки, распределенные в сплошной плоскости по линиям стыковки S_1 и S_2 ; $\tau_{r\theta}^+(\alpha)$, $\sigma_0^+(\alpha)$, $\tau_{r\theta}^-(\beta)$, $\sigma_0^-(\beta)$ — предельные значения напряжений на радиальных стыкующихся кромках областей D^+ и D^- .

В рассматриваемом случае $\tau_{r\theta}^+(\alpha) = \sigma_0^+(\alpha) = 0$, поэтому

$$q_r = -\tau_{r\theta}^-(\beta), \quad q_\theta = \sigma_0^-(\beta) \quad (1.4)$$

За положительное направление q_r и q_θ принято направление осей x_1 и x_2 локальной системы координат; x_1 — внутренняя нормаль к радиальной кромке области D^+ , x_2 — касательная (фиг. 2, а).

Таким образом, при численном решении задачи теории упругости для учета особенности напряжений в угловой точке O (фиг. 1) можно принимать, что в ближайшей окрестности угловой точки, на двух соседних, прилегающих к ней участках ΔS , характер изменения компенсирующей нагрузки q_0 имеет вид (1.4). Отметим, что компоненты особой нагрузки линейно зависимы между собой и пропорциональны одному произвольному множителю C , конкретное значение которого должно быть определено в результате решения задачи.

1.3. Пусть особенность напряжений в угловой точке отвечает однородным условиям по смещениям, когда, например, обе радиальные кромки в D^+ заземлены: $u^+(\alpha) = v^+(\alpha) = 0$. Рассмотрим два варианта для определения особых нагрузок q_0 .

Возьмем область D^- , дополняющую область D^+ до полной плоскости, свободной от напряжений, и состыкуем ее с D^+ . Скачок напряжений на линиях стыковки S_1 и S_2 , равный напряжениям на радиальных кромках в D^+ , определит нагрузку в сплошной плоскости, распределенную по S_1 и S_2 : $q_r = \tau_{r\theta}^+(\alpha)$ и $q_\theta = -\sigma_0^+(\alpha)$. Особые нагрузки могут быть определены иначе.

Применим для области D^- решение в форме (1.1) и приравняем напряжения на радиальных кромках в D^+ и D^- . В общем случае перемещения радиальных кромок области D^- не будут совпадать с перемещениями радиальных кромок в D^+ . Если теперь эти области состыковать, то смещения на линиях стыковки будут изменяться скачкообразно. По скачку смещений могут быть определены обобщенные нагрузки, действие которых вызовет в сплошной плоскости соответствующие разрывы смещений [6]. В общем случае разрывы смещений на линиях стыковки и обобщенные нагрузки, распределенные в сплошной плоскости по этим линиям, связаны соотно-

нениями¹

$$\begin{aligned} q_{a_r} &= G[u^+(\alpha) - u^-(\beta)], \quad p_0 = -\partial q_{a_r} / \partial r \\ q_{a_0} &= -E[v^+(\alpha) - v^-(\beta)] / (1 - \nu^2), \quad p_r = -\nu \partial q_{a_0} / \partial r \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь q_{a_r} — моментные диполи, q_{a_0} — нормальные, безмоментные диполи; $u^+(\alpha)$, $v^+(\alpha)$, $u^-(\beta)$, $v^-(\beta)$ — предельные значения упругих смещений радиальных стыкующихся кромок областей D^+ и D^- ; p_0 и p_r — распределенные нормальные и радиальные силы.

В данном случае, когда $u^+(\alpha) = v^+(\alpha) = 0$, из (1.5) получим

$$\begin{aligned} q_{a_r} &= -Gu^-(\beta), \quad p_0 = G\partial u^-(\beta) / \partial r \\ q_{a_0} &= Ev^-(\beta) / (1 - \nu^2), \quad p_r = -\nu E[\partial v^-(\beta) / \partial r] / (1 - \nu^2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Следовательно, особые нагрузки q_0 , действующие в сплошной плоскости в окрестности угловой точки O на S , могут определяться выражениями (1.6).

1.4. Рассмотрим еще один способ определения нагрузок в сплошной плоскости, который можно назвать универсальным.

В решение (1.1) введем $\lambda = \lambda_0$, соответствующее однородным условиям на радиальных кромках области D^+ , и применим его для всей расширенной плоскости. Напряжения и смещения определяются в общем случае из (1.2) неоднозначно, поэтому на одном и том же луче S в плоскости при $\theta = \gamma$ и $\theta = \gamma - 2\pi$ получим различные предельные значения напряжений и смещений. Разность предельных значений компонент напряжений определит, согласно (1.3), величину распределенных по S нагрузок q ; разность значений нормальных и радиальных смещений на S определит, согласно (1.5), величину распределенных по S обобщенных нагрузок

$$\begin{aligned} q_r &= \tau_{r\theta}(\gamma) - \tau_{r\theta}(\gamma - 2\pi), \quad q_0 = -[\sigma_\theta(\gamma) - \sigma_\theta(\gamma - 2\pi)] \\ q_{a_0} &= -E[v(\gamma) - v(\gamma - 2\pi)] / (1 - \nu^2), \quad p_r = -\nu \partial q_{a_0} / \partial r \\ q_{a_r} &= G[u(\gamma) - u(\gamma - 2\pi)], \quad p_0 = -\partial q_{a_r} / \partial r \end{aligned} \quad (1.7)$$

При численном решении задачи с учетом особенности напряжений можно считать, что в ближайшей окрестности угловой точки особые нагрузки q_0 определяются выражениями (1.7), в которых следует принять $\alpha \leq \gamma \leq 2\pi - \alpha$.

Как было отмечено выше, компенсирующие особые нагрузки q_0 связаны между собой и пропорциональны одному неопределенному множителю C , значение которого отыскивают при решении задачи, удовлетворяя граничным условиям на S . При нахождении множителя C возникают затруднения, связанные с тем, что для его определения необходимо удовлетворить четырем граничным условиям — по два на каждом из двух участков ΔS , примыкающих к угловой точке. Задача получается переопределенной. Для определения C укажем некоторые возможные приемы. Напри-

¹ В [6] допущены опечатки. Выражения для F_3 и C следует читать так:

$$F_3 = - \sum_{i=1}^2 (-1)^i [(x-a)f_4 - Bf_3 \sin^2 \alpha_i + f_5 \sin \alpha_i \cos \alpha_i].$$

$$C = B^2 \sin^2 \alpha_i - \rho_2^2 \cos^2 \alpha_i$$

В выражении для F_6 вместо $\sin^2(\alpha_i/3)$ необходимо подставить $1/3 \sin^2 \alpha_i$; в выражении для F_3 вместо $\cos \alpha_2$ следует читать $\cos \alpha_1$.

мер, при комплексном $C=A+iB$ его значение можно найти, минимизируя функционал

$$I = \int_{(S)} [(\sigma - N)^2 + (\tau - T)^2] dS$$

где N и T — нормальная и касательная к S компоненты заданных на S граничных условий (напряжений или смещений); σ , τ — предельные значения величин, соответствующих граничным условиям, вычисленные при подходе к S изнутри области A от действия распределенных в плоскости по S искомых нагрузок q и q_0 .

Таким же приемом можно воспользоваться при действительном C , если особые нагрузки определить по формулам (1.7); в этом случае значение C можно полагать различным для каждого из двух участков ΔS , примыкающих к угловой точке.

При действительном значении C можно воспользоваться и другим приемом: записать все четыре граничных условия для примыкающих к угловой точке участков так, как будто бы компоненты особой нагрузки q_0 не связаны между собой, а затем связь между ними записать отдельными уравнениями вместо граничных условий в какой-либо точке, взятой, например, за контуром исследуемой области. Численные эксперименты показывают, что при достаточно плотной фрагментации контура исследуемой области связь между компонентами особой нагрузки можно не учитывать и в систему уравнений не вводить (см. пример 1 п. 3).

2. Трехмерные задачи. Пусть решается задача теории упругости для трехмерного тела с угловой линией S , образованной пересечением поверхностей, ограничивающих тело. Рассечем тело плоскостью, нормальной к угловой линии, и обозначим через α угол, под которым пересекаются следы поверхностей, образуя угловую линию S . В окрестности угловой линии особенность напряженного состояния тождественна с особенностью в случае плоского деформированного состояния клиновидного тела с углом α в вершине. Поэтому при расчете трехмерного тела с угловой линией вначале следует определить особенность из рассмотрения соответствующего однородного решения для плоского клина, после чего вести решение способом, аналогичным изложенному в п. 1.

3. Примеры. 3.1. Рассмотрим плоское симметричное тело A с двумя V -образными вырезами с прямыми углами при вершинах O_1 и O_2 (фиг. 3).

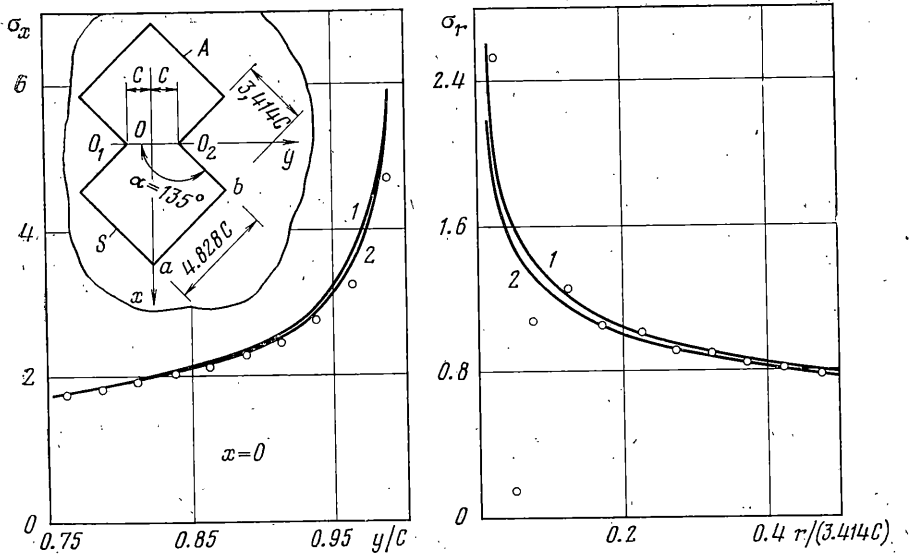
Для получения точного решения в замкнутом виде для тела конечных размеров с угловыми точками применим обратный метод. Для этого по заданной функции напряжений найдем соответствующие нагрузки на контуре. В решении (1.1) приравняем C_1 и C_3 нулю (после чего функция напряжений φ будет соответствовать симметричному напряженному состоянию) и применим его для клиновидной области, ограниченной радиальными кромками $\theta = \pm\alpha = \pm 135^\circ$.

Пусть на кромках $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ при $\theta = \pm\alpha$, что означает $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$. Отсюда получим систему уравнений для определения коэффициентов C_2 и C_4 ; приравняем определитель системы нулю и получим трансцендентное уравнение $\lambda \sin 2\alpha = -\sin 2\lambda\alpha$ для определения λ . При $\alpha = 135^\circ$ наименьшее λ оказывается вещественным числом $\lambda_0 = 0.544$. Коэффициенты C_2 и C_4 связаны соотношением

$$C_2 = -C_4 \cos(\lambda_0 - 1)\alpha / [\cos(\lambda_0 + 1)\alpha] = 0.5415C_4$$

С учетом этого из (1.1) при $C_1 = C_3 = 0$ получим

$$\varphi = r^{1.544} C_4 [\cos(0.456\theta) - 0.5415 \cos(1.544\theta)]$$



Фиг. 3

Полагая $C_4=1$, применим полученную функцию напряжений для изображенного на фиг. 3 тела; причем один раз за начало координат возьмем угловую точку O_1 и угол θ будем отсчитывать от оси oy по часовой стрелке, другой раз примем за начало координат угловую точку O_2 и угол θ будем отсчитывать от горизонтальной оси против часовой стрелки. Суммарные напряжения на контуре S тела A примем за контурные значения нагрузок.

Теперь решим численно задачу для тела A с известными граничными условиями и особенностями напряжений в угловых точках O_1 и O_2 . Особые нагрузки q_0 примем в форме (1.4), раскрыв правые части которых и разделив одно выражение на другое, получим связь между компонентами особой нагрузки $q_r/q_\theta = K_1$ или

$$q_r = K_1 q_\theta \quad (3.1)$$

$$K_1 = \frac{(\lambda_0 + 1) \sin(\lambda_0 + 1) \beta + K (\lambda_0 - 1) \sin(\lambda_0 - 1) \beta}{(\lambda_0 + 1) [\cos(\lambda_0 + 1) \beta + K \cos(\lambda_0 - 1) \beta]}$$

$$K = \frac{(\lambda_0 + 1) \sin(\alpha - \beta) \lambda_0}{\lambda_0 \sin[(\alpha - \beta)(\lambda_0 - 1)] - (3 - \nu) [\sin(\lambda_0 - 1) \pi] / (1 + \nu)}$$

$\beta = \pi - \alpha; K_1 = 1.056, \lambda_0 = 0.544$ при $\alpha = 135^\circ, \nu = 0.25$

Задачу решаем следующим образом. Сторону O_2b разобьем на 10 участков ΔS , сторону ab — на 14 участков; кроме того, для улучшения решения в окрестности углов a и b возьмем по три участка на продолжении каждой стороны за контур тела с граничными условиями, продолженными на эти участки с соответствующей кромки. Хотя в точках a и b нет сингулярности напряжений, численные решения в окрестности таких точек иногда заметно отличаются от точных. Опытные расчеты показывают определенную эффективность примененного приема — продления граничных условий за контур тела.

Компенсирющие нагрузки q_i , изменяющиеся на каждом i -м участке ΔS_i по линейному закону, представим суммой двух треугольных эпюр с неизвестными ординатами H_{2i} и H_{2i-1} в точках стыковки соседних участ-

Таблица 1

№	$\sigma_x^{(1)}$	$\sigma_x^{(2)}$	$\sigma_x^{(3)}$	$\sigma_x^{(4)}$
1	5.490	4.698	5.531	5.518
2	3.525	3.320	3.479	3.475
3	2.899	2.790	2.859	2.875
4	2.561	2.486	2.527	2.525
5	2.341	2.284	2.311	2.310
6	2.184	2.136	2.157	2.156
7	2.064	2.024	2.039	2.038
8	1.969	1.934	1.946	1.946
9	1.892	1.860	1.871	1.870
10	1.828	1.800	1.808	1.807

Таблица 2

№	$\sigma_r^{(1)}$	$\sigma_r^{(2)}$	$\sigma_r^{(3)}$	$\sigma_r^{(4)}$
1	2.084	2.520	1.820	1.799
2	1.628	0.148	1.480	1.470
3	1.420	1.079	1.322	1.314
4	1.205	1.251	1.164	1.160
5	1.085	1.057	1.014	1.011
6	1.005	1.004	0.980	0.977
7	0.944	0.927	0.909	0.907
8	0.896	0.887	0.875	0.873
9	0.857	0.840	0.831	0.830
10	0.823	0.810	0.803	0.802
11	0.793	0.776	0.770	0.770

ков. Коэффициенты матрицы системы уравнений вычислим при $H_{2i} = -H_{2i-1} = 1$, учитывая симметрию задачи относительно осей ox и oy . Точки, в которых удовлетворяются граничные условия, расположим равномерно, с шагом $\Delta S/2$ по две на каждом участке (кроме участков с особой нагрузкой).

Для учета особенности напряжений в точках O_1 и O_2 приложим на двух соседних участках, примыкающих к этим точкам, кроме нагрузки q особые нагрузки $q_r = Cr^{\lambda_0-1}$ и $q_\theta = CK_1 r^{\lambda_0-1}$ и граничные условия удовлетворим в трех точках на каждом из этих участков. Общий множитель C определим так: коэффициенты матрицы от действия особой нагрузки вычислим при $C = K_1 = 1$ отдельно от каждой компоненты $q_r = q_\theta = r^{\lambda_0-1}$, как будто бы они не связаны; затем связь между ними (3.1) запишем вместо одного из граничных условий для точки вне контура тела. Действие нагрузок q_r и q_θ учтем путем замены криволинейной эпюры r^{λ_0-1} полигональной функцией — набором трапеций и последующим применением точных формул напряжений от действия нагрузки, изменяющейся по линейному закону.

Некоторые результаты решения приведены на фиг. 3 и в табл. 1, 2. На фиг. 3, а и в табл. 1 представлены напряжения $\sigma_x^{(i)}$ на четверти отрезка O_2O , примыкающей к угловой точке O_2 ; на фиг. 3, б и в табл. 2 — радиальные напряжения $\sigma_r^{(i)}$ на половине длины кромки O_2b . Кривая 1 соответствует точному решению (в таблицах $i=1$), кривая 2 — численному решению с учетом особенностей ($i=3$), когда особые нагрузки связаны соотношением (3.1). Изолированными точками обозначено решение без учета особенностей ($i=2$). Был также просчитан вариант с учетом особенностей, когда соотношение (3.1) во внимание не принималось. График для этого случая

практически сливается с графиком 2 (этот вариант соответствует $i=4$).

Подробно схемы численного решения приведенных здесь второй и третьей задач (без учета особенностей) изложены в работе [6]. Здесь покажем, как может быть учтена особенность напряжений в окрестностях угловых точек и линий и как при этом улучшаются численные решения задач.

3.2. Упругая бесконечная пластина с прямолинейным разрезом длиной $S=2a$ равномерно растягивается на бесконечности нормальным к оси разреза напряжением q . Берега разреза свободны от напряжений (фиг. 4, а) $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ при $x=0$, $-a < y < a$.

Исследуем особенность напряжений в вершинах разреза. Для этого применим решение в форме (1.1) к клиновидной области, ограниченной радиусами $\theta = \pm\pi$, т. е. к плоскости с полубесконечным разрезом. Кромки разреза свободны от напряжений $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ при $\theta = \pm\pi$. Это означает, согласно (1.2), что $f(\pi) = f(-\pi) = 0$, $f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$. Отсюда получим трансцендентное уравнение $\sin 2\pi\lambda = 0$ для определения λ , наименьшее положительное из которых $\lambda_0 = 0.5$. Таким образом приходим к известному результату, что напряжения в вершине разреза имеют особенность вида $\sigma \sim r^{-0.5}$. Имея λ_0 , определим, как должны изменяться особые нагрузки в сплошной плоскости в окрестностях вершин разреза. Для этого воспользуемся выражениями (1.7), полагая в них $\gamma = \pm\pi$. Так как берега разреза свободны от напряжений, поэтому из (1.7) получаем $q_r = q_\theta = 0$. Чтобы найти обобщенные нагрузки (диполи и распределенные силы), определим радиальные и нормальные смещения противоположных кромок разреза из (1.2) при $\theta = \pm\pi$ и $\lambda = 0.5$, подставим в (1.7) и тогда получим

$$qa_\theta = qa_x = -8C\sqrt{r}/(1-\nu), \quad p_r = p_\nu = 4\nu C/[(1-\nu)\sqrt{r}] \quad (3.2)$$

Полагаем, что в сплошной плоскости в окрестностях концов разреза нагрузка изменяется по закону, определяемому выражениями (3.2), в которых r — расстояние от соответствующего конца разреза, а коэффициент C находим из условий удовлетворения заданным граничным условиям.

На фиг. 4 точному решению [7] соответствует кривая 1, решению без учета особенностей — кривая 2, решению с учетом особенности напряжений в вершинах разреза — кривая 3.

В последующих примерах сохраняется такая же нумерация графиков.

3.3. Упругое пространство с плоским круговым разрезом радиуса R_0 растягивается на бесконечности нормальным к плоскости разреза напряжением q (фиг. 5). Берега разреза свободны от напряжений $\sigma_z = \tau_{z\theta} = \tau_{rz} = 0$ при $Z=0$, $r < R_0$. Точное решение задачи известно [8].

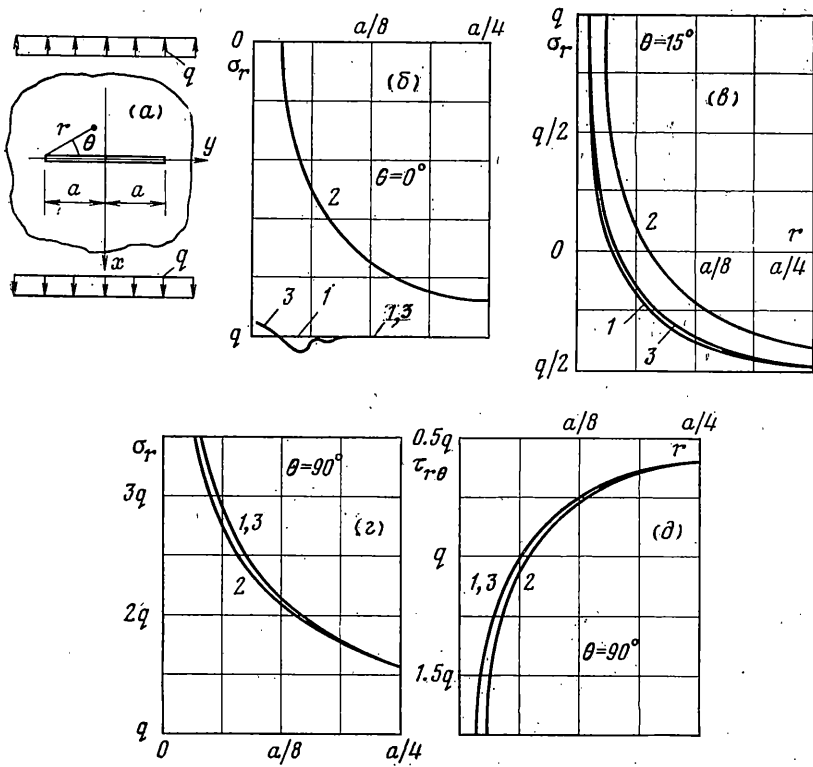
Напряжения в угловой линии разреза имеют такую же особенность, как в вершине разреза в плоской пластине. Поэтому закон изменения обобщенной нагрузки вблизи угловой линии разреза определится выражениями (3.2), в которых коэффициент Пуассона заменим на $\nu/(1-\nu)$, что соответствует переходу от плоского напряженного состояния к плоской деформации

$$qa_z = -C\sqrt{R_0 - r}, \quad p_r = \nu C/[2(1-\nu)\sqrt{R_0 - r}] \quad (3.3)$$

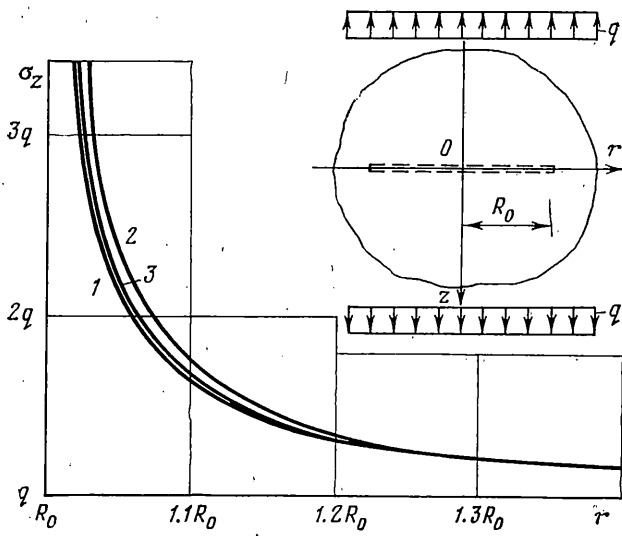
Здесь qa_z — нормальные к плоскости разреза диполи, p_r — распределенные в плоскости разреза радиальные силы.

На фиг. 5 приведены эпюры напряжений σ_z в плоскости разреза.

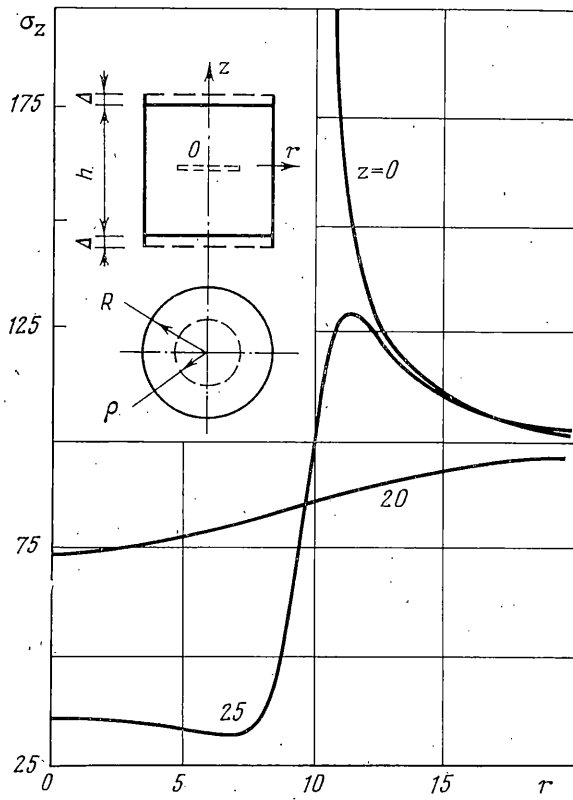
3.4. Упругий круговой цилиндр высотой h , радиуса R , ослабленный плоским круговым разрезом радиуса ρ , растягивается вдоль оси так, что торцевые сечения остаются плоскими: $w = \Delta = \text{const}$, $\tau_{z\theta} = \tau_{rz} = 0$ при $z = \pm h/2$. Боковые поверхности цилиндра и берега разреза свободны от на-



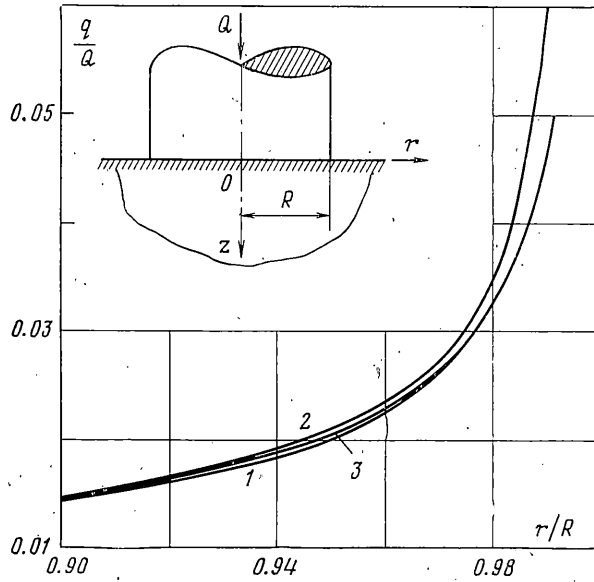
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

пряжений: $\tau_{rz}=\tau_{r\theta}=\sigma_z=0$ при $r=R$, $\sigma_z=\tau_{z\theta}=\tau_{rz}=0$ при $z=0$, $r<\rho$. Задача решена с учетом особенности напряжений у кромки разреза. При решении принималось $R=0.2$ м, $h=0.4$ м, $\rho=0.1$ м, $\nu=0.25$, $\Delta=1 \cdot 10^{-4}$ м.

Граничные условия удовлетворялись в точках на плоскости разреза и ввиду симметрии задачи в точках на одной половине цилиндра. На поверхности цилиндра компенсирующие нагрузки принимались в виде распределенных сил; на плоскости разреза — в виде обобщенных нормальных нагрузок. Плоскость разреза разбивалась на 11 кольцевых участков, плоскости торцов и половина высоты цилиндра — на 12 кольцевых участков. В пределах каждого участка искомая нагрузка аппроксимировалась линейной функцией. Для учета особенности напряжений в угловой линии разреза закон изменения компенсирующей нагрузки на последнем участке разреза был принят таким, как при решении задачи о круговом разрезе в пространстве. Результаты представлены на фиг. 6 (линейные размеры в см).

3.5. Круглый жесткий штамп с плоским основанием радиуса R вдавливается без трения в полупространство силой Q . Под штампом имеем $\tau_{rz}=\tau_{z\theta}=0$, $w=\text{const}$.

Поверхность контакта штампа и основания разбивалась на 60 кольцевых участков шириной $\Delta R=R/60$. На каждом i -м участке, кроме примыкающего к угловой линии, искомое давление q_i принималось равномерно распределенным. На первом от кромки штампа кольцевом участке закон изменения давления определяется особенностью напряжений вблизи угловой линии штампа $q=C/(R-r)^{1/2}$, где C — множитель, подлежащий определению. Значения давления отыскивались из системы линейных алгебраических уравнений, выражающих условия отсутствия взаимных вертикальных смещений средних точек соседних участков $w_i-w_{i+1}=0$ ($i=1, \dots, 59$), и условие равновесия штампа

$$\pi \Delta R \sum_{i=1}^{59} (r_i+r_{i-1}) q_i + 4\pi C \left(R - \frac{\Delta R}{3} \right) \sqrt{\Delta R} = Q$$

На фиг. 7 приведены эпюры давления под штампом.

Поступила 26 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я. Решение основных трехмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 2.
2. Cruse T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. Internat. J. Solid and Structures, 1969, vol. 5, p. 1259–1274.
3. Watson J. The analysis of three dimensional problems of elasticity by integral representation of displacement. In: Variational methods in engineering, vol. 11, Southampton, Univ. Press, 1973.
4. Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Зазовский А. Ф. Решение смешанных краевых задач прямым вариационным методом. В сб.: Численные методы механики сплошной среды, 1976, т. 7, № 5.
5. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Ж. Теория упругости. М., «Наука», 1975.
6. Александров А. Я., Зиновьев Б. М. Численное решение задач теории упругости для тел с разрезами. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
8. Снеддон И. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.