МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1980

УДК 517.937

# ОБ УПРАВЛЕНИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ МАХОВИКОВ

Е. Я. СМИРНОВ

*(Ленинград)*

Рассмотрена задача управления вращательным движением свободного твердого тела при помощи маховиков. Построены прикладываемые к маховикам управления непрерывного и релейного типов, обеспечивающие асимптотическую устойчивость наперед заданных угловых движений твердого тела и гарантированную область притяжения этих движений. Исследования проведены методом функций Ляпунова с привлечением параметров Родрига – Гамильтона. Полученные результаты опираются на работы [1, 2] и примыкают к тематике работы [3].

Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела (носителя) и установленных на нем $p(p\geqslant 3)$ управляющих маховиков. Обозначим через $O$ центр инерции рассматриваемой механической системы, через $O_{i_1i_2i_3}$ — жестко связанную с носителем систему координат с базисными ортами $\mathbf{i}_k'$, через $O_{j_1j_2j_3}$ — инерциальную систему координат с базисными ортами $\mathbf{j}_k'$, а через $O_{s_1s_2s_3}$ — опорную систему координат, базисные орты которой $\mathbf{s}_k'$, $k=1, 2, 3$, характеризуют направления на некоторые физические ориентиры. Все системы координат правые декартовые.

Назовем программным некоторое наперед заданное угловое движение носителя и будем характеризовать его системой координат $O_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$ с базисными ортами $\boldsymbol{\sigma}_k'$, обладающими следующими свойствами: в системе координат $O_{i_1i_2i_3}$ $\boldsymbol{\sigma}_k'=\boldsymbol{\sigma}_k(t)$, где $\boldsymbol{\sigma}_k(t)$ — вектор-столбец, составленный из проекций орта $\boldsymbol{\sigma}_k'$ на оси системы координат $O_{i_1i_2i_3}$; на программном движении тела $\boldsymbol{\sigma}_k'\equiv\mathbf{s}_k'$, $k=1, 2, 3$.

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega}_s'$ — векторы угловых скоростей систем координат соответственно $O_{i_1i_2i_3}$ и $O_{s_1s_2s_3}$ относительно инерциальной системы координат $O_{j_1j_2j_3}$, через $\boldsymbol{\omega}_\sigma'$ — вектор угловой скорости системы координат $O_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$ относительно системы координат $O_{i_1i_2i_3}$ и положим $\boldsymbol{\omega}_\Delta'=\boldsymbol{\omega}_s'-\boldsymbol{\omega}_\sigma'$. Заметим, что на программном движении тела $\boldsymbol{\omega}'=\boldsymbol{\omega}_\Delta'$. Обозначим через

$$S_\delta=\left\{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 : |\boldsymbol{\omega}'-\boldsymbol{\omega}_\Delta|\leqslant\delta_\omega, \quad \sum_{i=1}^{3}|\mathbf{s}_i'-\boldsymbol{\sigma}_i'|^2\leqslant\delta_s^2\right\}$$

— множество начальных состояний носителя, а через

$$S_\varepsilon=\left\{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 : |\boldsymbol{\omega}'-\boldsymbol{\omega}_\Delta'|\leqslant\varepsilon_\omega, \quad \sum_{i=1}^{3}|\mathbf{s}_i'-\boldsymbol{\sigma}_i'|^2\leqslant\varepsilon_s^2\right\}$$

— множество, характеризующее требуемую точность стабилизации программного движения, и рассмотрим следующую задачу: осуществить синтез прикладываемых к маховикам управлений таким образом, чтобы любые движения носителя, начинающиеся в множестве $S_\delta$, за ограниченное время попадали в множество $S_\varepsilon$ и в дальнейшем в нем оставались.

В выражении для $S_\delta$ и $S_\varepsilon$ величины $\delta_\omega$, $\delta_s$, $\varepsilon_\omega$, $\varepsilon_s$ — заданные положительные константы, а под нормой вектора понимается его евклидова норма.

Выпишем уравнения, описывающие изменения во времени рассматриваемой механической системы и ортов $\mathbf{s}_k'$, $\boldsymbol{\sigma}_k'$ в системе координат $O_{i_1i_2i_3}$, причем будем предполагать, что движение механической системы свободное. Как известно [4], эти уравнения имеют вид

$$\Theta\boldsymbol{\omega}^\cdot+K\mathbf{q}^\cdot+[\boldsymbol{\omega},\ \Theta\boldsymbol{\omega}+K\mathbf{q}]=0 \tag{1}$$

$$\mathbf{q}^\cdot+IK^T\boldsymbol{\omega}^\cdot=\mathbf{u}+\mathbf{r} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{s}_i^\cdot=[\boldsymbol{\omega}_s-\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{s}_i],\quad (\mathbf{s}_i,\ \mathbf{s}_j)\equiv\delta_{ij}\\ \boldsymbol{\sigma}_i^\cdot\equiv[\boldsymbol{\omega}_\sigma,\ \boldsymbol{\sigma}_i],\quad (\boldsymbol{\sigma}_i,\ \boldsymbol{\sigma}_j)\equiv\delta_{ij}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\Theta$ — постоянная в системе координат $O_{i_1i_2i_3}$ матрица тензора инерции механической системы; $\mathbf{s}_i$, $\boldsymbol{\sigma}_i$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_s$, $\boldsymbol{\omega}_\sigma$, $\boldsymbol{\omega}_\Delta$ — вектор-столбцы, составленные из проекций векторов $\mathbf{s}_i'$, $\boldsymbol{\sigma}_i'$, $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega}_s'$, $\boldsymbol{\omega}_\sigma'$, $\boldsymbol{\omega}_\Delta'$ на оси системы координат $O_{i_1i_2i_3}$;

$$\mathbf{q}=\|q_1,\ldots,q_p\|^T=\|I_1\varphi_1^\cdot,\ldots,I_p\varphi_p^\cdot\|^T,\qquad K=\|\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_p\|,\quad I=\operatorname{diag}\{I_1,\ldots,I_p\}$$

где $\mathbf{k}_j$, $I_j$, $\varphi_j$, $j=1,\ldots,p$ — соответственно орт оси вращения, осевой момент инерции и угол поворота относительно носителя $j$-го маховика; $\mathbf{u}=\|u_1,\ldots,u_p\|^T$, $\mathbf{r}=\|r_1,\ldots,r_p\|^T$, где $u_j$ — управление, прикладываемое к $j$-му маховику, $r_j$ — проекция на ось вращения момента сил реакции, приложенных к $j$-му маховику; $\delta_{ij}$ — символы Кронекера. При этом будем считать, что управляющие воздействия $u_j$ могут быть либо непрерывного, либо релейного типа, причем под релейными будем понимать управления, имеющие структуру

$$\begin{gathered}\mathbf{u}=M\operatorname{sign}\mathbf{v},\qquad M=\operatorname{diag}\{m_1,\ldots,m_p\}\quad \mathbf{v}=\|v_1,\ldots,v_p\|\\ \operatorname{sign}\mathbf{v}=\|\operatorname{sign}v_1,\ldots,\operatorname{sign}v_p\|^T,\end{gathered} \tag{4}$$

где $m_j$, $j=1,\ldots,p$ — максимальная величина управляющего воздействия $u_j$, $v_j$ — управляющий сигнал.

Управление $\mathbf{u}$ (непрерывного и релейного типа), решающее рассматриваемую задачу, будем называть стабилизирующим. При этом непрерывное управление будем обозначать через $\mathbf{u}^n$, а релейное — через $\mathbf{u}^r$.

Преобразуем системы (1), (2) и укажем множество непрерывных управлений $\mathbf{u}^n$ и релейных управлений $\mathbf{u}^r$, среди которых будем искать стабилизирующие управления.

Обозначим через $G=\|\mathbf{g}_1,\ \mathbf{g}_2,\ \mathbf{g}_3\|$ матрицу перехода от системы координат $O_{j_1j_2j_3}$ к системе координат $O_{i_1i_2i_3}$. Так как движение механической системы свободное, то ее момент количества движения постоянен в инерциальной системе координат, следовательно, в системе координат $O_{i_1i_2i_3}$ он имеет вид $\Theta\boldsymbol{\omega}+K\mathbf{q}=G\mathbf{h}$, где $\mathbf{h}=\|h_1,\ h_2,\ h_3\|^T$ — постоянный вектор-столбец. Исключая теперь $\mathbf{q}^\cdot$ из уравнения (1), а $\boldsymbol{\omega}^\cdot$ из уравнения (2), с учетом соотношения $\Theta\boldsymbol{\omega}+K\mathbf{q}=G\mathbf{h}$ для переменных $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{q}$ получим уравнения

$$F\boldsymbol{\omega}^\cdot+[\boldsymbol{\omega},\ G\mathbf{h}]+K(\mathbf{u}+\mathbf{r})=0 \tag{5}$$

$$\mathbf{q}^\cdot=IK^TF^{-1}[\boldsymbol{\omega},\ G\mathbf{h}]+(E_p+IK^TF^{-1}K)(\mathbf{u}+\mathbf{r}) \tag{6}$$

где $F=\Theta-KIK^T$, $E_p$ — единичная матрица $p$-го порядка.

Введем обозначения. Положим

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(\mathbf{s}_i-\boldsymbol{\sigma}_i,\ \mathbf{s}_j-\boldsymbol{\sigma}_j),\qquad a_{ij}=a_{ji}$$

$$\boldsymbol{\xi}=\sum_{i=1}^{3}[\operatorname{grad}_{\mathbf{s}_i} U,\ \mathbf{s}_i]=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}[\mathbf{s}_i,\boldsymbol{\sigma}_j],\qquad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_\Delta,\qquad \boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta}+bD_1\boldsymbol{\xi} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\varkappa}=D_2\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}+D_3\boldsymbol{\zeta}-F\boldsymbol{\omega}_\Delta^{\boldsymbol{\cdot}}-[\boldsymbol{\omega}_\Delta,\ G\mathbf{h}]$$

$$\mathbf{u}^n=K^T(KK^T)^{-1}\boldsymbol{\varkappa}-\mathbf{r} \tag{8}$$

$$\mathbf{u}^r=M\operatorname{sign}\mathbf{v},\qquad \mathbf{v}=K^T\boldsymbol{\zeta} \tag{9}$$

$$V=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{\eta},F\boldsymbol{\eta})+2U+2b(F\boldsymbol{\eta},D_1\boldsymbol{\xi})\}$$

$$W=(\boldsymbol{\eta},D_2\boldsymbol{\eta})+b(\boldsymbol{\xi},D_1\boldsymbol{\xi})+b(D_2\boldsymbol{\eta}+[\boldsymbol{\eta},G\mathbf{h}],D_1\boldsymbol{\xi})+$$

$$+b\sum_{i,j=1} a_{ij}(F\boldsymbol{\eta},D_1\{[[\boldsymbol{\eta},\mathbf{s}_i],\ \boldsymbol{\sigma}_j]+[[\mathbf{s}_i,\boldsymbol{\sigma}_j],\ \omega_\sigma]\})+(\boldsymbol{\zeta},D_3\boldsymbol{\zeta})$$

$$D_4=\left\|\begin{matrix} a_{22}+a_{33} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & a_{11}+a_{33} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & a_{11}+a_{22}\end{matrix}\right\|$$

$$h_0=|\mathbf{h}|,\qquad \omega_0=\sup_{0\leqslant t<+\infty}|\boldsymbol{\omega}_\sigma(t)|,\qquad b_1=(d_4|F|^{-1})^{1/2}(|D_1|\cdot|D_4|)^{-1}$$

$$b_2=4d_1d_2[4d_1(1+\sqrt{2})|F|\,|D_1|\,|D_4|+|D_1|^2(|D_2|+\omega_0|F|+h_0)^2]^{-1}$$

$$b_3=(8-\delta_s^2)(2\sqrt{2}|F|\,|D_1|\delta_\omega\delta_s)^{-1},\qquad b_0=\min\{b_1,\ b_2\},\qquad b_*=\min\{b_0,\ b_3\}$$

$$V_0={}^1/_2(|F|\delta_\omega^2+{}^1/_2|D_4|\delta_s^2+b\sqrt{2}|F|\,|D_1|\,|D_4|\delta_s\delta_\omega)$$

$$m_{0j}=\sup_{V\leqslant V_0,\ 0\leqslant t<+\infty}|u_j^n|\qquad (j=1,\dots,p)$$

Здесь $a_{ij}$, $b$ — числа, $D_k$ — постоянные матрицы третьего порядка, $d_k$ — наименьшее собственное число симметричной матрицы ${}^1/_2(D_k+D_k^T)$, под нормой матрицы понимается норма, согласованная с евклидовой нормой вектора, и предполагается, что орты осей вращения маховиков не компланарны, т. е. $\det(KK^T)>0$.

*Теорема*

1. Непрерывное управление $u^n$, определяемое соотношениями (8), (7), решает рассматриваемую задачу, если его параметры и параметры множества $S_\delta$ удовлетворяют условиям

$$d_k>0\quad (k=1,2,4),\qquad d_3\geqslant 0,\qquad 0<b<b_0,\qquad V_0<2d_4 \tag{10}$$

При этом любые решения системы (3), (5), замкнутой управлением (8), (7), начинающиеся в множестве $S_\delta$, асимптотически стремятся к программному движению носителя при $t\to+\infty$.

2. Если множество $S_\delta$ удовлетворяет условию

$$\delta_s<2\sqrt{2} \tag{11}$$

то стабилизирующие управления существуют. В частности, стабилизирующими являются управления (8), (7), у которых $a_{ij}=a\delta_{ij}$, а параметры $a$, $b$, $d_k$ удовлетворяют условиям

$$d_1>0,\quad d_2>0,\quad d_3\geqslant 0,\quad 0<b<b_*$$

$$a>|F|\delta_\omega^2(8-\delta_s^2-2b\sqrt{2}|F|\,|D_1|\delta_\omega\delta_s)^{-1}$$

3. Если непрерывное управление (8), (7) решает рассматриваемую задачу, то этим же свойством обладает и релейное управление (9), у которого параметры $m_j$ удовлетворяют неравенствам

$$m_j\geqslant m_{0j}\quad (j=1,\ldots,p) \tag{12}$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства соответствующих результатов работ [1, 5]. Система (3), (5) замыкается непрерывным управлением (8) и показывается, что на решениях полученной замкнутой системы функции $V$ и $W$ связаны между собой соотношением

$$V^\bullet=-W \tag{13}$$

Затем система (3), (5) замыкается релейным управлением (9) и показывается, что на решениях полученной замкнутой системы выполняется соотношение

$$V^\bullet=-W-(\mathbf{v},\ \mathbf{u}^r-\mathbf{u}^n) \tag{14}$$

где $u^n$ — управление (8), а $u^r$ — управление (9).

Затем с целью упрощения исследований вводятся параметры Родрига — Гамильтона $\lambda_0$, $\boldsymbol{\lambda}=\|\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\|^T$ [4], характеризующие взаимное расположение систем координат $O_{s_1s_2s_3}$, $O_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$. Поэтому система кинематических уравнений (3) заменяется системой

$$\boldsymbol{\lambda}^\bullet={}^1/_2\{\lambda_0\Sigma^T\boldsymbol{\eta}+[\boldsymbol{\lambda},\Sigma^T\boldsymbol{\eta}]\},\ \lambda_0^\bullet=-{}^1/_2(\boldsymbol{\lambda},\Sigma^T\boldsymbol{\eta}),\ \lambda_0^2+(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda})=1,$$

$$\Sigma=\|\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{\sigma}_3\|$$

а орты $\mathbf{s}_i$, множество $S_\delta$ и величины $U$, $\boldsymbol{\xi}$ из соотношений (7) записываются так:

$$\|\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2,\ \mathbf{s}_3\|=\Sigma(E_3-2\lambda_0\Lambda+2\Lambda^2)$$

$$\Lambda=\left\|\begin{matrix}0 & -\lambda_3 & \lambda_2\\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1\\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0\end{matrix}\right\|$$

где $E_3$ — единичная матрица третьего порядка

$$S_\delta=\left\{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\lambda}:|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_\Delta|\leqslant\delta_\omega,\ |\boldsymbol{\lambda}|\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{2}\,\delta_s\right\}$$

$$U=2(\boldsymbol{\lambda},\ D_4\boldsymbol{\lambda}),\qquad \boldsymbol{\xi}=2\Sigma\{\lambda_0D_4\boldsymbol{\lambda}+[D_4\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\lambda}]\}$$

После этого показывается, что при выполнении условий (10) функция $V$ определенно-положительна относительно $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\lambda}$, функция $W$ определенно-положительна относительно $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi}$ и определенно-положительна относительно $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\lambda}$, но при дополнительном условии $|\boldsymbol{\lambda}|<1$. В силу соотношения (13) отсюда вытекает, что программное движение носителя $\boldsymbol{\eta}=0$, $\boldsymbol{\lambda}=0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову, если к тому же выполняется неравенство $V_0<2d_4$, то любые решения системы (3), (5), замкнутой управлением (8), начинающиеся в множестве $S_\delta$, асимптотически стремятся к программному движению носителя, т. е. в этом случае управление (8) является стабилизирующим. Далее показывается, что при выполнении условия (11) стабилизирующие управления существуют, ибо всегда можно указать управления вида (8) (см. п. 2 теоремы), для которых выполняются условия (10).

Затем рассматривается соотношение (14) и показывается, что если в нем $\mathbf{u}^n$ — стабилизирующее управление, а $\mathbf{u}^r$ удовлетворяет соотношению (12), то оно также является стабилизирующим, ибо для него выполняется соотношение $V^{\cdot}\leqslant -W$.

*Замечание 1.* Как следует из теоремы, рассматриваемая задача разрешима, если множество начальных состояний $S_6$ удовлетворяет условию (11). Насколько же сильным является это ограничение?

Как известно [4], любые две системы координат $O_{s_1s_2s_3}$, $O_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}$ можно совместить друг с другом путем поворота вокруг некоторого направления на угол $\varphi$, $|\varphi|\leqslant\pi$. Условие (11) означает, что $\varphi$ должен удовлетворять неравенству $|\varphi|\leqslant\pi-\gamma$, где $\gamma$ — сколь угодно малое положительное число.

*Замечание 2.* По аналогии с работами [6, 7] можно рассмотреть случай, когда тензор инерции и векторы $\mathbf{h}$, $\mathbf{r}$ известны с погрешностями: $\Theta=\Theta_1+\Theta_2$, $h=h_1+h_2$, $r=r_1+r_2$, а компоненты релейного управления в отличие от (4) имеют структуру типа трехпозиционного неидеального реле — $u^r=Mw$. Здесь $\Theta_1$, $h_1$, $r_1$ известны точно, $\Theta_2$, $h_2$, $r_2$ — лишь в оценочном плане, а компоненты $w_i$ $(i=1,\ldots,p)$ вектора $w$ определяются соотношениями $|w_i(v_i)|\leqslant 1$, $w_i=\operatorname{sign} v_i$ при $|v_i|>l_i$, где $l_i$ — положительные числа, характеризующие неидеальность реле. Внутри же промежутка $[-l_i, l_i]$ функции $w_i(v_i)$, вообще говоря, могут быть неоднозначными и разрывными. Оказывается, что если в соотношениях (8), (9) величины $\Theta$, $h$, $r$, $M\operatorname{sign}\mathbf{v}$ заменить соответственно на $\Theta_1$, $h_1$, $r_1$ $Mw(v)$, то управления $u^n$ и $u^r$ будут стабилизирующими, если их параметры $d_j$ $m_i$ достаточно большие, а $l_i$ достаточно малые $(i=1,\ldots,p,\ j=1,\ldots,4)$. Отличие будет состоять лишь в том, что программное движение носителя уже не будет асимптотически устойчивым решением получающейся замкнутой системы уравнений (3), (5).

*Замечание 3.* По аналогии с работами [2, 8] можно рассмотреть задачу управления не только трехосной, но и одноосной ориентацией твердого тела. При этом все перечисленные выше результаты полностью переносятся и на случай одноосной ориентации. Здесь под трехосной ориентацией понимается ситуация, когда в инерциальном пространстве имеются три опорных направления: $O_{s_1}$, $O_{s_2}$, $O_{s_3}$, а под одноосной ориентацией — ситуация, когда в инерциальном пространстве имеется лишь одно опорное направление $O_{s_1}$.

Поступила 15 XII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов Е. Я.* К задаче управления трехосной ориентацией твердого тела. В сб.: Вопросы механики и процессов управления, вып. 2. Управление динамическими системами. Изд-во ЛГУ, 1978.
2. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. М., «Наука», 1975.
3. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М., «Наука», 1977.
4. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
5. *Смирнов Е. Я.* Об управлении вращательным движением твердого тела. Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 3.
6. *Смирнов Е. Я.* Управление вращательным движением твердого тела в условиях неопределенности. Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 5.
7. *Смирнов Е. Я.* Управление вращательным движением твердого тела. Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 12.
8. *Смирнов Е. Я.* Активное управление вращательным движением твердого тела. Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 3.