

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО КРЕНУ ПРИ ПОМОЩИ РОЛЛЕРОНОВ

В. Н. ОНИКИЙЧУК, А. М. ФОРМАЛЬСКИЙ

(Москва)

Выписаны уравнения движения летательного аппарата по крену с системой стабилизации, содержащей роллероны. При составлении уравнений не используются упрощающие предположения о равенстве шарнирного момента гироскопическому. Исследуется устойчивость системы при наличии вязкого и сухого трения в оси вращения элерона.

Одной из важных задач, возникающих при проектировании многих летательных аппаратов, является задача стабилизации аппарата по крену. Для некоторых классов аппаратов требуется поддержание угла крена неизменным, т. е. необходима жесткая стабилизация, для других ^[1, 2] — величина угла крена не играет роли, но требуется поддержание нулевой угловой скорости вращения по крену. Одной из простейших автоматических систем, решающих задачу поддержания нулевой угловой скорости летательного аппарата, является система, содержащая роллероны ^[1, 2]. На фиг. 1 показана принципиальная схема такой системы.

В элерон 1, расположенный на стабилизаторе 2, вмонтирован вращающийся вокруг собственной оси 3 ротор 4. Ось ротора перпендикулярна плоскости элерона. При возникновении угловой скорости вращения аппарата по крену возникает гироскопический момент, который отклоняет элерон. В результате действия на элерон набегающего потока воздуха 5 возникает шарнирный момент, противоположный гироскопическому. При этом появляется также момент относительно продольной оси аппарата 6, который при соответствующем отклонении элерона препятствует вращению аппарата. Отклонение элерона определяется «закруткой» ротора. На каждом из четырех крыльев (стабилизаторов) аппарата размещено по одному элерону и ротору так, как показано на фиг. 1.

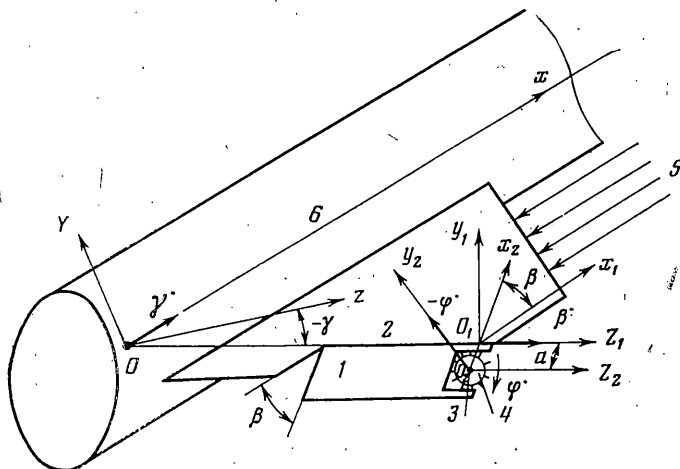
В ^[1, 2] анализ работы системы проводится на основе предположения о равенстве гироскопического момента шарнирному. Однако такое предположение допустимо лишь в случае, когда устойчивость системы обеспечена. При изучении же вопроса об устойчивости нужно отказаться от этого предположения, как это делается в данной работе. Проведенное ниже исследование позволяет оценить влияние на устойчивость системы различных факторов, в том числе трения в оси элерона.

Для составления дифференциальных уравнений движения введем три прямоугольные системы координат $OXYZ$, $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$ (фиг. 1), имеющие правую ориентацию.

Центром системы координат $OXYZ$ является точка O пересечения продольной оси симметрии корпуса аппарата (оси абсцисс OX) с перпендикулярной ей осью вращения элерона. Ось OX направлена к носу аппарата. Система $OXYZ$ инвариантна относительно вращения аппарата по крену, ее оси в соответствии с принятыми ниже допущениями неподвижно ориентированы в пространстве. Угол крена аппарата γ считается равным нулю, если ось OZ совпадает с осью вращения элерона.

Центром O_1 системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ является точка пересечения оси вращения элерона (оси O_1Z_1) с прямой, проходящей через центр масс ротора и перпендикулярной оси O_1Z_1 . Плоскость $O_1X_1Z_1$ лежит в плоскости стабилизатора. Ось O_1X_1 параллельна оси OX и совпадает с ней по направлению.

Центр масс ротора является центром O_2 координатной системы $O_2X_2Y_2Z_2$. Осью O_2X_2 служит прямая, проходящая через точки O_1 , O_2 . Угол отклонения элерона β — угол между осями O_1X_1 и O_2X_2 ; при $\beta=0$ эти оси совпадают, плоскость стабилизатора при этом совпадает с плоскостью элерона. Прямая, проходящая через точку O_2 и параллельная оси O_1Z_1 , служит осью O_2Z_2 . Направления осей O_1Z_1 и O_2Z_2 одинаковы. Ось O_2Y_2 направлена по оси вращения ротора, перпендикулярной плоскости элерона. Угол поворота ротора вокруг этой оси обозначим через φ .



Фиг. 1

1. При выводе уравнений движения будем считать, что скорость полета остается постоянной и направленной по продольной оси. Тем самым влияние тангажа и курса на крен не учитывается. Пусть масса аппарата, а значит, и момент инерции I_x относительно продольной оси OX в процессе полета не меняется. Будем также считать, что параметры всех четырех элеронов с роторами одинаковы, кинетические моменты всех четырех роторов постоянны и равны между собой.

Предположим, что элерон представляет прямоугольную однородную пластинку с массой M^0 и плотностью ρ , симметричную относительно плоскости $O_2X_2Z_2$. Обозначим через I_{x_2} , I_{y_2} и I_{z_1} моменты инерции элерона относительно осей O_2X_2 , O_2Y_2 и O_1Z_1 соответственно.

Ротор представляет однородное тело вращения с массой M . Будем предполагать, что $O_2X_2Z_2$ — его плоскость симметрии, при этом его эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. Пусть A — экваториальный момент инерции ротора, а C — момент инерции ротора относительно оси O_2Y_2 , тогда $H=C\dot{\varphi}$ — кинетический момент ротора.

Кинетическую энергию системы можно представить в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} [D\dot{\gamma}^2 + 4(H\dot{\varphi} + L\dot{\beta}^2 + N\dot{\gamma}^2 \sin^2 \beta + K\dot{\gamma}^2 \cos^2 \beta)] + 4H\dot{\gamma} \sin \beta + 4S\dot{\gamma} \dot{\beta} \cos \beta \quad (1.1)$$

Здесь

$$D = I_x + 4(M + M^0)e^2 + 8 \int_V \rho e z_2 dV, \quad L = A + Ma^2 + I_{z_1}$$

$$N = C + I_{y_2} + (M + M^0)a^2 - 2 \int_V \rho a x_2 dV$$

$$K = A + I_{x_2}, \quad S = 2Ma e + 2 \int_V \rho (a - x_2)(z_2 + e) dV$$

При этом dV — элемент объема элерона, $a = |O_1O_2|$, $e = |OO_1|$.

Интегралы

$$\int_V \rho e z_2 dV, \quad \int_V \rho a x_2 dV, \quad \int_V \rho (a - x_2)(z_2 + e) dV$$

характеризуют размещение ротора в элероне. Наличие в формуле (1.1) коэффициента 4 объясняется тем, что у аппарата четыре одинаковых ротора.

Если, например, считать, что элерон массы не имеет, то

$$D = I_x + 4Me^2, \quad L = A + Ma^2, \quad N = C, \quad K = A, \quad S = Mae$$

Пользуясь выражением (1.1) для кинетической энергии и уравнениями Лагранжа [3], можно написать полную систему уравнений движения. При условии $H = \text{const}$ эта система в линеаризованном виде записывается так:

$$\begin{aligned} I\gamma'' + 4S\beta'' + 4H\beta' &= Q_\gamma \quad (I = D + 4K) \\ 4S\gamma'' - 4H\gamma' + 4L\beta'' &= Q_\beta \end{aligned} \quad (1.2)$$

Заметим, что при выполнении некоторых условий (в частности, $a = e = 0$), при которых $S = 0$, уравнения (1.2) совпадают с уравнениями движения одноосного гироскопического стабилизатора [4, 5].

Обобщенные силы Q_γ и Q_β запишем в виде

$$Q_\gamma = -\sigma\gamma' - 4Fl\beta + M_\gamma, \quad Q_\beta = -4n\beta' - 4Fb\beta + 4M_\beta \quad (1.3)$$

Здесь σ — коэффициент аэродинамического демпфирования аппарата, n — коэффициент вязкого трения в оси вращения элерона, $F\beta$ — подъемная сила, действующая на элерон (эта сила считается линейной функцией угла атаки элерона β), $F > 0$ — постоянная величина (зависящая, в частности, от скоростного напора), $l > 0$ — расстояние от центра давления воздушного потока на элерон до оси симметрии аппарата (оси OX), в линейном приближении это расстояние от угла β не зависит, $Fb\beta$ — шарнирный момент, $b > 0$ — расстояние (постоянное) от центра давления воздушного потока на элерон до оси его вращения (оси O_1Z_1), M_γ — возмущающий момент по крену, M_β — момент сил сухого трения, влияние которого изучается в четвертом и пятом разделах.

В выражениях (1.3) не учитывается момент сил лобового сопротивления, возникающих при отклонении элерона, поскольку предполагается [4, 2], что его разложение начинается с членов порядка β^2 .

Система (1.2) с учетом выражений (1.3) принимает вид ($\gamma' = \Omega$):

$$I\Omega' + \sigma\Omega + 4S\beta'' + 4H\beta' + 4Fl\beta = M_\gamma \quad (1.4)$$

$$S\Omega' - H\Omega + L\beta'' + n\beta' + Fb\beta = M_\beta$$

Отметим, что с помощью преобразований

$$t = \frac{S}{H} \tau, \quad \Omega = \Omega^* \xi_1, \quad \beta = \beta^* \xi_2, \quad M_\gamma = \frac{IH\Omega^*}{S} m_\gamma,$$

$$M_\beta = H\Omega^* m_\beta \quad \left(\frac{\beta^*}{\Omega^*} = \frac{H}{Fb} \right)$$

систему (1.4) можно привести к безразмерному виду

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\tau} + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} + \alpha_2 \frac{d\xi_2}{d\tau} + \alpha_3 \xi_2 &= m_\gamma \\ \frac{d\xi_1}{d\tau} - \xi_1 + \alpha_4 \frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} + \alpha_5 \frac{d\xi_2}{d\tau} + \xi_2 &= m_\beta \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\sigma S}{IH}, \quad \alpha_2 = \frac{4H^2}{IFb}, \quad \alpha_3 = \frac{4Sl}{Ib}, \quad \alpha_4 = \frac{LH^2}{S^2 Fb}, \quad \alpha_5 = \frac{nH}{SFb}$$

Уравнения (1.5) не используются в проводимых ниже исследованиях, однако они могут быть полезны в других исследованиях.

2. Проведем анализ устойчивости системы (1.4) ($M_\gamma = M_\beta = 0$) по отношению к переменным Ω , β , β^* (γ — циклическая переменная). Соответствующее характеристическое уравнение системы (1.4) имеет вид

$$\begin{aligned} (IL - 4S^2)\lambda^3 + (In + L\sigma)\lambda^2 + \\ + (IFb + \sigma n + 4H^2 - 4FlS)\lambda + F(b\sigma + 4lH) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Коэффициент при λ^3 в уравнении (2.1) положителен

$$IL - 4S^2 > 0 \quad (2.2)$$

Это следует из выражений для I , L , S . Кроме того, неравенство (2.2) вытекает из положительной определенности функции (1.1). Действительно, при $\varphi = 0$, $\beta = 0$ кинетическая энергия (1.1) становится квадратичной формой величин γ^* , β^* . Одно из условий Сильвестра положительной определенности этой формы сводится к неравенству (2.2).

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы (1.4) является одновременное выполнение следующих неравенств Рауса — Гурвица [6]:

$$In + L\sigma > 0 \quad (2.3)$$

$$F(b\sigma + 4lH) > 0 \quad (2.4)$$

$$(In + L\sigma)(IFb + \sigma n + 4H^2 - 4FlS) - F(IL - 4S^2)(b\sigma + 4lH) > 0 \quad (2.5)$$

Поскольку $I > 0$, $L > 0$, $n \geq 0$, $\sigma \geq 0$, постольку условие (2.3) выполняется при $n > 0$ или $\sigma > 0$.

При $H < -b\sigma/4l$ условие (2.4) нарушается. При $H > 0$ оно выполняется, так как $b\sigma/4l \geq 0$. В дальнейшем будем считать, что имеет место неравенство $H > 0$. Для этого нужно, чтобы ротор вращался, как показано на фиг. 1.

Неравенство (2.5) представим в следующем виде:

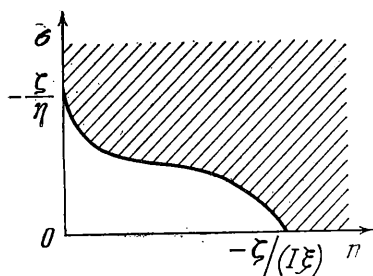
$$(In + L\sigma)\sigma n + I\xi n + \eta\sigma + \zeta > 0 \quad (2.6)$$

$$\xi = F(Ib - 4Sl) + 4H^2, \quad \eta = 4[LH^2 + FS(Sb - Ll)]$$

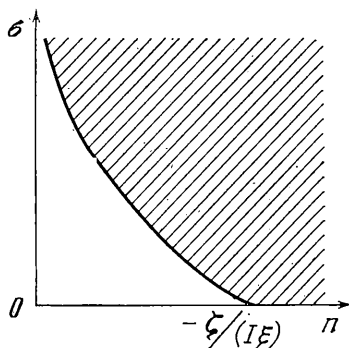
$$\zeta = -4HFl(IL - 4S^2)$$

Из неравенств (2.2) и $H > 0$ следует, что $\zeta < 0$. Будем считать, что $\xi > 0$. Что касается величины η , то рассмотрим случаи, когда $\eta > 0$ и $\eta \leq 0$.

При $\eta > 0$ область решений неравенства (2.6) в первой четверти ($\sigma \geq 0$, $n \geq 0$) плоскости σ , n показана (заштрихована) на фиг. 2. Из рассмотрения фиг. 2 следует, в частности, что при малой величине собственного демпфирования σ для устойчивости системы необходимо наличие вязкого трения в оси вращения элерона.



Фиг. 2



Фиг. 3

При $\eta \leq 0$ область решений неравенства (2.6) в плоскости σ, π показана (заштрихована) на фиг. 3. Граница этой области асимптотически приближается к оси σ . Из рассмотрения фиг. 3 следует, что при любой величине собственного демпфирования σ для устойчивости системы необходимо наличие вязкого трения в оси вращения элеронов.

Из рассмотрения неравенства (2.5) следует, что при больших величинах расстояния l от оси симметрии аппарата до центра давления элерона система (1.4) становится неустойчивой.

Левая часть неравенства (2.5) представляет относительно величины H полином $P(H)$ второй степени. Коэффициент при H^2 полинома $P(H)$ в силу неравенства (2.3) положителен, поэтому условия устойчивости не накладывают ограничений сверху на величину кинетического момента H . Вычисляя нули H_1 и H_2 полинома $P(H)$, в каждом конкретном случае можно исключить значения H , при которых нарушается устойчивость. Если, например, нули — действительные числа и $0 < H_1 < H_2$, то устойчивость системы нарушается при $H_1 < H < H_2$.

При наличии постоянного возмущающего момента M_τ ($M_\beta = 0$) имеют место следующие установившиеся значения угловой скорости Ω и угла β , которые получаются с помощью уравнений (1.4):

$$\Omega = \frac{bM_\tau}{b\sigma + 4lH}, \quad \beta = \frac{HM_\tau}{F(b\sigma + 4lH)} \quad (2.7)$$

Из рассмотрения первой формулы (2.7) следует, что установившееся значение Ω тем меньше, чем больше величина σ собственного демпфирования, кинетический момент H и расстояние l , характеризующее размах крыльев аппарата. Таким образом, собственное демпфирование и кинетический момент влияют на установившуюся угловую скорость одинаково.

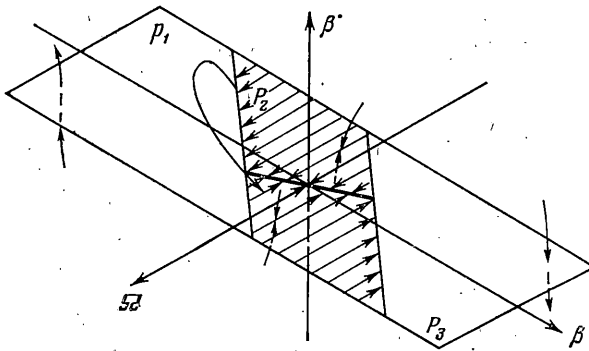
Установившееся значение Ω тем меньше, чем меньше величина b , т. е. чем ближе центр давления элерона к его оси вращения.

3. Рассмотрим систему стабилизации с учетом момента M_β сил сухого трения в оси вращения элерона.

Систему (1.4) представим в следующем виде:

$$(IL - 4S^2) \frac{d\Omega}{dt} = -(L\sigma + 4SH)\Omega + 4F(Sb - Ll)\beta + \\ + 4(Sn - LH)\beta' + LM_\tau - 4SM_\beta, \quad d\beta/dt = \beta' \quad (3.1)$$

$$(IL - 4S^2) \frac{d\beta'}{dt} = (S\sigma + IH)\Omega - F(Ib - 4Sl)\beta - (In - 4SH)\beta' - SM_\tau + IM_\beta$$



Фиг. 4

Выражение для момента M_β сил сухого трения имеет вид

$$\begin{aligned}
 M_\beta &= -M_{\beta_0} \text{ при } \beta^* > 0 \text{ или при } \beta^* = 0 \\
 SM_\tau - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta &\leq -IM_{\beta_0} \\
 M_\beta &= \frac{1}{I} [SM_\tau - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta] \text{ при } \beta^* = 0 \\
 |SM_\tau - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta| &\leq IM_{\beta_0} \\
 M_\beta &= M_{\beta_0} \text{ при } \beta^* < 0 \text{ или при } \beta^* = 0 \\
 SM_\tau - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta &\geq IM_{\beta_0}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Соотношение (3.2) в случае $\beta^* = 0$ легко получается из последнего уравнения системы (3.1) при условии, что момент сил сухого трения в этом случае равен сумме моментов всех сил относительно оси элерона, если эта сумма по абсолютной величине не превосходит порогового значения M_{β_0} . Если абсолютное значение суммы превосходит величину M_{β_0} , то момент сил сухого трения «выходит» на порог.

В трехмерном фазовом пространстве Ω, β, β^* множество состояний равновесия (зона застоя) представляет собой отрезок, который можно описать в параметрическом виде (v — параметр) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \frac{bM_\tau - 4lv}{b\sigma + 4lH}, & \beta &= \frac{HM_\tau + \sigma v}{F(b\sigma + 4lH)} \\
 \beta^* &= 0 \quad (-M_{\beta_0} \leq v \leq M_{\beta_0})
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Зона застоя (3.3) при $M_\tau = 0$ показана в виде отрезка на фиг. 4. При выводе формул (3.3) и всюду далее предполагается, что $M_\tau = \text{const}$. При $v = 0$ первые две формулы (3.3) совпадают с формулами (2.7). Концы отрезка (3.3) при $M_\tau = 0$ соответствуют вращению аппарата с угловой скоростью $\Omega = \pm 4lM_{\beta_0} / (b\sigma + 4lH)$.

Если силы сухого трения велики, т. е. велико значение M_{β_0} , то система стабилизации, допускающая такое движение, не выполняет своей функции.

Обозначим через P_1, P_2, P_3 следующие множества координатной плоскости $\beta^* = 0$:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \{\Omega, \beta: SM_\tau - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta < -IM_{\beta_0}\} \\
 P_2 &= \{\Omega, \beta: |SM_\tau - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta| \leq IM_{\beta_0}\} \\
 P_3 &= \{\Omega, \beta: SM_\tau - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta > IM_{\beta_0}\}
 \end{aligned}$$

Эти множества при $M_7=0$ показаны на фиг. 4 в предположении, что $Ib-4Sl>0$. В дальнейшем, однако, это предположение нигде не фигурирует.

Из рассмотрения последнего уравнения системы (3.1) при учете условия (2.2) вытекает, что в точках $(\Omega, \beta) \in P_1$ имеет место неравенство $d\beta^*/dt > 0$. Таким образом, фазовые траектории системы пересекают полуплоскость P_1 , переходя из полупространства $\beta^* < 0$ в полупространство $\beta^* > 0$ (фиг. 4).

В точках $(\Omega, \beta) \in P_2$ имеет место неравенство $d\beta^*/dt < 0$. Следовательно, фазовые траектории пересекают полуплоскость P_2 , переходя из полупространства $\beta^* > 0$ в полупространство $\beta^* < 0$.

Множество внутренних точек «пластинки» P_2

$$\beta^* = 0, \quad |SM_7 - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta| < IM_{\beta_0} \quad (3.4)$$

является притягивающим (фиг. 4), поскольку «снизу» от него имеет место неравенство $d\beta^*/dt > 0$, а «сверху» — неравенство $d\beta^*/dt < 0$. После попадания на множество (3.4) система в течение конечного либо бесконечного времени остается на нем. При движении по «полосе» (3.4) $\beta = \text{const}$. Следовательно, «пластинка» P_2 состоит целиком из фазовых траекторий, которые представляют прямые линии, параллельные оси Ω . Эти траектории соответствуют скользким движениям системы.

Если система попадает на множество P_2 , то она за конечное время либо приходит в зону застоя (3.3), либо выходит на границу множества P_2 (фиг. 4). При выходе на границу система попадает на полупрямую

$$SM_7 - (S\sigma + IH)\Omega + F(Ib - 4Sl)\beta = -IM_{\beta_0} \quad (3.5)$$

$$\beta^* < \frac{HM_7 - \sigma M_{\beta_0}}{F(b\sigma + 4IH)}, \quad \beta^* = 0$$

либо на полупрямую, симметричную ей относительно центра множества P_2 . С полупрямой (3.5) система «уходит» в полупространство $\beta^* > 0$.

Заметим, что фазовый портрет, показанный на фиг. 4, аналогичен фазовому портрету некорректируемого гиросtabilизатора с сухим трением в оси прецессии [7, 8].

4. Исследуем вопрос об устойчивости системы (3.1), (3.2), т. е. вопрос об асимптотической устойчивости в малом множества состояний равновесия (3.3).

Заметим прежде всего следующее. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что всякое множество точек, лежащих внутри отрезка (3.3), можно заключить в такую окрестность, из всех точек которой система за конечное время попадает на отрезок (3.3). Поэтому вопрос об устойчивости в малом всего отрезка (3.3) сводится к вопросу о возможности построения окрестности, охватывающей не только внутренние точки отрезка (3.3), но также и его концевые точки [8]. Причем из всех точек этой окрестности система должна асимптотически приближаться к отрезку (3.3).

Будем рассматривать случай, когда один из корней уравнения (2.1) является действительным и отрицательным, а два других — комплексными $\lambda_1 = -\vartheta$, $\lambda_2, \lambda_3 = \rho \pm i\omega$.

Если начальное состояние системы (3.1) принадлежит полупрямой (3.5), то

$$\Delta\beta(t) = \frac{\Delta\beta(0)}{\omega^2 + (\vartheta + \rho)^2} \left[(\rho^2 + \omega^2) e^{-\vartheta t} + \vartheta(\vartheta + 2\rho) e^{\vartheta t} \cos \omega t + \right. \\ \left. + \frac{\vartheta}{\omega} (\omega^2 - \rho^2 - \vartheta\rho) e^{\vartheta t} \sin \omega t \right] \quad (4.1)$$

$$\Delta\beta(t) = \beta(t) - \frac{HM_T - \sigma M_{\beta 0}}{F(b\sigma + 4lH)}$$

$$\beta^*(t) = -\Delta\beta(0) \frac{\vartheta(\rho^2 + \omega^2)}{\omega^2 + (\vartheta + \rho)^2} \left[e^{-\vartheta t} - e^{\rho t} \cos \omega t + \frac{\vartheta + \rho}{\omega} e^{\rho t} \sin \omega t \right] \quad (4.2)$$

Выражения, аналогичные (4.1), (4.2), получены в [8, 9]; подобные выражения содержатся также в [10].

Если траектория, начинающаяся с полупрямой (3.5), при некотором $t=t_1$ снова попадет на плоскость $\beta^*=0$ (фиг. 4), то, как видно из формулы (4.2), $t_1=u_1/\omega$, где $u_1=u_1(\chi_1)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$e^{\chi_1 u} - \cos u - \chi_1 \sin u = 0 \quad (\chi_1 = (\vartheta + \rho)/\omega) \quad (4.3)$$

Если $\chi_1 > 0$, то уравнение (4.3) имеет положительные корни, при этом траектории, начинающиеся с полупрямой (3.5), попадают на плоскость $\beta^*=0$. Значение $\Delta\beta(t_1)$, как следует из соотношений (4.1), (4.3), определяется выражением

$$\Delta\beta(t_1) = \Delta\beta(0) e^{\chi_2 u_1} (\cos u_1 - \chi_2 \sin u_1) \quad (\chi_2 = \rho/\omega, \chi_2 < \chi_1) \quad (4.4)$$

Из второго уравнения системы (3.1), а также из соотношений (4.3), (4.4) видно, что $\Delta\beta(t_1) > \Delta\beta(0)$. Допустим сначала, что

$$k(u_1) = e^{\chi_2 u_1} (\cos u_1 - \chi_2 \sin u_1) \leq 0 \quad (4.5)$$

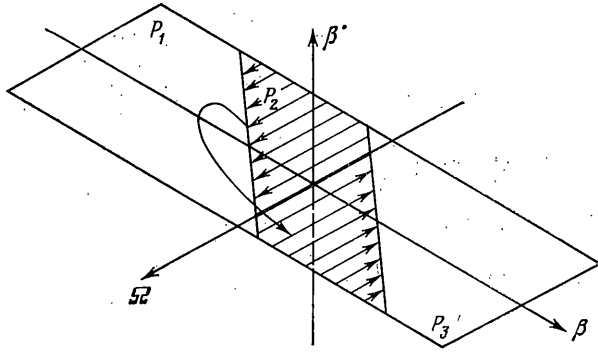
В случае (4.5) при достаточно малом значении $\Delta\beta(0)$ система в момент $t=t_1$ попадает на пластинку P_2 и затем за конечное время на отрезок (3.3). Если же $k(u_1) > 0$, то при достаточно малом значении $\Delta\beta(0)$ система попадает на пластинку P_2 , затем снова на полупрямую (3.5), но уже ближе к отрезку (3.3), затем снова на пластинку P_2 и т. д. При таком движении система за бесконечное время приходит в конечную точку отрезка (3.3), соответствующую значению $v = -M_{\beta 0}$.

Пользуясь сказанным выше, нетрудно показать, что концевые точки, а значит, и весь отрезок (3.3) можно заключить в такие окрестности, из которых система асимптотически приходит на отрезок (3.3).

В разобранном выше случае $\chi_1 \geq 0$ допускается, чтобы величина ρ была положительной. Это может быть тогда, когда все коэффициенты характеристического уравнения (2.1) положительны, а условие (2.5) нарушается. В самом деле, при этом в соответствии с критерием Рауса — Гурвица число корней с положительной действительной частью равно двум и они в соответствии с правилом Декарта [6] не могут быть вещественными. Значит, при этом $\lambda_1 = -\vartheta < 0$, $\rho > 0$. Неравенство (2.5) может нарушаться, например, при малых коэффициентах собственного демпфирования аппарата σ и вязкого трения в оси элерона n (фиг. 2, 3).

При $\rho > 0$ отрезок (3.3), будучи устойчивым в малом, никогда не будет устойчивым в целом. Для оценки его области притяжения сверху можно, например, произвести построение области управляемости [8].

Допустим, что $\chi_1 < 0$. Нетрудно показать [8], что в этом случае уравнение (3.3) не имеет положительных корней, значит траектории системы, начинающиеся с полупрямой (3.5), остаются в течение всего времени в полупространстве $\beta^* > 0$, при этом $M_\beta = M_{\beta 0}$. По предположению, $\vartheta > 0$, поэтому из неравенства $\chi_1 < 0$ вытекает неравенство $\rho < -\vartheta < 0$. Следовательно, траектории, начинающиеся с полупрямой (3.5), оканчиваются в граничной точке отрезка (3.3) ($v = -M_{\beta 0}$). Двигаясь по этим траекториям, система асимптотически приближается к указанной концевой точке отрезка (3.3). Пользуясь этим, можно при помощи несложных рассуждений доказать,



Фиг. 5

что множество (3.3) состояний равновесия в случае $\chi_1 < 0$ асимптотически устойчиво в малом.

Таким образом, при условии $\vartheta > 0$ рассматриваемая система стабилизации с сухим трением в оси элерона всегда устойчива.

В рассуждениях, проводимых выше, в случае $\chi_1 \geq 0$ существенно использовалось то обстоятельство, что отрезок (3.3) не параллелен оси Ω . Если $\sigma = 0$, то этот отрезок параллелен оси Ω . Фазовый портрет системы (3.1), (3.2) при этом меняется (фиг. 5; $M_1 = 0$). Для асимптотической устойчивости (случай $\chi_1 \geq 0$) отрезка (3.3) при $\sigma = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $\Delta\beta(t_1) < -\Delta\beta(0)$, т. е. чтобы $k(u_1) > -1$. Уравнение границы области устойчивости $k(u_1) = -1$ можно записать в виде

$$e^{-\chi_2 u_1(\chi_1)} + \cos u_1(\chi_1) - \chi_2 \sin u_1(\chi_1) = 0 \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) описывает границу области устойчивости на плоскости безразмерных параметров χ_1, χ_2 . Эта область построена в [8, 9] на плоскости параметров χ_1, χ_2 , а также на плоскости безразмерных параметров $\vartheta/\omega, \rho/\omega$.

Заметим, что при $\rho < 0$ можно было бы исследовать устойчивость зоны застоя не только в малом, но и в целом. Это можно было бы сделать, например, методом точечных отображений или методами, изложенными в [11]. Однако полезность вывода об устойчивости в целом в данной задаче, по-видимому, ограничена, поскольку изучаемые уравнения получены линеаризацией точных уравнений движения и, следовательно, справедливы лишь в ограниченной области фазового пространства.

Отметим в заключение следующее интересное обстоятельство. В [7-10, 12] и в данной работе методом точечных отображений исследуется устойчивость трех различных механических систем (третьего порядка) с сухим трением: центробежного регулятора скорости [10], одноосного силового гиросtabilизатора [7-9, 12] и системы стабилизаций летательного аппарата. Во всех трех задачах фазовые портреты, промежуточные соотношения вида (4.1) — (4.6) и окончательные результаты исследования оказываются аналогичными.

Поступила 22 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев А. А., Карabanov В. А. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами, М., «Машиностроение», 1965.
2. Сягловуз В. К. Динамика пространственного движения управляемых ракет. М., «Машиностроение», 1969.

3. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2, М., Физматгиз, 1960.
 4. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
 5. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М., «Наука», 1975.
 6. *Корн Г. А., Корн Т. М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
 7. *Коган Н. Я.* Об устойчивости одноосного гиросtabilизатора при наличии сухого трения в оси прецессии. Изв. вузов. Приборостроение, 1968, т. 11, № 12.
 8. *Формальский А. М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М., «Наука», 1974.
 9. *Формальский А. М.* Устойчивость силового гиросtabilизатора с сухим трением. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
 10. *Андронов А. А., Майер А. Г.* Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. I, II. Автоматика и телемеханика, 1947, т. 8, № 5; 1953, т. 14, № 5.
 11. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., «Наука», 1978.
 12. *Коган Н. Я.* Об устойчивости одноосного гиросtabilизатора при наличии сухого трения в оси стабилизации. Изв. вузов. Приборостроение, 1969, т. 12, № 3.
-