

метода построен на использовании матричной зависимости между действующей нагрузкой и приращениями перемещений. Это позволило в рамках одномерной задачи избежать построения общей матрицы жесткости и ее обращения, что требуется при использовании метода конечных элементов. При решении предложенным методом одномерных задач необходимая оперативная память ЭВМ не зависит от числа конечных элементов, тогда как в методе конечных элементов она возрастает пропорционально этому числу. Метод не приводит к вычислению малой разности близких величин при уменьшении шага вычислений и практически имеет точность аналитического решения (если такое существует) в широком диапазоне изменения числа конечных элементов.

УДК 531/534:061.6

## МОСКОВСКИЙ АВТОМЕХАНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ СЕМИНАРЫ

Семинар по механике твердого деформируемого тела  
под руководством Э. И. Григолюка

15 II 1979. И. Б. Богоряд (Томск) *Исследования по динамике реальной жидкости, взаимодействующей с твердым телом и имеющей свободную поверхность.*

Движение ограниченного объекта несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса. На свободной поверхности заданы условия отсутствия касательных напряжений и условие равенства нормального напряжения силам капиллярного давления. Для улучшения аппроксимации решения вблизи твердой границы и для согласования теоретических и экспериментальных данных вводится модель течения жидкости в окрестности линии трехфазного контакта (жидкость – твердая граница – газ), в соответствии с которой граничное условие для касательной составляющей сносится с твердой стенки внутрь жидкости на толщину пристеночной пленки.

С единых позиций вариационного принципа Лагранжа формулируются вариационные, вариационно-разностные и разностные схемы решения задачи о движении жидкости со свободной поверхностью с учетом ее реальных свойств и нелинейного характера движения. Для случая идеальной жидкости проводится сравнение функционалов по Лагранжу, Гамильтону, Бейтмену.

Излагаются алгоритмы решения конкретных задач, построенные на основе вариационных, разностных и комбинации вариационных и разностных методов. При этом не накладываются ограничения на порядок малости движения жидкости, геометрию твердых границ, величину вязкости жидкости. Обсуждаются результаты решения на ЭВМ следующих задач: движение в безграничной идеальной жидкости упругого стержня переменного поперечного сечения; малые гравитационные колебания идеальной жидкости в сферической и наклонной цилиндрической с крышкой полостях; осесимметричные нелинейные колебания идеальной жидкости в сферической и цилиндрической полостях с учетом сил капиллярного давления и переменности поля массовых сил; малые колебания вязкой жидкости в прямоугольном канале и прямом круговом цилиндре; малые колебания вязкой жидкости, содержащей пузырь с изотермическим газом и взаимодействующей с упругим элементом; нелинейные колебания вязкой жидкости в прямоугольном канале с крышкой.

22 II 1979. В. В. Адичев (Новосибирск) *Теоретическое и экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния оболочек взрывных камер.*

Изучается задача о вынужденных колебаниях цилиндрической оболочки конечной длины под действием осесимметричной нагрузки взрывного типа при различных краевых условиях (шарнир, заделка). Влияние дниц не учитывается. Формальные решения построены методом разложения в ряды по собственным функциям. На основе анализа решений показано, что оболочку необходимо рассматривать как систему с несколькими степенями свободы. Найден зависимости этого числа от конструктивных параметров. Выделение главных форм колебаний позволило осуществить предельный переход к мгновенному нагружению и получить упрощенные расчетные формулы, пригодные для инженерных расчетов.

Решение, построенное для оболочки с защемленными краями, включает в себя краевой эффект при колебаниях. Показано, что учет изгибных деформаций не только необходимо, но они являются определяющими при расчете на малоцикловую уста-

лостную прочность. На моделях взрывных камер и реальных камерах проведены эксперименты. Причем в модельных экспериментах были обеспечены краевые условия шарнирного опирания и защемления.

Подтверждена правомерность аппроксимации оболочек системами с конечным числом степеней свободы. Для осесимметричных случаев расчеты качественно согласуются с результатами экспериментов.

1 III 1979. Л. М. Соков (Москва) *Осесимметричное нелинейное поведение оболочек вращения.*

Рассматривается осесимметричное нелинейное поведение упругих и неупругих оболочек. Используется простейший вариант геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении. Учет физической нелинейности осуществляется в рамках деформационной теории пластичности А. А. Ильюшина. Разрешающая система уравнений, описывающих поведение оболочки, сводится к краевой задаче для системы шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения нелинейных уравнений используется процесс линеаризации Ньютона. Численная устойчивость достигается применением метода ортогональной прогонки С. К. Годунова. Критическое и закритическое состояния определяются путем введения дополнительного параметра и соответствующего ему дополнительного уравнения.

Использование параметризации решения и введение дополнительного уравнения позволяют свести исходную задачу к четырем алгебраическим уравнениям относительно трех неизвестных параметров и параметра нагрузки, который перестает быть независимым. Такой подход удобен при решении задачи как в окрестности предельных точек, так и в окрестности точек бифуркации. Особенности относящиеся к получению решения при наличии точек бифуркации, исследуются на примере задачи о торцевом сжатии круговой пластины и задачи о деформировании тороидальных сегментов. Предельные точки иллюстрируются задачей о прощелкивании сферического купола. Затронуты вопросы, связанные с влиянием типа нелинейных уравнений на критическое поведение оболочки. Проводится сравнение бифуркационных нагрузок для тороидального сегмента, полученных на основе квадратичного варианта нелинейной теории и более общего варианта теории, учитывающей конечность углов поворота. Неупругое поведение иллюстрируется задачами об осевом сжатии цилиндрической оболочки, о деформировании сферического купола, о торцевом сжатии круглой пластины в закритической области. Во всех этих случаях происходила потеря устойчивости через предельную точку.

15 III 1979. А. И. Коновалова (Москва) *Некоторые задачи динамики и прочности сферических резервуаров для хранения сжиженных газов.*

Рассматривается действие акустической ударной волны на одностенные и двухстенные резервуары. Задача динамики сводится к исследованию колебаний жестких сфер на независимых упругих опорах. Одна из сфер содержит жидкий продукт. Пюльс между сферами изолируется. Колебания конструкции с учетом особенностей поведения продукта описываются системой трех интегродифференциальных уравнений, для решения которой при линейно-упругой изоляции используется преобразование Лапласа. При нелинейно-упругой изоляции исходная система уравнений интегрируется численно методом Рунге — Кутты. Алгоритм решения реализуется программой на языке АЛГОЛ-60 для ЭВМ БЭСМ-4М.

По найденным параметрам движения определяются приведенные нагрузки: внешнее давление, инерционные и гидродинамические силы и реакции опорных колонн. Нагрузки аппроксимируются конечным числом членов ряда Фурье. Это позволяет воспользоваться полуаналитическим вариантом метода конечных элементов при решении задачи прочности.

Выполненные исследования позволили провести анализ динамики и прочности элементов конструкции крупногабаритных промышленных резервуаров с креплением колонн к оболочке через жесткие накладки и жесткий опорный пояс при действии плоских слабых ударных волн. Анализ напряженно-деформированного состояния позволяет отметить, что наибольшие напряжения возникают в узлах крепления оболочки с колоннами. Показано, что схема резервуара с опорным поясом приводит к существенному снижению напряжений.

22 III 1979. В. П. Мальцев, Ю. В. Ушаков (Москва) *Исследование напряженно-деформированного состояния подкрепленных многосвязанных призматических конструкций.*

Исследуется напряженно-деформированное состояние многосвязанных призматических конструкций, состоящих из набора цилиндрических оболочечных элементов

с произвольной формой направляющей, соединенных между собой непосредственно или с помощью стрингеров. Оболочечные элементы могут быть изотропными, ортотропными, конструктивно-ортотропными или многослойными. При этом считается справедливой гипотеза Кирхгофа — Лява. Стрингеры могут быть произвольного поперечного сечения, но подчиняющимися гипотезе плоских сечений. Как оболочечные, так и стержневые элементы предполагаются произвольным образом нагруженными и нагретыми.

В случае шарнирно-опертых краев нагрузка и все параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние, разлагаются в ряды Фурье по координате, направленной вдоль образующей цилиндрических элементов. Для других граничных условий используется метод прямых в направлении образующей. Вдоль направляющей производится численное интегрирование. Для анализа используется метод перемещений. Причем матрица жесткости оболочечных элементов строится с использованием метода ортогональной прогонки С. К. Годунова, а матрица жесткости стрингеров устанавливается аналитически. Приведены примеры использования программ для ЕС ЭВМ по расчету напряженно-деформированного состояния призматических конструкций при различных вариантах нагрузки и при нагреве.

29 III 1979. Ю. П. Петров (Харьков) *Некоторые приближенные методы определения напряженно-деформированного состояния анизотропных, ортотропных, изотропных оболочек, пластин и составных тонкостенных конструкций.*

Дифференциально-разностный метод (метод прямых) обобщается на широкий класс краевых задач линейной теории анизотропных, ортотропных, изотропных гладких и дискретно-подкрепленных ребрами жесткости одного направления оболочек и пластин различной формы в плане. Разработаны теоретические основы построения алгоритма расчета разветвленных составных тонкостенных конструкций из элементов в виде произвольных оболочек пластин и стержней. Задача решается в перемещениях.

Сочленение элементов в заданную конструкцию осуществляется при помощи итерационного процесса, который является модификацией альтернирующего метода Шварца. Методами функционального анализа показывается, что оператор, преобразующий предыдущее приближение в последующее, является отрицательным, самосопряженным и ограниченным.

6 IV 1979. Я. А. Метсавээр (Таллин) *Об эхо-сигналах от упругих оболочек в жидкости.*

Исследуются эхо-сигналы от упругих оболочек с целью разработки алгоритмов для дистанционного определения параметров оболочки по эхо-сигналу. Эхо-сигналы от исследуемых классов оболочек представляются в виде отдельных эхо-импульсов; далее выбираются параметры эхо-сигнала и путем вариации параметров оболочек в программах для вычисления эхо-сигнала определяются зависимости параметров эхо-сигнала от параметров оболочки. Исследовались эхо-сигналы от пустых и заполненных жидкостью сферических и круговых цилиндрических оболочек и от цилиндрических оболочек произвольного гладкого поперечного сечения.

19 IV 1979. Я. Я. Докторов, В. Н. Кузнецов, В. М. Панферов (Москва) *Температурные задачи деформирования физически нелинейных ортотропных оболочек вращения.*

Рассмотрена задача о физически нелинейном деформировании ортотропных оболочек вращения под действием осесимметричных нагрузок и поля температуры.

Предполагается, что при малых деформациях свойства материала оболочки описываются соотношениями нелинейно-упругой ортотропной среды, предложенными Панферовым; соотношения  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 \{e_{kl}\}$  имеют потенциал, который является функцией первого, второго инвариантов тензора деформаций  $(e, e_n)$  и совместных инвариантов тензора деформаций и единичных векторов  $a, b, c$ , определяющих главные направления ортотропии; эти инварианты имеют вид  $e, e_{ij}a_i a_j, e_{ij}e_{kl}a_i a_k$ .

Указанная задача сведена к интегрированию системы двух нелинейных дифференциальных уравнений, являющихся обобщением известных линейных уравнений Мейсснера. Полученная система решается двухступенчатым методом последовательных приближений, который заключается в следующем. На первой ступени решается линейная задача: из линейного оператора Мейсснера  $L$  выделяется «близкий» к нему оператор  $K$ . Далее строится аналог метода переменных направлений.

Дан анализ напряженно-деформированного состояния ортотропного сферического пояса под действием собственного веса и температуры; рассмотрены различные граничные условия; исследовано влияние анизотропии механических и теплофизических характеристик материала оболочки.

26 IV 1979. И. М. Насонкин (Новосибирск) *Вариационно-разностный метод расчета цилиндрических оболочек с подкреплениями.*

Получены жесткостная и инерционная матрицы для элемента цилиндрической оболочки в предположении, что прогибы могут быть представлены в виде кусочно-линейной функции. При вычислении производных, входящих в потенциальную энергию оболочек, использованы формулы метода конечных разностей. Решения, полученные указанным методом, сравнивались с известными решениями статических и динамических задач. Произведена оценка точности метода при различном числе разбиений оболочки на элементы.

10 V 1979. Н. А. Абрамов, М. И. Леднев (Москва) *Исследование напряженно-деформированного состояния подкрепленных торвых оболочек при локальном нагружении.*

Представлены результаты теоретического и экспериментального исследования напряженно-деформированного состояния торвых оболочек, подкрепленных упругими кольцами. Радиальная нагрузка в виде сосредоточенных сил прикладывается к элементам подкрепления. Рассмотрено два варианта подкреплений: меридиональные кольца и кольца, расположенные по параллелям меньшего и большего радиусов.

Расчет подкрепленной оболочки проводится методом конечных элементов. Торвая оболочка аппроксимируется плоскими треугольными элементами, кольца — стержневыми. Программа расчета составлена на языке ФОРТРАН-IV и реализована на ЭВМ. Приводятся результаты расчетов для различных соотношений жесткостных характеристик оболочки и колец.

Экспериментальные данные (напряжения) получены методом тензометрирования. Сравнение экспериментальных и теоретических результатов проводится для наружных точек поверхности кольца и оболочки. Результаты расчетов и эксперимента хорошо согласуются.

24 V 1979. В. П. Мальцев, Г. Н. Ольшанская (Москва) *Свободные колебания многосвязанных призматических конструкций.*

Исследуются частоты и формы свободных колебаний шарнирно-опертых по торцам призматических конструкций, состоящих из набора оболочечных и узловых элементов, соединенных произвольным образом. Оболочечные элементы представляют собой изотропные, ортотропные, конструктивно-ортотропные или многослойные цилиндрические элементы с произвольной формой направляющей. Узловыми элементами могут быть стержни произвольного поперечного сечения. Для оболочечных элементов считается справедливой гипотеза Кирхгофа — Лява, а для стержневых элементов — гипотеза плоских сечений.

С учетом статического напряженно-деформированного состояния, постоянного вдоль образующей цилиндрических элементов, изложен алгоритм определения частот и форм свободных колебаний на основе метода перемещений. Матрица жесткости оболочечных элементов вычисляется численно с использованием метода ортогональной прогонки С. К. Годунова, а матрица жесткости стрингеров устанавливается аналитически.

В качестве примера исследованы минимальные собственные частоты цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения. На основе численных экспериментов установлена простая расчетная формула для минимальной собственной частоты. Изучены частоты и формы свободных колебаний трехслойных пластин, рассмотренных как призматические конструкции, при различных вариантах строения заполнителя. Проанализированы свободные колебания подкрепленной стрингерами цилиндрической оболочки, разделенной на две части прямоугольной пластиной, расположенной в диаметральном сечении.

31 V 1979. Г. П. Коваленко (Сумы) *Некоторые краевые задачи теории упругости для неоднородной среды частного вида.*

Для среды с квадратичной зависимостью параметров Ламэ и плотности от поперечной координаты рассмотрены: контактные задачи для цилиндрического и прямолинейного жестких штампов с одной сменой граничных условий — вертикальные (неосесимметричные), горизонтальные и угловые колебания и отвечающие им статические задачи; задачи концентрации динамических и статических напряжений в окрестности одной прямолинейной, двух компланарных и одной круговой щелей; задачи дифракции упругих волн на нагруженных полупространстве и полосе, импедансной поверхности и полосе, на полубесконечном и конечном разрезах и жестком экране, разделяющем жидкость и неоднородное полупространство.

Уравнения движения квадратично-неоднородной среды взяты в форме, допускающей интегрирование в явном виде.

Парные интегральные уравнения динамических задач сводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое решается методом последовательных приближений для низкочастотных колебаний. Приводятся оценки радиусов сходимости полученных рядов. Высокочастотные колебания штампов исследуются методом Винера — Хофа.

Рассмотрены температурные задачи для случая, когда одна из весовых функций пропорциональна плотности. Рассмотрена температурная статическая задача для неоднородного полупространства, на поверхности которого задана температура с конечным скачком на контуре круга.

7 VI 1979. А. Д. Лизарев (Гомель) *Решение некоторых классов задач теории колебаний и устойчивости однородных и металлополимерных систем.*

Рассмотрены общие аналитические методы решения некоторых классов задач теории колебаний и устойчивости стержней, пластин и оболочек. В конструкциях с переменными параметрами, например жесткостью, нагрузками, механическими свойствами материала, задачи определения собственных частот и критических сил во многих случаях приводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами. Предложены эффективные единообразные методы построения аналитических решений таких уравнений в классах обобщенных гипергеометрических функций и их модификаций. Методы применены к исследованию колебаний и устойчивости стержней, пластин и оболочек переменной жесткости, вращающихся дисков, анизотропных пластин и оболочек, пластин на упругом основании, трехслойных оболочек. В большинстве случаев решения доведены до числовых результатов и могут быть использованы в качестве эталонных при оценке погрешностей различных приближенных методов.

Построены аналитические решения задач о колебаниях непологих трехслойных сферических оболочек с трансверсально изотропным внутренним слоем, например металлополимерных оболочек. Как частные случаи этого класса задач рассматриваются колебания однослойных трансверсально изотропных сферических оболочек, а также изотропных оболочек, колебания которых описываются теориями типа Тимошенко и классической. Указаны простые двусторонние оценки собственных частот, позволяющие контролировать правильность вычислений и избежать потери корней частотных уравнений. Изучены колебания тонких сферических оболочек со сверхнизкими частотами. Показана возможность разделения частотного уравнения на два независимых уравнения, одно из которых соответствует безмоментным, а другое — преимущественно изгибным колебаниям. Изучено явление внутреннего резонанса у сферических оболочек, при котором частоты квазитангенциальных колебаний совпадают с частотами квазипоперечных колебаний с большой изменчивостью и происходит слияние соответствующих собственных форм.

14 VI 1979. Ю. И. Виноградов (Москва) *Особенности одного метода решения задач о локальном нагружении замкнутых оболочек.*

Кратко излагается алгоритм численного метода решения задач о локальном нагружении замкнутых оболочек вращения. Обращается внимание на особенности метода, суть которого состоит в том, что искомые величины по окружной координате ищутся в форме тригонометрических рядов; решение полученной таким образом системы обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых первого порядка, записывается в виде матричной экспоненты. Вычисляется она путем разложения в ряд Тейлора. Основное же внимание уделяется априорным и апостериорным оценкам погрешностей метода.

14 VI 1979. Ю. И. Виноградов, О. В. Громько (Москва) *Матричный алгоритм одного метода решения задач о локальном нагружении пластин и оболочек.*

Формулируется метод численного решения задач о локальном нагружении пластин, а также гладких и подкрепленных незамкнутых оболочек. Этот метод сочетает разностную аппроксимацию производных по одной координате и разложение в ряд Тейлора матричной экспоненты, которая является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основное внимание уделяется алгоритму решения задач. Обсуждаются особенности и возможности этого алгоритма.

24 VI 1979. И. Э. Школьник (Москва) *Оценка и прогнозирование прочности твердых тел на основе учета нелинейности диаграммы деформирования.*

Показано, что прочность твердых тел зависит как от начальных упругих и структурных характеристик, так и от их изменения в процессе деформирования. Выведены формулы, позволяющие оценить прочность различных материалов при растяжении (сжатии) на основе учета нелинейности диаграммы деформирования. Приводятся опытные данные, подтверждающие установленную связь прочности с модулями упругости третьего порядка, коэффициентом, определяющим асимметричность сил междоатомного взаимодействия и изменением модулей упругости второго порядка при деформировании. Предложены экспериментальные методы прогнозирования прочности твердых тел без их разрушения.

13 IX 1979. Н. Б. Григорян (Ленинакан) *Некоторые консервативные и неконсервативные задачи устойчивости трехслойных стержней.*

Рассматривается устойчивость трехслойного стержня, нагруженного концевыми тангенциально-следящими сосредоточенными силами и распределенными по всей длине следящими и «мертвыми» нагрузками, с учетом внешнего и внутреннего демпфирования. Внешнее демпфирование принято пропорциональным скорости поперечных колебаний, а внутреннее — по модели Фойхта. Предполагается, что стержень может совершать продольное движение с равномерным ускорением. Выведено уравнение малых поперечных колебаний стержня и сформулированы условия закрепления концов стержня.

Рассмотрены задачи об устойчивости трехслойного стержня, жестко защемленного одним концом и нагруженного на свободном конце тангенциально-следящей сосредоточенной силой; нагруженного равномерно распределенной по длине следящей нагрузкой при различных видах закрепления концов, совершающего полет с равномерным ускорением под действием сжимающей сосредоточенной следящей силы, приложенной на конце стержня.

20 IX 1979. Е. А. Лопаницын (Москва) *Колебания трехслойной конической панели.*

Методом И. Г. Бубнова решается задача о свободных колебаниях трехслойной конической панели с заполнителем, воспринимающим сдвиг в поперечном направлении. Вариационные уравнения записаны в перемещениях, которые представлены двойными функциональными рядами, состоящими из функций, частично удовлетворяющими уравнениям равновесия и заданным граничным условиям. Таким образом, задача сводится к алгебраической проблеме собственных значений, которая решается методом одновременной итерации. Численно показана сходимость вычисления собственной частоты панели при различных граничных условиях в зависимости от количества членов в аппроксимирующих рядах.

27 IX 1979. Н. Н. Андрианов (Москва) *Устойчивость пологих арок.* Рассматривается задача о плоском выпучивании упругого пологого стержня, продольные перемещения концов которого стеснены при действии поперечной нагрузки. Задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами относительно функции прогиба и нелинейному уравнению совместности деформации, учитывающему квадратичную нелинейность.

На основе выписанного точного решения построены зависимости: нагрузка — распор, нагрузка — прогиб, энергия — прогиб для некоторых частных случаев. Проведено исследование влияния параметра геометрии, а также начальных возмущений исходной формы нейтральной оси стержня и распределения нагрузки на характер названных кривых.

4 X 1979. Г. М. Куликов (Москва) *Исследование некоторых геометрически нелинейных задач многослойных анизотропных пластин и оболочек.*

Обсуждаются слабо сопротивляющиеся деформациям поперечного сдвига многослойные анизотропные пластины и пологие оболочки конечного прогиба в рамках известной гипотезы Бергера, причем тангенциальные перемещения распределены по толщине слоев по нелинейному закону. Принят тензорный подход, что позволило записать громоздкие соотношения нелинейной теории слоистых анизотропных оболочек малой сдвиговой жесткости в легко обозримом виде. Уравнения движения и граничные условия получены из принципа Гамильтона — Остроградского и полностью совпадают по написанию с известными в литературе уравнениями движения много-

слоиных пологих оболочек конечного прогиба. Отличие лишь в усилиях, которые соответствуют принятому в работе допущению Бергера.

Показано, что гипотезу Бергера можно применить к многослойным анизотропным оболочкам, собранным из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности, и к слоистым трансверсально изотропным оболочкам несимметричной структуры. Для последних выведены разрешающие дифференциальные уравнения относительно функции перемещений и функции сдвига. Достоинством построенных уравнений является то, что они линейные и не связаны друг с другом. Установлено, что метод Бергера представляет собой двумерное расширение элементарной теории полос, сформулированной Бубновым еще в 1902 г. Оценено влияние поперечного сдвига на максимальный прогиб полос, прямоугольных и круговых трансверсально изотропных трехслойных пластин.

*А. Г. Горшков*