МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1980

УДК 539.3:534.1

КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВИБРОДЕМПФИРУЮЩИМ СЛОИСТЫМ ПОКРЫТИЕМ

Д. В. ВИТТ

(Дрезден, ГДР)

Рассматриваются колебания замкнутой сферической оболочки с вибродемпфирующим слоистым покрытием. Исследование базируется на теории многослойных тел [1, 2]. Учет вязкоупругих свойств материалов слоев при стационарных колебаниях основан на теории комплексного модуля [3]. Эффективность вибродемпфирующего слоистого покрытия оценивается по относительному рассеянию энергии [4]. Численные результаты, полученные с использованием ЭВМ, показывают влияние различных параметров на колебания сферической оболочки с покрытием.

1. Рассмотрим несущую оболочку толщины H_0 с расположенным на ее внешней поверхности многослойным покрытием, состоящим из n чередующихся слоев пониженной жесткости толщины s_k (мягкие слои) и n слоев повышенной жесткости толщины h_k (жесткие слои) $(k=1, 2, \ldots, n)$. Проскальзывание между слоями покрытия и несущей оболочкой отсутствует. Материалы слоев покрытия и несущей оболочки предполагаются линейными вязкоупругими, изотропными и однородными. Принимаем справедливой гипотезу Кирхгофа — Лява для жестких слоев, включая несущую оболочку, а для мягких слоев считаем существенными только деформации поперечных сдвигов и трансверсальные деформации, учитывая гипотезу о линейном законе изменения перемещений по толщине. Модули материалов слоев имеют вид [3]:

$$G^{[k]}=G_r^{[k]}\,(1+i\eta^{[k]}),\qquad \eta^{[k]}=G_i^{[k]}/G_r^{[k]} \tag{1.1}$$

и т. д. Индексы r и i характеризуют действительную и мнимую части модуля.

Рассмотрим сферическую многослойную оболочку, отнесенную к географической системе координат $x^1=\alpha$, $x^2=\beta$, где α — широта, β — долгота. Конечно-разностные дифференциальные уравнения движения с учетом инерционных сил в жестких (плотности материалов $\rho^{(k)}$) и мягких (плотности $\rho^{[k]}$) слоях получим из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского [2]:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{R_k}\left[\frac{\partial N_{11}^{(k)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial N_{12}^{(k)}}{\partial\beta}+(N_{11}^{(k)}-N_{12}^{(k)})\operatorname{ctg}\alpha-Q_1^{(k)}\right]+q_1^{*(k)}=0\\
\frac{1}{R_k}\left[\frac{\partial N_{21}^{(k)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial N_{22}^{(k)}}{\partial\beta}+(N_{12}^{(k)}+N_{21}^{(k)})\operatorname{ctg}\alpha-Q_2^{(k)}\right]+q_2^{*(k)}=0\\
-\frac{1}{R_k}\left[N_{11}^{(k)}+N_{22}^{(k)}+\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{\partial(Q_1^{(k)}\sin\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial\beta}\right\}\right]+q_3^{*(k)}=0
\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$Q_1^{(k)}=\frac{1}{R_k}\left[\frac{\partial M_{11}^{(k)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial M_{12}^{(k)}}{\partial\beta}+(M_{11}^{(k)}-M_{22}^{(k)})\operatorname{ctg}\alpha\right]$$

$$Q_2^{(k)}=\frac{1}{R_k}\left[\frac{\partial M_{21}^{(k)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial M_{22}^{(k)}}{\partial\beta}+(M_{12}^{(k)}+M_{21}^{(k)})\operatorname{ctg}\alpha\right]$$

$$\overset{*(k)}{q_j}=\overset{(k)}{q_j}+\overset{(k)}{q_{*j}}+\overset{*(k)}{q_{*j}}\qquad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

$$q_{*\gamma}^{(k)}=-\rho^{(k)}h_k\frac{\partial^2 v_\gamma^{(k)}}{\partial t^2}-\frac{1}{4}\left[\rho^{[k]}s_k\eta_{kn}\left(1+\frac{c_k^*}{R_k}\right)\left(\frac{\partial^2 v_\gamma^{(k+1)}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 v_\gamma^{(k)}}{\partial t^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\rho^{[k-1]}s_{k-1}\eta_{k0}\left(1-\frac{c_{k-1}^{**}}{R_k}\right)\left(\frac{\partial^2 v_\gamma^{(k)}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 v_\gamma^{(k-1)}}{\partial t^2}\right)\right]\qquad (\gamma=1,2)$$

$$q_{*3}^{(k)}=-\rho^{(k)}h_k\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2}-\frac{1}{4}\left[\rho^{[k]}s_k\eta_{kn}\left(1+\frac{c_k^*}{R_k}\right)\left(\frac{\partial^2 w^{(k+1)}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\rho^{[k-1]}s_{k-1}\eta_{k0}\left(1-\frac{c_{k-1}^{**}}{R_k}\right)\left(\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w^{(k-1)}}{\partial t^2}\right)\right]$$

$$\overset{*(k)}{q_{*\gamma}}=-\frac{\eta_{kn}}{s_k}\left(1+\frac{2c_k^*}{R_k}\right)Q_\gamma^{[k]}+\frac{\eta_{k0}}{s_{k-1}}\left(1-\frac{2c_{k-1}^{**}}{R_k}\right)Q_\gamma^{[k-1]}$$

$$\overset{*(k)}{q_{*3}}=-\frac{1}{R_k\sin\alpha}\left\{\frac{c_k^*\eta_{kn}}{s_k}\left[\frac{\partial(Q_1^{[k]}\sin\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q_2^{[k]}}{\partial\beta}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{c_{k-1}^{**}\eta_{k0}}{s_{k-1}}\left[\frac{\partial(Q_1^{[k-1]}\sin\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial Q_2^{[k-1]}}{\partial\beta}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\eta_{kn}}{s_k}\left(1+\frac{c_k^*}{R_k}\right)N^{[k]}-\frac{\eta_{k0}}{s_{k-1}}\left(1-\frac{c_{k-1}^{**}}{R_k}\right)N^{[k-1]}$$

$$c_k^*={}^1/_2(s_k+h_k),\quad c_k^{**}={}^1/_2(s_k+h_{k+1}),\quad \eta_{kj}=1-\delta_{kj}$$

Здесь $q_j^{(k)}$ — внешние нагрузки, приложенные к жестким слоям; $q_{*j}^{(k)}$ — инерционные силы; $\overset{*(k)}{q_{*j}}$ — нагрузки, действующие на k-й жесткий слой со стороны $(k-1)$-го и k-го мягких слоев; δ_{kj} — символ Кронекера; $N_{\gamma\delta}^{(k)}$, $M_{\gamma\delta}^{(k)}$ — элементарные усилия и моменты в жестких слоях; $Q_\gamma^{[k]}$ и $N^{[k]}$ — перерезывающие и трансверсальные усилия в мягких слоях; $v_\gamma^{(k)}$ и $w^{(k)}$ — составляющие вектора смещения срединной поверхности k-го жесткого слоя с радиусом R_k.

Целесообразно ввести в (1.2) функции Θ и χ по формулам

$$\Theta^{(k)}=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial(v_1^{(k)}\sin\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial\beta}\right]+2w^{(k)}$$

$$\chi^{(k)}=\frac{1}{2\sin\alpha}\left[\frac{\partial(v_2^{k}\sin\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial\beta}\right]\qquad(1.3)$$

и исключить из получающихся уравнений тангенциальные перемещения $v_1^{(k)}$ и $v_2^{(k)}$. В результате получим уравнения движения многослойной сферической оболочки в форме

$$\frac{A_k}{R_k^2}[(\nabla^2+1-\nu_k)\Theta^{(k)}-(d_k^2\nabla^2+1-\nu_k)(\nabla^2+2)w^{(k)}]+$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(q_1^{*(k)}\sin\alpha)+\frac{\partial q_2^{*(k)}}{\partial\beta}\right]=0 \qquad (1.4)$$

$$\frac{A_k}{R_k^2}(1-\nu_k)(\nabla^2+2)\chi^{(k)}+\frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(q_2^{*(k)}\sin\alpha)-\frac{\partial q_1^{*(k)}}{\partial\beta}\right]=0 \qquad (1.5)$$

$$(1.6)$$

$$\frac{A_k}{R_k^2}\{[d_k^2\nabla^2-(1+\nu_k)]\Theta^{(k)}-d_k^2[(\nabla^2+1-\nu_k)(\nabla^2+2)w^{(k)}\}+q_3^{*(k)}=0$$

$$A_k=\frac{E^{(k)}h_k}{1-\nu_k^2},\qquad d_k^2=\frac{1}{12}\left(\frac{h_k}{R_k}\right)^2 \qquad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

$$\nabla^2=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]$$

Уравнения (1.4), (1.6) содержат только $\Theta^{(k)}$ и $w^{(k)}$ а для $\chi^{(k)}$ получается независимое уравнение (1.5).

Для дальнейших исследований выполним некоторые упрощения. В случае тонкой многослойной оболочки можно пренебречь отношениями c_k^*/R_k и c_k^{**}/R_k по сравнению с единицей, т. е. не учитывать изменение метрики по толщине. Если мягкие слои работают только на сдвиг, то следует пренебречь удлинениями нормалей, что дает $w^{(k)}=w$. В этом случае можно просуммировать уравнения (1.6) по k. Количество уравнений при этом уменьшается до $2(n+1)+1$. Для пологой многослойной оболочки получим уравнения движения в виде ($c_k=c_k^*+c_k^{**}$):

$$\frac{A_k}{R_k^2}[\nabla^2\Theta^{(k)}-(1-\nu_k)\nabla^2 w]+\frac{G^{[k]}\eta_{kn}}{s_k}\left(\Theta^{(k+1)}-\Theta^{(k)}+\frac{c_k}{R_k}\nabla^2 w\right)-$$

$$-\frac{G^{[k-1]}\eta_{k0}}{s_{k-1}}\left(\Theta^{(k)}-\Theta^{(k-1)}+\frac{c_{k-1}}{R_{k-1}}\nabla^2 w\right)+$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}[(q_1^{(k)}+q_{*1}^{(k)})\sin\alpha]+\frac{\partial(q_2^{(k)}+q_{*2}^{(k)})}{\partial\beta}\right\}=0 \qquad (1.7)$$

$$\frac{A_k}{R_k^2}(1-\nu_k)\nabla^2\chi^{(k)}+2\left[\frac{G^{[k]}\eta_{kn}}{s_k}(\chi^{(k+1)}-\chi^{(k)})-\frac{G^{[k-1]}\eta_{k0}}{s_{k-1}}(\chi^{(k)}-\chi^{(k-1)})\right]+$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}[(q_2^{(k)}+q_{*2}^{(k)})\sin\alpha]-\frac{\partial(q_1^{(k)}+q_{*1}^{(k)})}{\partial\beta}\right\}=0 \qquad (1.8)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{R_k^2}[-(1+\nu_k)\Theta^{(k)}-d_k^2\nabla^2\nabla^2 w]+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{G^{[k]}}{s_k}\left(\frac{c_k^*}{R_k}+\frac{c_k^{**}}{R_{k+1}}\right)\left(\Theta^{(k+1)}-\Theta^{(k)}+\frac{c_k}{R_k}\nabla^2 w\right)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n}(\rho^{(k)}h_k+\rho^{[k]}s_k\eta_{kn})\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\sum_{k=0}^{n}q_3^{(k)}=0 \tag{1.9}$$

2. В дальнейшем рассмотрим преимущественно нормальные формы колебаний, описываемые уравнениями (1.7) и (1.9), причем тангенциальными внешними нагрузками и тангенциальными силами инерции будем пренебрегать $(q_1^{(k)}=q_2^{(k)}=q_{*1}^{(k)}=q_{*2}^{(k)}=0)$. В этом случае (1.8) — однородная система уравнений с решениями $\chi^{(k)}=0$. Пусть на оболочку действует нормальная внешняя гармоническая нагрузка

$$\sum_{k=0}^{n}q_3^{(k)}=q(\alpha,\beta)e^{i\Omega t}$$

Решение системы (1.7), (1.9) представим в комплексной форме $w(\alpha,\beta,t)=w^\circ(\alpha,\beta)e^{i\Omega t}$, $\Theta^{(k)}(\alpha,\beta,t)=\Theta^{\circ(k)}(\alpha,\beta)e^{i\Omega t}$, где $w^\circ(\alpha,\beta)$ и $\Theta^{\circ(k)}(\alpha,\beta)$ — комплексные амплитуды при заданной действительной частоте возбуждения Ω. Переходя к безразмерным параметрам, получим следующие уравнения нормальных колебаний сферической оболочки с покрытием:

$$\delta_k\nabla^2[\Theta^{\circ(k)}-(1-\nu_k)\nabla^2 w^\circ]+\lambda_k\eta_{kn}\left(\Theta^{\circ(k+1)}-\Theta^{\circ(k)}+\frac{c_k}{R_k}\nabla^2 w^\circ\right)-$$

$$-\lambda_{k-1}\eta_{k0}\left(\Theta^{\circ(k)}-\Theta^{\circ(k-1)}+\frac{c_{k-1}}{R_{k-1}}\nabla^2 w^\circ\right)=0 \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\delta_k[(1+\nu_k)\Theta^{\circ(k)}+d_k^2\nabla^2\nabla^2 w^\circ]-\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left(\frac{c_k^*}{R_k}+\frac{c_k^{**}}{R_{k+1}}\right)\left(\Theta^{\circ(k+1)}-\Theta^{\circ(k)}+\right.-$$

$$\left.+\frac{c_k}{R_k}\nabla^2 w^\circ\right)-M\Omega^{*2}w^\circ=q^\circ \tag{2.2}$$

$$\delta_k=\frac{A_k}{A_0}\left(\frac{R_0}{R_k}\right)^2,\quad \lambda_k=\frac{G^{[k]}R_0^2}{s_kA_0},\quad \Omega^{*2}=\Omega^2\frac{\rho^{(0)}H_0R_0^2}{A_0}$$

$$M=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho^{(k)}}{\rho^{(0)}}\frac{h_k}{H_0}+\frac{\rho^{[k]}}{\rho^{(0)}}\frac{s_k}{H_0}\eta_{kn}\right);\quad q^\circ=q\frac{R_0^2}{A_0}$$

Здесь H_0, R_0, $A_0(E^{(0)},\nu_0)$, $\rho^{(0)}$ — параметры, характеризующие несущую оболочку.

Пусть внешнее вибродемпфирующее покрытие имеет регулярное строение, является тонким и состоит из чередующихся n мягких и n жестких слоев с параметрами s, G, $\rho^{[\,]}$; h, R, E, ν, A, $\rho^{(\,)}$; $R=R_0+{}^1/_2(H_0+H)$ — средний радиус покрытия вместо R_k $(k=1,2,\ldots,n)$ и $H=n(s+h)$ — толщина покрытия. Внешняя нагрузка может быть разложена в ряд по сферическим функциям

$$q^\circ(\alpha,\beta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} q_{lm}{}^{\circ\circ}Y_l^{(m)}(\alpha,\beta),\qquad Y_l^{(0)}(\alpha,\beta)=P_l(\cos\alpha) \tag{2.3}$$

$$Y_l^{(m)}(\alpha,\beta)=P_l^m(\cos\alpha)\begin{cases}\sin m\beta & (m>0)\\ \cos m\beta & (m<0)\end{cases}$$

Здесь $P_l^m(\cos\alpha)$ — присоединение функции Лежандра и $P_l(\cos\alpha)$ — полиномы Лежандра. Решение системы (2.1), (2.2) тоже ищем в виде рядов по сферическим функциям

$$w^\circ(\alpha,\beta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \overset{\circ\circ}{w}_{lm}Y_l^{(m)}(\alpha,\beta),\quad \Theta^{\circ(k)}(\alpha,\beta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\overset{\circ\circ}{\Theta}{}_{lm}^{(k)}Y_l{}^{(m)}(\alpha,\beta) \tag{2.4}$$

После подстановки (2.4) в (2.1) с учетом равенств $\nabla^2Y_l^{(m)}=-\varkappa Y_l^{(m)}$, $\varkappa=l(l+1)$ получим разностную неоднородную задачу для $\overset{\circ\circ}{\Theta}{}_{lm}^{(k)}$. Уравнения при $k=1$ и $k=n$ выполняют при этом роль граничных условий. Общее решение системы (2.1) имеет вид

$$\Theta^{\circ\circ(k)}=C_1\,\mathrm{sh}\,\mu k+C_2\,\mathrm{ch}\,\mu k+(1-\nu)w^{\circ\circ}\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

$$C_1=\frac{1}{N}\left\{\frac{c}{R}\varkappa w^{\circ\circ}-C_2[\mathrm{ch}(n+1)\mu-\mathrm{ch}\,n\mu]\right\},\qquad C_2=\Theta^{\circ\circ(0)}-Fw^{\circ\circ}$$

$$F=(1-\nu)+\varkappa(c/R-c_0/R_0),\qquad N=\mathrm{sh}(n+1)\mu-\mathrm{sh}\,n\mu \tag{2.5}$$

$$\Theta^{\circ\circ(0)}=w^{\circ\circ}\varkappa\left[\frac{1-\nu_0}{\lambda}+\left(\frac{c}{RN}\mathrm{sh}\,\mu-\frac{c_0}{R_0}\right)-FS+(1-\nu)\right](1+\varkappa/\lambda+S)^{-1}$$

$$S=[\mathrm{sh}\,n\mu-\mathrm{sh}(n-1)\mu]/N$$

Параметр μ находится из уравнения $\mathrm{ch}\,\mu=1+\delta\varkappa/(2\lambda)$. Индексы l, m для краткости опущены.

Комплексные величины $w_{lm}{}^{\circ\circ}$ найдем из (2.2) после исключения $\Theta^{\circ(k)}$ при помощи (2.4), (2.5). В результате получим

$$w^{\circ\circ}=q^{\circ\circ}/(T-M\Omega^{*2}) \tag{2.6}$$

$$T=(1+\nu_0)\Theta^{*(0)}+d_0{}^2\varkappa^2+\delta\left[(1+\nu)\sum_{k=1}^{n}\Theta^{*(k)}+nd^2\varkappa^2\right]-$$

$$-\lambda\left\{\left(\frac{c_0{}^*}{R_0}+\frac{c_0{}^{**}}{R}\right)\left(\Theta^{*(1)}-\Theta^{*(0)}-\frac{c_0}{R_0}\varkappa\right)+\frac{c}{R}\left[\Theta^{*(n)}-\Theta^{*(1)}-\right.\right. \tag{2.7}$$

$$\left.\left.-(n-1)\frac{c}{R}\varkappa\right]\right\},\qquad \Theta^{*(k)}=\frac{\Theta^{\circ\circ(k)}}{w^{\circ\circ}}$$

Вынужденные (преимущественно поперечные) колебания описываются формулой

$$w_r=\mathrm{Re}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} w_{lm}{}^{\circ\circ}Y_l^{(m)}e^{i\Omega t}$$

Для вычисления эффективности демпфирования многослойного покрытия важны тангенциальные перемещения $v_1^{(k)}$ и $v_2^{(k)}$.

Из формул (1.3) после преобразования получим

$$\nabla^2(v_2^{(k)}\sin\alpha)=\frac{\partial}{\partial\beta}(\Theta^{(k)}-2w)+\frac{2}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\chi^{(k)}\sin^2\alpha)$$

$$\nabla^2(v_1^{(k)}\sin\alpha)=\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}[(\Theta^{(k)}-2w)\sin^2\alpha]-2\frac{\partial\chi^{(k)}}{\partial\beta}$$

Полагая $\chi^{(k)}=0$, найдем

$$v_2^{(k)}=-\frac{1}{\sin\alpha}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{m}{\varkappa}C_{lm}^{(k)}Y_l^{(-m)}$$

$$v_1^{(k)}=\sin\alpha\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{\varkappa}C_{lm}^{(k)}\frac{\partial Y_l^{(m)}}{\partial x}$$

$$C_{lm}^{(k)}=(\Theta_{lm}^{*(k)}-2)w_{lm}^{\circ\circ},\quad x=\cos\alpha \tag{2.8}$$

Исходные уравнения позволяют исследовать свободные колебания. Для этого необходимо положить $q=0$ и заменить действительную частоту возбуждения Ω комплексной [3] частотой свободных колебаний ω. С учетом (2.7) получим

$$\omega^*=(T/M)^{1/2},\quad \omega^*=\omega_r^*+i\omega_i^* \tag{2.9}$$

где ω_r^* — действительная часть и ω_i^* — мнимая часть безразмерной частоты.

3. При практическом применении вибродемпфирующих слоистых покрытий в конструкциях необходимо произвести оценку их эффективности. В качестве меры демпфирования выберем относительное рассеяние энергии [4] $\psi_W=\Delta W/W$, где ΔW — величина энергии, рассеиваемой за период, W — некоторое среднее за период значение полной механической энергии в конструкции. Учитывая, что ΔW и W составляются из частей, относящихся к жестким и мягким слоям, получим

$$\psi_W=\left(\sum_k\Delta W^{(k)}+\sum_k\Delta W^{[k]}\right)\left(\sum_k W^{(k)}+\sum_k W^{[k]}\right)^{-1} \tag{3.1}$$

Выражение для потенциальной энергии жесткого слоя, включая несущую оболочку, имеет вид

$$W^{(k)}=\frac{1}{2}\iint_A\frac{E_r^{(k)}h_k}{1-\nu_k^2}[(e_{11}^{(k)}+e_{22}^{(k)})^2+2(1-\nu_k)(e_{12}^{(k)2}-e_{11}^{(k)}e_{22}^{(k)})]dA+$$

$$+\frac{1}{2}\iint_A\frac{E_r^{(k)}h_k^3}{12(1-\nu_k^2)}[(\varkappa_{11}^{(k)}+\varkappa_{22}^{(k)})^2+2(1-\nu_k)(\varkappa_{12}^{(k)2}-\varkappa_{11}^{(k)}\varkappa_{22}^{(k)})]dA \tag{3.2}$$

Потенциальная энергия мягкого слоя равна

$$W^{[k]}=2\iint_A G_r^{[k]}s_k[(\varepsilon_{13}^{[k]})^2+(\varepsilon_{23}^{[k]})^2]dA \tag{3.3}$$

Здесь A — срединная поверхность слоя. Энергия, рассеиваемая в жестком $\Delta W^{(k)}$ и мягком $\Delta W^{[k]}$ слоях, вычисляется по формулам (3.2) и (3.3) заменой модулей $E_r^{(k)}, G_r^{[k]}$ на $E_i^{(k)}, G_i^{[k]}$ и умножением интегралов на 2π

Для приложений необходимо знать характеристику демпфирования при частотах и формах колебаний, близких к собственным. Поэтому оценим эффективность демпфирования по установившимся вынужденным колебаниям, происходящим по одной из собственных форм, учитывая только соответствующую составляющую q_{lm} внешней нагрузки. Можно определить также относительное рассеяние энергии при свободных колебаниях, выражая его через комплексные частоты $\psi_\omega=4\pi\omega_i/\omega_r$.

4. В качестве примера рассмотрим замкнутую сферическую оболочку с регулярно слоистым покрытием, на которую воздействуют две диаметрально противоположные силы $F_0e^{i\Omega t}$, приложенные в полюсах. Следуя [5], для обобщенных сил получаем выражение $(m=0)$:

$$q_l^{\circ\circ}=\begin{cases}\dfrac{F_0}{2\pi R^2}\dfrac{R_0^2}{A_0}(2l+1) & (l=2j)\\ 0 & (l=2j+1)\end{cases}$$

Тогда из (2.6) находятся комплексные величины $w_l^{\circ\circ}$ $(m=0)$:

$$w_l^{\circ\circ}=\frac{F_0}{2\pi R^2}\frac{R_0^2}{A_0}\frac{2l+1}{T_l-M\Omega^{*2}} \tag{4.1}$$

и амплитуда нормальных смещений определяется выражением

$$|w^\circ|=\frac{F_0}{2\pi R^2}\frac{R_0^2}{A_0}\left|\sum_{l=0,2,4}\frac{2l+1}{T_l-M\Omega^{*2}}P_l(\cos\alpha)\right|,$$

$$T_0=2[1+\nu_0+\delta(1+\nu)n] \tag{4.2}$$

В резонансном состоянии для каждой собственной частоты экстремальные значения перемещений, определяемые по формуле

$$|w_l^{\circ\circ}|_{\max}=\frac{F_0}{2\pi R^2}\frac{R_0^2}{A_0}\frac{2l+1}{\operatorname{Im}(T_l)}$$

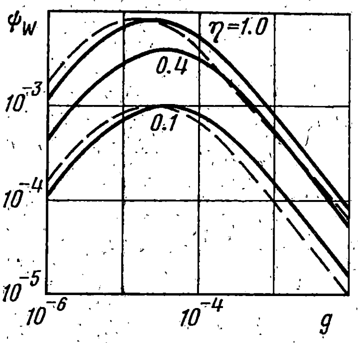
имеют место при частоте возбуждения $\Omega^*=[\operatorname{Re}(T_l)/M]^{1/2}$. При вычислении эффективности вибродемпфирующего слоистого покрытия предполагаем, что рассеяние энергии происходит только в мягких слоях. По формулам (3.1), (3.2) с учетом выражений (2.7) и соответствующих производных для случая $m=0$ получим

$$\psi_W=2\pi\eta\sum_{k=0}^{n-1}W^{*[k]}\left(\sum_{k=0}^{n}W^{*(k)}+\sum_{k=0}^{n-1}W^{*[k]}\right)^{-1}$$

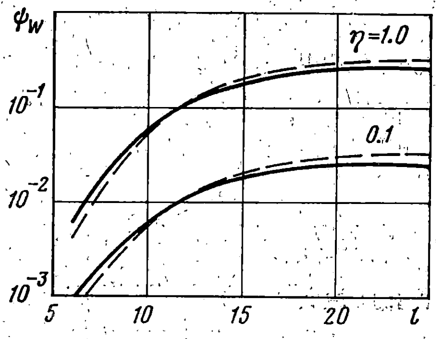
$$\sum_{k=0}W^{*(k)}=|\Theta^{*(0)2}-(1-\nu_0)[2(\Theta^{*(0)}-1)+\varkappa^{-1}(\Theta^{*(0)}-2)^2]+$$

$$+d_0^2\varkappa[\varkappa-(1-\nu_0)]|+\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\delta\sum_{k=1}|\Theta^{*(k)2}-(1-\nu)[2(\Theta^{*(k)}-1)+$$

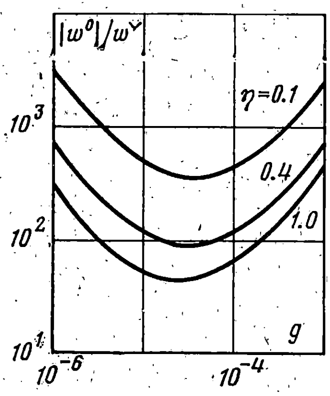
$$+\varkappa^{-1}(\Theta^{*(k)}-2)^2+d^2\varkappa[\varkappa-(1-\nu)]|$$



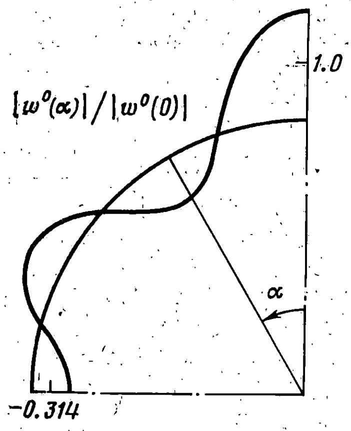
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\sum_{k=0}^{n-1} W^{*[k]} = \frac{\lambda_r}{\varkappa}\left[\left|\Theta^{*(1)}-\Theta^{*(0)}-\varkappa\frac{c_0}{R_0}\right|^2+\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\sum_{k=1}^{n-1}\left|\Theta^{*(k+1)}-\Theta^{*(k)}-\varkappa\frac{c}{R}\right|^2\right]$$

$$\lambda_r=\mathrm{Re}(\lambda)=G_rR_0^2/sA_0$$

Обсуждение численных результатов. Предполагалось, что покрытие является регулярным и материалы жестких слоев, включая несущую оболочку,– упругими. Варьировались параметры, представляющие собой безразмерные величины $g=G_r(1-\nu^2)/E_r$, $e=E_r(1-\nu_0^2)/[E_r^{(0)}(1-\nu^2)]$, коэффициент армирования $h/(h+s)$ и тангенс потерь для материала мягких слоев η. Здесь выбраны значения: ν_0, $\nu=0.3$, $H_0/R_0=0.01$, $H/H_0=n(s+h)/H_0=0.2$, $h/(h+s)=0.5$, $\rho^{(\ )}/\rho^{(0)}=1.0$, $\rho^{[\ ]}/\rho^{(0)}=0.3$, $e=1.0$.

На фиг. 1 и 2 показано относительное рассеяние энергии в зависимости от величины g, а также от числа l собственной формы колебаний. В качестве параметров приняты тангенс потерь η и количество слоев в покрытии (сплошные линии – $n=1$, штриховые линии – $n=2$). На фиг. 1 видно, что существуют оптимальные значения g для демпфирования, зависящего прежде всего от тангенса потерь и в меньшей степени от количества слоев. Результаты, представленные на фиг. 2, показывают, что эффективность вибродемпфирующего покрытия постоянно увеличивается до $l=18$, а при $l>18$ почти не изменяется. Заметим, кроме того, что результаты, полученные при рассмотрении вынужденных (ψ_W) и свободных колебаний (ψ_ω), совпадают.

На фиг. 3 представлена зависимость от параметра g резонансной амплитуды $|w^\circ|$ в полюсе (4.2), отнесенной к статическому перемещению $w^{\vee}=|w^\circ(\Omega^*=0)|$ при частоте возбуждения Ω^*, близкой к шестой собственной частоте. Полученные здесь результаты подчеркивают выводы относительно уровня демпфирования и наиболее благоприятных значений параметра g (фиг. 1). На фиг. 4 показана зависимость перемещений $|w^\circ|$ (4.2) от угла α, характеризующая форму колебаний при частоте возбуждения Ω^*, близкой к шестой собственной частоте.

Автор благодарит В. В. Болотина и Ю. Н. Новичкова за внимание к работе и полезные замечания.

Поступила 6 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bolotin V. V.* Vibration of layered elastic plates. Proc. vibr. problems, 1963, vol. 4, No. 4, p. 331–346.
2. *Москаленко В. Н., Новичков Ю. Н.* Изгиб толстых многослойных оболочек. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.
3. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
4. *Болотин В. В., Литвинов А. Н.* К теории вибродемпфирующих полимерных покрытий. Механика полимеров, 1978, № 2.
5. *Манасян А. А.* Колебания сферической оболочки под действием сосредоточенной силы. Тр. IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.