МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 · 1980

УДК 531.12

О ФАЗОВЫХ КРИВЫХ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

А. И. МАТАСОВ

(Москва)

Известно [1, 2], что исследование уравнений инерциальной навигации приводится к исследованию движения двух материальных точек M и M', движущихся в поле сил притягивающего центра под действием одной и той же внешней негравитационной силы. Материальная точка M – чувствительная масса пространственного акселерометра, установленного на объекте, M' – модельная материальная точка, траектория которой формируется вычислителем инерциальной системы. При таком подходе задача о наблюдаемости для уравнений инерциальной навигации при движении объекта на известном постоянном удалении r_0 от притягивающего центра приводится к задаче определения многообразия траекторий модельных материальных точек, которые во все время движения находятся на сфере радиуса r_0.

В данной работе эта задача решена для двух частных случаев: при движении рассматриваемых точек в одной неподвижной плоскости и при движении одной из них с постоянной скоростью по дуге большого круга сферы известного радиуса. Кроме того, для общего пространственного случая сформулировано одно свойство указанного многообразия движений материальных точек.

1. Пусть на борту объекта установлена инерциальная навигационная система. Пространственный акселерометр инерциальной системы, чувствительную (единичную) массу которого обозначим через M, укреплен на гироплатформе. Угловой скоростью гироплатформы можно управлять, используя в качестве управляющих сигналов выходы бортового вычислителя. Введем приборный трехгранник $Mz_1z_2z_3$, центр которого совпадает с точкой M, а оси направлены по ортогональным осям чувствительности акселерометра. Пусть движение объекта – чувствительной массы акселерометра – происходит на постоянном удалении r_0 от притягивающего центра.

Уравнения движения точки M в проекциях на оси $Mz_1z_2z_3$ имеют вид

$$r_1^{\bullet}=\omega_3r_2-\omega_2r_3+v_1$$

$$r_2^{\bullet}=\omega_1r_3-\omega_3r_1+v_2$$

$$r_3^{\bullet}=\omega_2r_1-\omega_1r_2+v_3$$

$$v_1^{\bullet}=\omega_3v_2-\omega_2v_3-\mu r_1r^{-3}+f_1$$

$$v_2^{\bullet}=\omega_1v_3-\omega_3v_1-\mu r_2r^{-3}+f_2$$

$$v_3^{\bullet}=\omega_2v_1-\omega_1v_2-\mu r_3r^{-3}+f_3$$

$$r=(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^{1/2}=r_0$$

Здесь $\mathbf{r}=\|r_1, r_2, r_3\|^T$ – радиус-вектор точки M, $\mathbf{v}=\|v_1, v_2, v_3\|^T$ – скорость точки M, $\mathbf{f}=\|f_1, f_2, f_3\|^T$ – внешняя сила негравитационной природы, $\omega=\|\omega_1, \omega_2, \omega_3\|^T$ – абсолютная угловая скорость вращения приборного трехгранника, μ – постоянная тяготения.

Модельные уравнения движения, сформированные в вычислителе, могут быть выбраны совершенно идентичными указанным уравнениям точки M. В этом случае (в предположении отсутствия погрешностей акселерометра и гироскопических устройств) они описывают движение модельной точки M' единичной массы в том же поле сил притягивающего центра под действием той же внешней силы в проекциях на оси приборного трехгранника. Движение точки M' отличается от движения точки M лишь начальными условиями. Задача о наблюдаемости для уравнений инерциальной навигации при использовании информации о высоте состоит в определении многообразия решений модельных уравнений, подчиняющихся ограничению $r_1'^2+r_2'^2+r_3'^2=H(t)$, где r_i' $(i=1, 2, 3)$ — компоненты радиус-вектора точки M', а $H(t)$ — известная функция времени. Эта задача была решена в [2] при использовании линеаризованных уравнений ошибок инерциальной навигационной системы.

Задача о наблюдаемости в большом отличается от рассмотренной в [2] учетом полных уравнений. При движении объекта — чувствительной массы акселерометра — на известном постоянном удалении r_0 от притягивающего центра эта задача состоит, согласно теоретико-механической трактовке, в определении многообразия движений модельных материальных точек, находящихся в поле сил притягивающего центра под действием одинаковой негравитационной силы, траектории которых лежат на сфере радиуса r_0.

Отметим, что определение этого многообразия имеет смысл и при построении общей невозмущаемой системы инерциальной навигации при движении объекта по сфере известного радиуса [3].

Поэтому в данной работе принята следующая теоретико-механическая постановка задачи.

Введем инерциальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Рассмотрим материальную точку M единичной массы, движущуюся в поле сил ньютоновского притягивающего центра O под действием внешней силы $\mathbf{f}$ негравитационной природы. Положение точки M в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ определим радиус-вектором $\mathbf{r}=OM$.

Уравнения движения точки M, очевидно, примут вид (μ — постоянная тяготения)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v},\qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}+\mathbf{f},\qquad r=|\mathbf{r}| \tag{1.1}$$

Допустим, что начальные условия движения и сила $\mathbf{f}$ таковы, что точка M во все время движения находится на известном постоянном удалении r_0 от притягивающего центра O. Тогда фазовые переменные системы (1.1) подчиняются ограничению

$$\psi_1=\mathbf{r}^2-r_0^2=0 \tag{1.2}$$

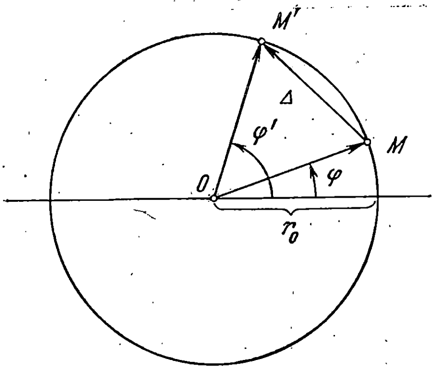
Ставится задача определения многообразия V решений уравнений (1.1) (при фиксированной внешней силе $\mathbf{f}$ и разных начальных условиях), подчиняющихся ограничению (1.2) на всем рассматриваемом отрезке времени.

2. Рассмотрим плоский случай движения материальной точки в поле сил притягивающего центра под действием внешней плоской силы негравитационной природы $\mathbf{f}(t)$, $t\in[0, T]$. Ограничимся движениями, лежащими на окружности S радиуса r_0. Они взаимно однозначно определяются полярным углом $\varphi(t)$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

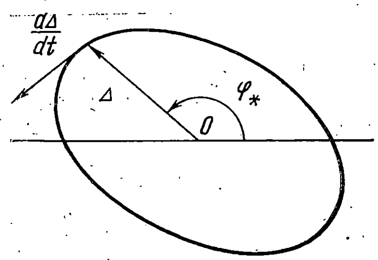
Определение. Две функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ называются сопряженными, если они описывают два различных движения, происходящих под действием одной и той же внешней силы $\mathbf{f}(t)$, $t\in[0, T]$, точек M и M', лежащих на S.

Задача 2.1. Даны два числа φ_0, $\varphi_0^{\cdot}$. Найти все движения $\varphi(t)$ ($\varphi(0)=\varphi_0$, $\varphi^{\cdot}(0)=\varphi_0^{\cdot}$), обладающие сопряженными.

Решение задачи. Не теряя общности, полагаем $\varphi_0=0$, $\varphi_0^{\cdot}\geqslant 0$. Если $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ — сопряженные функции, то вектор $\Delta=MM'$ (фиг. 1) подчи-



Фиг. 1



Фиг. 2

няется уравнению

$$d^2\Delta/dt^2+\omega_0^2\Delta=0, \qquad \omega_0^2=\mu/r_0^3 \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) описывает плоское движение материальной точки под действием центральной силы. Это движение происходит по эллипсу, который может вырождаться в отрезок (фиг. 2).

Для движения под действием центральной силы справедлив закон площадей

$$\rho^2 d\varphi_*/dt=p, \qquad \rho^2=|\Delta|^2, \qquad p=(\Delta\times\Delta^{\cdot})_3|_{t=0} \tag{2.2}$$

где φ_* — полярный угол вектора Δ.

Для вектора Δ с концами на S при $t=0$ имеют место соотношения

$$\Delta^2(0)=4r_0^2\sin^2 {}^1\!/_2\varphi'(0)$$

$$\Delta^{\cdot 2}(0)=r_0^2[(\varphi'^{\cdot}(0)+\varphi^{\cdot}(0))^2\sin^2 {}^1\!/_2\varphi'(0)+(\varphi'^{\cdot}(0)-\varphi^{\cdot}(0))^2\cos^2 {}^1\!/_2\varphi'(0)]$$

$$(\Delta(0),\ \Delta^{\cdot}(0))=r_0^2\sin\varphi'(0)\,(\varphi'^{\cdot}(0)-\varphi^{\cdot}(0)), \tag{2.3}$$

$$p=2r_0^2(\varphi'^{\cdot}(0)+\varphi^{\cdot}(0))\sin^2 {}^1\!/_2\varphi'(0)$$

В дальнейшем предположим, что выполняются условия

$$|\varphi^{\cdot}(0)|<\omega_0, \qquad |\varphi'^{\cdot}(0)|<\omega_0 \tag{2.4}$$

Как можно показать, это ограничение исключает случай, при котором ρ становится больше или равным $2r_0$.

Из геометрических рассмотрений движений концов вектора Δ по окружности S, определяющих функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$, можно прийти к следующему результату.

Движения, обладающие сопряженными, имеют вид

$$\varphi(t;\ \varphi'(0),\ \varphi'^{\cdot}(0))=(\xi(t)-\xi(0))+(\eta(0)-\eta(t))\operatorname{sign}{}^{\circ}\varphi'(0)$$

$$\xi(t)=\frac{p}{\omega_0(b^2-c^2)^{1/2}}\operatorname{arctg}\left\{\frac{b\operatorname{tg}[\omega_0(t+\delta)]+c}{(b^2-c^2)^{1/2}}\right\} \tag{2.5}$$

$$\eta(t)=\arcsin\frac{\rho(t)}{2r_0},\qquad 2b=\Delta^2(0)+\Delta^{\cdot 2}(0)\omega_0^{-2}$$

$$c^2=\left(\frac{\Delta^2(0)-\Delta^{\cdot 2}(0)\omega_0^{-2}}{2}\right)^2+\left(\frac{(\Delta(0),\Delta^{\cdot}(0))}{\omega_0}\right)^2,\qquad c>0$$

$$2c\sin 2\omega_0\delta=\Delta^2(0)-\Delta^{\cdot 2}(0)\omega_0^{-2}$$

$$c\cos 2\omega_0\delta=\frac{(\Delta(0),\Delta^{\cdot}(0))}{\omega_0},\qquad |\Delta|^2=b+c\sin 2\omega_0(t+\delta)$$

Здесь $\rho(t)$ — непрерывно-дифференцируемое в каждой точке решение уравнения $\rho^2(t)=|\Delta|^2$ при $t\geqslant 0$, удовлетворяющее условию $\rho(t)\geqslant 0$ в некоторой окрестности точки $t=0$;

$$\operatorname{sign}^\circ y=+1,\quad y>0;\qquad \operatorname{sign}^\circ y=-1,\quad y\leqslant 0$$

При $b=c$ положим, что $\xi(t)$ — тождественный нуль.

Область изменения параметров $\{\varphi'(0);\ \varphi^{\prime\cdot}(0)\}$, обозначенная через D, имеет вид

$$D=D_1\cup D_2,\qquad D_1=\{0<|\varphi'(0)|<\pi;\ \ |\varphi^{\prime\cdot}(0)|<\omega_0\}$$

$$D_2=\{0;\ -\varphi_0^{\cdot}\}\setminus\{0;\ 0\}$$

Заметим, что первое слагаемое выражения (2.5) есть явный вид определенного интеграла от функции $p\rho^{-2}$ (в пределах от 0 до t), равного $\varphi_*+\mathrm{const}$.

Итак, решение задачи 2.1 при ограничении (2.4) дается формулами (2.3), (2.5).

Замечание 2.1. Функции (2.5) — аналитические по t.

Замечание 2.2. Нетрудно убедиться (например, дифференцированием), что линейные функции не входят в класс функций (2.5). Поэтому, заменяя (гладко) любую функцию из (2.5) линейной функцией на сколь угодно малом отрезке времени, в силу замечания 2.1 получим функцию, не имеющую сопряженной.

Замечание 2.3. Движения, описываемые функциями (2.5) или им сопряженными (при $p\neq 0$), не позже, чем через $T^\circ=\pi/\omega_0\approx 42.2$ мин достигнут скорости, большей или равной первой космической. Это обстоятельство вытекает из того, что угловая скорость вращения вектора Δ, равная $d\varphi_*/dt$, периодична с периодом T°.

Утверждение 2.1. Пусть $|\varphi^{\cdot}(0)|<\omega_0$. Тогда у фиксированной функции $\varphi(t)$ не может быть более одной сопряженной функции.

Доказательство. Предположим, что у функции $\varphi(t)$ имеются две сопряженные $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, описывающие движения точек M_1 и M_2. Введем векторы $\Delta_i=MM_i$, $i=1, 2$. Нетрудно убедиться, что если точки M, M_1 и M_2 находятся на S, то выполняется соотношение

$$(\Delta_1-\Delta_2)^2=4r_0^2(1-\xi^2),\qquad \xi^2=\frac{(\Delta_1,\Delta_2)^2}{|\Delta_1|^2|\Delta_2|^2} \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) определено для тех моментов времени, для которых $|\Delta_i|\neq 0$, $i=1, 2$; в силу (2.1) очевидно, что таких моментов времени может быть лишь конечное число на любом конечном отрезке действительной оси.

В силу (2.1) также справедливы равенства

$$(\Delta_1,\Delta_2)^2=[A+B\cos(2\omega_0 t+\varepsilon)]^2$$

$$|\Delta_i|^2=[A_i+B_i\cos(2\omega_0 t+\varepsilon_i)] \quad (i=1,2) \tag{2.7}$$
$$(\Delta_1-\Delta_2)^2=[C+D\cos(2\omega_0 t+\nu)]$$

В (2.7) A, B, A_i, B_i, C, D, ε, ε_i, ν — постоянные величины.

Если выражения, стоящие слева и справа в равенстве (2.6), рассматривать как функции комплексного переменного z (вместо действительной переменной t), то, согласно известной теореме единственности, (2.6) должно выполняться на всей комплексной плоскости, а $\xi^2(z)$ — целая функция.

Исследовав нули числителя и знаменателя функции $\xi^2(z)$, учитывая (2.7), можно прийти к выводу, что одна из трех функций: $\xi^2(z)$, $|\Delta_1|^2(z)$ или $|\Delta_2|^2(z)$ есть тождественная константа. Если $\xi^2(z)\equiv\mathrm{const}$, то из (2.6) следует, что $(\Delta_1-\Delta_2)^2\equiv\mathrm{const}$. Таким образом, один из векторов Δ_1, Δ_2 или $(\Delta_1-\Delta_2)$ имеет постоянную длину и, следовательно, вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Это означает, что одна из точек M, M_1, M_2 движется с постоянной скоростью, равной первой космической. Поэтому $\mathbf{f}\equiv 0$, а тогда и точка M имеет первую космическую скорость, что противоречит условию утверждения 2.1.

Из решения задачи 2.1 и утверждения 2.1 следует, что в плоском случае уравнение (1.1) при условии (2.4) имеет не более двух решений, удовлетворяющих (1.2). Более того, «как правило», такое решение единственно.

3. В пространственном случае не удается получить столь же подробное решение задачи, как в рассмотренном плоском случае, однако можно получить ряд частных результатов.

Если продифференцировать соотношение (1.2) в силу уравнений (1.1), то нетрудно прийти к следующей цепочке ограничений на фазовые переменные системы (1.1):

$$\psi_1\equiv\mathbf{r}^2-r_0^2=0,\ \psi_2\equiv(\mathbf{r},\mathbf{v})=0$$
$$\psi_3\equiv\mathbf{v}^2-\mu r_0^{-1}+(\mathbf{f},\mathbf{r})=0,\ \psi_4\equiv3(\mathbf{f},\mathbf{v})+(\dot{\mathbf{f}},\mathbf{r})=0,\dots \tag{3.1}$$

Это дифференцирование можно продолжать неограниченно, однако, начиная с соотношения ψ_4, получаемые выражения будут содержать производные от величины внешней силы $\mathbf{f}$. Заметим, что при $\mathbf{f}\equiv\mathrm{const}$ (в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$) указанная цепочка ограничений имеет вид

$$\psi_1\equiv\mathbf{r}^2-r_0^2=0,\ \psi_2\equiv(\mathbf{r},\mathbf{v})=0$$
$$\psi_3\equiv\mathbf{v}^2-\mu r_0^{-1}+(\mathbf{f},\mathbf{r})=0 \tag{3.2}$$
$$\psi_4\equiv(\mathbf{f},\mathbf{v})=0,\ \psi_5\equiv\mathbf{f}^2-\mu r_0^{-3}(\mathbf{f},\mathbf{r})=0$$

При этом продолжение ее не приводит к новым по сравнению с (3.2) соотношениям.

Утверждение 3.1. Пусть движение точки M происходит по дуге большого круга сферы радиуса r_0 с постоянной угловой скоростью $0\leqslant\omega<\omega_0$. Тогда оно является единственным движением, происходящим под действием той же силы $\mathbf{f}$, удовлетворяющим (1.2).

Доказательство. В проекциях на скоростную систему координат, связанную с движением точки M, уравнения движения любой другой точки M', движущейся в том же поле под действием той же внешней силы, примут вид

$$\dot v_1=-\omega v_3-\omega_0^2 r_1,\ \dot v_3=\omega v_1-\omega_0^2 r_3+(\omega_0^2-\omega^2)r_0$$
$$\dot r_1=-\omega r_3+v_1,\ \dot r_3=\omega r_1+v_3 \tag{3.3}$$
$$\dot v_2=-\omega_0^2 r_2,\ \dot r_2=v_2$$

Ясно, что совокупность $\{v_1=\omega r_0,\ v_3=0,\ r_1=0,\ r_3=r_0,\ v_2=0,\ r_2=0\}$ является решением системы (3.3). Покажем, что других решений этой системы, таких, что выполняется

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=r_0^2 \tag{3.4}$$

не существует, если $0\leqslant\omega<\omega_0$.

Действительно, решение системы (3.3) относительно r_1, r_3, r_2 дается формулами

$$\begin{gathered} r_1=A_1\sin[(\omega_0+\omega)t+\delta_1]+A_3\sin[(\omega-\omega_0)t+\delta_3] \\ r_3=-A_1\cos[(\omega_0+\omega)t+\delta_1]-A_3\cos[(\omega-\omega_0)t+\delta_3]+r_0 \\ r_2=A_2\cos(\omega_0 t+\delta_2) \end{gathered} \tag{3.5}$$

в которых A_i и δ_i $(i=1,2,3)$ — постоянные. Найдем все A_i $(i=1,2,3)$, при которых выполняется (3.4)

$$\begin{gathered} r_0^2=A_1^2+A_3^2+{}^1/_2A_2^2+2A_1A_3\cos[2\omega_0t+(\delta_1-\delta_3)]+ \\ +r_0^2-2r_0A_1\cos[(\omega+\omega_0)t+\delta_1]- \\ -2r_0A_3\cos[(\omega-\omega_0)t+\delta_3]+{}^1/_2A_2^2\cos(2\omega_0t+2\delta_2) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Соотношение (3.6) можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} c+c_1\cos(2\omega_0t+\lambda_1)+c_2\cos((\omega_0+\omega)t+\lambda_2)+ \\ +c_3\cos((\omega-\omega_0)t+\lambda_3)=0,\quad c=A_1^2+A_3^2+{}^1/_2A_2^2 \end{gathered} \tag{3.7}$$

В (3.7) c_1, c_2, c_3, λ_1, λ_2, λ_3 — некоторые постоянные.

Лемма. Пусть $0\leqslant\omega<\omega_0$ и выполняется (3.7). Тогда $c=c_1=c_2=c_3=0$.

Утверждение леммы легко получить, если заметить, что левая часть (3.7) есть решение некоторого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и характеристическими корнями

$$\mu_1=0,\ \mu_{2,3}=\pm2i\omega_0,\ \mu_{4,5}=\pm i(\omega_0+\omega),\ \mu_{6,7}=\pm i(\omega-\omega_0)$$

Итак, $c=0$, следовательно, $A_1=A_2=A_3=0$ и утверждение 3.1 доказано.

Сравним результаты решения задачи о наблюдаемости в большом с результатами решения задачи о наблюдаемости в линейной постановке при общих, для данной работы и [2], режимах движения объекта: по дуге большого круга сферы с постоянной угловой скоростью ω.

При учете полных уравнений многообразие V как в пространственном, так и в плоском случаях состоит из единственной траектории. При линеаризации уравнений ошибок инерциальной навигационной системы соответствующее многообразие n параметрично: в пространственном случае — при $\omega\neq0$, $n=2$, при $\omega=0$, $n=4$; в плоском случае — при $\omega=0$, $n=2$.

Таким образом, учет нелинейностей «улучшает наблюдаемость».

Утверждение 3.2. Пусть $\mathbf{r}_\alpha(t)$, $t\in[0,T^\circ]$, $T^\circ=\pi/\omega_0$ — радиус-векторы множества материальных точек $\{M_\alpha\}$, движущихся согласно уравнениям (1.1) и (1.2). Пусть, кроме того, движение одной из этих точек — точки M, определяемое радиус-вектором $\mathbf{r}(t)$, происходит со скоростью, меньшей первой космической. Тогда все точки из $\{M_\alpha\}$ лежат в одной плоскости.

Доказательство. Если число точек меньше или равно трем, то утверждение очевидно. Поэтому доказательство проводится для точек M, M_1, M_2, M_3, где M_1, M_2, M_3 — любая тройка точек из $\{M_\alpha\}$.

Введем $\boldsymbol{\Delta}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}$, $i=1,2,3$. Утверждение 3.1 эквивалентно выполнению соотношения

$$D(t)=\det\|\boldsymbol{\Delta}_1,\ \boldsymbol{\Delta}_2,\ \boldsymbol{\Delta}_3\|=0 \tag{3.8}$$

Очевидно, $\boldsymbol{\Delta}_i$ подчиняются уравнениям

$$d^2\boldsymbol{\Delta}_i/dt^2+\omega_0^2\boldsymbol{\Delta}_i=0 \quad (i=1,2,3)$$

и поэтому имеют вид

$$\boldsymbol{\Delta}_i=\mathbf{a}_i\cos\omega_0 t+\mathbf{b}_i\sin\omega_0 t \quad (i=1,2,3)$$

где $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ — постоянные векторы.

Из (1.2) следует выполнение условий

$$(\mathbf{r}+\boldsymbol{\Delta}_i)^2=r_0^2 \quad (i=1,2,3)$$

или условий

$$(\boldsymbol{\Delta}_i,\mathbf{r})=-{}^1/_2\boldsymbol{\Delta}_i^2 \quad (i=1,2,3) \tag{3.9}$$

Равенства (3.9) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений третьего порядка относительно компонент вектора $\mathbf{r}=\|r_1,\ r_2,\ r_3\|^T$. Введем вектор $\boldsymbol{\Delta}=\|-{}^1/_2\Delta_1^2,\ -{}^1/_2\Delta_2^2,\ -{}^1/_2\Delta_3^2\|^T$.

Предположим, что (3.8) не выполняется при $t\in N$, N — множество отрезка $[0,\ T^\circ]$. Тогда решение (3.9) запишется следующим образом:

$$r_i=\alpha_i(t)/D(t) \quad (i=1,2,3) \quad t\in N \tag{3.10}$$

где $\alpha_i(t)$ и $D(t)$ — соответствующие определители, составленные из элементов векторов $\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\Delta}_1$, $\boldsymbol{\Delta}_2$, $\boldsymbol{\Delta}_3$, являющиеся тригонометрическими полиномами степени не выше четвертой. Отметим, что $\alpha_i(t+T^\circ)=\alpha_i(t)$, $D(t+T^\circ)=-D(t)$. Поэтому на отрезке $[0,\ T^\circ]$ может быть лишь конечное число особых точек (полюсов) функций $\alpha_i(t)/D(t)$, а N состоит из отрезка $[0,\ T^\circ]$ без конечного числа «выколотых» точек. Все эти особые точки — устранимые. Действительно, из (1.2) и (3.10) следует, что

$$\sum_1^3\left(\frac{\alpha_i(t)}{D(t)}\right)^2\equiv r_0^2, \qquad t\in N \tag{3.11}$$

Если какая-нибудь из особых точек является полюсом, то (3.11) не может выполняться.

Итак, $\mathbf{r}(t)$, задаваемый (3.10),— единственное непрерывное решение (3.9) при условии (1.2). Справедлива цепочка равенств

$$r_i(0)=\lim_{\varepsilon\to0}\alpha_i(\varepsilon)/D(\varepsilon)=-\lim_{\varepsilon\to0}\alpha_i(T^\circ+\varepsilon)/D(T^\circ+\varepsilon)=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to0}\alpha_i(T^\circ-\varepsilon)/D(T^\circ-\varepsilon)=-r_i(T^\circ) \quad (i=1,2,3) \tag{3.12}$$

Из (3.12) следует, что через половину периода Шулера точка перешла в противоположное, относительно притягивающего центра, положение, оставаясь на сфере радиуса r_0. Следовательно, ее скорость в некоторые моменты времени была больше или равной первой космической скорости. Это противоречит исходному допущению и доказывает утверждение 3.2.

Отметим, что в отличие от [2] здесь не приводятся конструктивные алгоритмы получения оценок навигационных параметров, основанные на приведенных выше свойствах уравнения движения материальной точки. Поэтому данная работа носит теоретический характер.

Автор благодарит Е. А. Девянина за ценные замечания и внимание к работе.

Поступила 29 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Девянин Е. А.* Механика инерциальных навигационных систем. Научн. тр. Н.-и. ин-та механики МГУ, 1973, т. 29.
2. *Парусников Н. А.* Использование информации о высоте в задаче инерциальной навигации. Научн. тр. Н.-и. ин-та механики МГУ, 1975, т. 40.
3. *Девянин Е. А.* Об общих уравнениях систем инерциальной навигации. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.