

ОПТИМИЗАЦИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗКАХ

А. В. АЛБУЛ, Н. В. БАНИЧУК, А. А. БАРСУК

(Москва, Кишинев)

Рассмотрены задачи определения оптимальных форм сжатых упругих стержней при тепловых нагрузках. В качестве максимизируемого функционала принято критическое значение температуры, при котором происходит потеря устойчивости, а роль искомой управляющей функции играет форма (распределение толщин) стержня. Оптимальное решение найдено для различных типов стержней, условий закрепления их концов и конструктивных ограничений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об устойчивости прямолинейной формы равновесия нагретого стержня. Предположим, что стержень переменной толщины расположен вдоль оси x и шарнирно закреплен в точках $x=0$ и $x=l$. В исходном ненагретом состоянии длина стержня равна l , поэтому до нагрева осевые напряжения в стержне отсутствуют. Обозначим через T приращение температуры при нагреве стержня. Так как положение концов стержня на оси x фиксировано, то в точках крепления при нагреве будут действовать сжимающие реакции R , предотвращающие тепловое расширение стержня. Величина реакции R связана с приращением температуры T соотношением

$$R = \beta E l T \left(\int_0^l \frac{dx}{S(x)} \right)^{-1} \quad (1.1)$$

где β , E — соответственно коэффициент линейного расширения и модуль Юнга материала стержня, а через $S = S(x)$ обозначено распределение площадей поперечных сечений.

С увеличением температуры нагрева T увеличивается сила сжатия R и при некоторой критической величине T сжимающая нагрузка R достигает значения, при котором теряется устойчивость прямолинейной формы равновесия и происходит продольный изгиб стержня. Согласно методу Эйлера, величина критической силы R определяется как минимальное собственное значение однородной краевой задачи

$$EJw_{xxx} + Rw = 0, \quad w(0) = w(l) = 0 \quad (1.2)$$

Через $w = w(x)$ и $J = J(x)$ обозначены функция прогибов и момент поперечного сечения стержня. Ниже рассматриваются стержни, для которых зависимость момента инерции J от площади поперечного сечения может быть представлена в виде

$$J = A_\alpha S^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

Значения параметров α , A_α в (1.3) определяются типом поперечных сечений стержней. Так, для стержней прямоугольного поперечного сечения переменной ширины $h_2(x)$ и постоянной высоты $h_1(x)$ эти параметры

равны $\alpha=1$, $A_1=h_1^2$ ($J=h_1^2 S(x)$). В случае же постоянной ширины h_2 и переменной высоты $h_1(x)$ имеем $\alpha_3=3$, $A_3=1/12 h_2^2$ ($J=S^3(x)/12 h_2^2$).

Для круглых стержней переменного радиуса $\alpha=2$, $A_2=1/4\pi$ ($J=S^2/4\pi$). Квадратичная зависимость J от S имеет место также для стержней, поперечные сечения которых представляют собой подобные фигуры.

Для заданного типа поперечного сечения и при фиксированном распределении $S=S(x)$ на основе решения краевой задачи (1.2) и использования соотношений (1.1), (1.3) может быть найдена величина критической температуры T , при которой теряется устойчивость, и соответствующее распределение прогибов.

От распределения толщин $S(x)$ существенно зависит величина реакции R (см. (1.1)) и изгибная жесткость. Варьирование распределения площадей (толщин) $S(x)$ влечет изменение указанных характеристик и тем самым приводит к изменению величины критической температуры. В связи с этим представляет интерес задача максимизации критической температуры за счет отыскания наилучшего распределения толщин. Приведем точную формулировку задачи оптимизации.

Требуется найти распределение площадей поперечных сечений, удовлетворяющее ограничениям

$$S_1 \leq S(x) \leq S_2 \quad (1.4)$$

условию постоянства объема

$$\int_0^l S(x) dx = V \quad (1.5)$$

и доставляющее максимум критическому значению температуры

$$T_* = \max_S T \quad (1.6)$$

где T вычисляется на основе соотношений (1.1)–(1.3). Через S_1 , S_2 , V обозначены заданные положительные константы. Распределение площадей $S(x)$ играет в сформулированной задаче оптимизации (1.1)–(1.6) роль «управляющей» функции, а уравнение (1.3) выступает в качестве дифференциальной связи.

Сделаем некоторые замечания по постановке задачи.

1. В задаче об устойчивости прямолинейной формы равновесия нагретого стержня предполагалось, что положение концевых точек фиксировано на оси x . При потере устойчивости стержень удлиняется и происходит разгрузка. Величины критической нагрузки и сжимающей силы, при которой существуют равновесные искривленные состояния стержня, близкие к прямолинейному, будут различаться. Поэтому рассматриваемая задача отличается от классической задачи об устойчивости упругого стержня, сжатого «мертвыми» нагрузками, и требуются дополнительные рассмотрения относительно применимости классической схемы метода Эйлера. Этот вопрос обсуждался в [1], где было показано, что различие в силах при малых смещениях стержня является величиной более высокого порядка малости (относительно характерного размера смещения) и им можно пренебречь при исследовании устойчивости.

2. Если в рассмотренной задаче оптимизации на искомое распределение толщин не накладывать «нижнее» ограничение (1.4) (в формуле (1.4) полагается $S_1=0$), то можно указать распределение толщин, для которого $R=0$ при любых конечных значениях T и стержень не теряет устойчивости. Действительно, пусть стержень имеет в точке $x=0$ острый кончик, а функция $S(x)$ в окрестности указанной ($0 \leq x \leq \varepsilon < l$) точки представляется в виде $S(x) = cx^m$, где $m \geq 1$. Тогда для любого распределения толщин

($\varepsilon \leq x \leq l$) с указанной асимптотикой при $0 \leq x \leq \varepsilon$ величина реакции R , подсчитываемая по формуле (1.1), обращается в нуль.

2. Условие оптимальности. Для вывода необходимого условия оптимальности удобно переформулировать задачу и исключить дифференциальную связь (1.2). С этой целью заметим, что отыскание критической температуры и соответствующей функции $w(x)$ может быть сведено к решению эквивалентной вариационной задачи минимизации неаддитивного функционала

$$T = \frac{A\alpha}{\beta l} \min_w \left(\int_0^l \frac{dx}{S} \right) \left(\int_0^l w_x^2 dx \right) \left(\int_0^l \frac{w^2}{S^\alpha} dx \right)^{-1} \quad (2.1)$$

Минимум в (2.1) разыскивается на классе функций, удовлетворяющих краевым условиям. С использованием соотношения (2.1) исходная задача (1.1) — (1.6) редуцируется к минимаксной задаче оптимизации без дифференциальных связей

$$T_* = \frac{A\alpha}{\beta l} \max_S \min_w \left(\int_0^l \frac{dx}{S} \right) \left(\int_0^l w_x^2 dx \right) \left(\int_0^l \frac{w^2}{S^\alpha} dx \right)^{-1} \quad (2.2)$$

Внешний максимум по S в (2.2) разыскивается на классе функций $S=S(x)$, удовлетворяющих условиям (1.4), (1.5). Двусторонние неравенства (1.4), наложенные на управляющую функцию $S(x)$, удобно учесть, введя вспомогательную управляющую функцию $\varphi(x)$, связанную с S соотношением

$$S = \mu_1 + \mu_2 \sin \varphi, \quad \mu_1 = 1/2(S_1 + S_2), \quad \mu_2 = 1/2(S_2 - S_1) \quad (2.3)$$

Введение функции φ позволяет исключить из рассмотрения условие (1.4). Единственное ограничение на φ накладывается изопериметрическим условием (1.5). Из этого условия и выражений (2.3) следует, что

$$\int_0^l \sin \varphi dx = \gamma, \quad \gamma = \mu_2^{-1}(V - \mu_1 l) \quad (2.4)$$

Запишем выражение для первой вариации оптимизируемого функционала, обусловленной вариацией вспомогательной управляющей функции

$$\delta T = \int_0^l \Lambda \cos \varphi \delta \varphi dx, \quad \Lambda = \frac{B_1 w^2}{(\mu_1 + \mu_2 \sin \varphi)^{\alpha+1}} - \frac{B_2}{(\mu_1 + \mu_2 \sin \varphi)^2} \quad (2.5)$$

$$B_1 = \alpha \mu_2 \left(\int_0^l \frac{dx}{\mu_1 + \mu_2 \sin \varphi} \right) \left(\int_0^l w_x^2 dx \right) \left(\int_0^l \frac{w^2 dx}{(\mu_1 + \mu_2 \sin \varphi)^\alpha} \right)^{-2}$$

$$B_2 = \mu_2 \left(\int_0^l w_x^2 dx \right) \left(\int_0^l \frac{w^2}{(\mu_1 + \mu_2 \sin \varphi)^\alpha} dx \right)^{-1}$$

Изопериметрическое условие (2.4) накладывает на возможные вариации $\delta \varphi$ ограничение

$$\int_0^l \cos \varphi \delta \varphi dx = 0 \quad (2.6)$$

С учетом соотношений (2.5), (2.6) необходимое условие оптимальности ($\delta T=0$) примет вид (λ — множитель Лагранжа)

$$(\Lambda - \lambda) \cos \varphi = 0 \quad (2.7)$$

3. Численное решение. При проведении расчетов использовались безразмерные переменные и обозначения

$$x' = \frac{x}{l}, \quad S' = \frac{lS}{V}, \quad S_1' = \frac{lS_1}{V}, \quad S_2' = \frac{lS_2}{V},$$

$$T' = \frac{\beta l^{\alpha+1} T}{A_\alpha V^{\alpha-1}}, \quad R' = \frac{l^{\alpha+2} R}{A_\alpha E V^\alpha}$$

В безразмерных переменных (штрихи опускаем) отыскание оптимальных распределений толщин велось на отрезке $0 \leq x \leq 1$ для стержней единичного объема. Применялся вычислительный алгоритм последовательной оптимизации [2, 3], основанный на малых вариациях управляющей функции и решениях прямых задач отыскания прогибов и критических температур, отвечающих текущим распределениям толщин стержня. Решение прямых задач (1.2) осуществлялось итерационным методом, описанным в [4]. Вариации управляющей функции определялись по формуле (τ заданная константа)

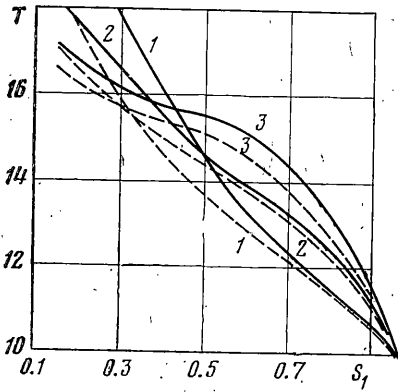
$$\delta \varphi = \tau \psi, \quad \psi = \cos \varphi \left[\Lambda - \int_0^1 \Lambda \cos^2 \varphi \, dx \left(\int_0^1 \cos^2 \varphi \, dx \right)^{-1} \right] \quad (3.4)$$

При использовании формулы (3.4), как нетрудно проверить, вариация δT , подсчитываемая согласно (2.5), будет положительной и, кроме того, будет выполнено условие (2.6). Таким образом, для указанной вариации $\delta \varphi$ происходит увеличение максимизируемого функционала и не нарушается изопериметрическое условие постоянства объема.

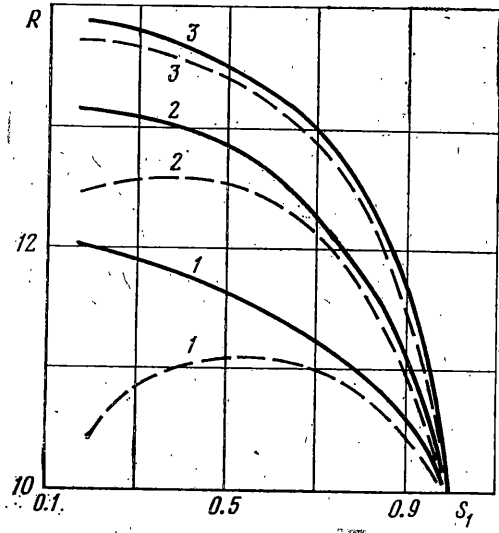
Расчет оптимальных форм проводился для ряда значений параметров S_1, S_2 и для различных типов поперечных сечений стержней ($\alpha=1, 2, 3$). В результате были найдены оптимальные распределения $S(x)$ и соответствующие им значения T_* . При достаточно больших значениях S_2 верхнее ограничение в (1.5) выполняется со знаком строгого неравенства и решения не зависят от параметра S_2 . Соответствующие этому случаю значения T_* и оптимальные распределения площадей поперечных сечений показаны на фиг. 1–4.

На фиг. 1 показаны полученные в результате расчетов распределения критической температуры T_* в зависимости от значений параметра S_1 для оптимальных стержней. Кривые 1, 2, 3 отвечают соответственно значениям $\alpha=1, 2, 3$. С увеличением S_1 для всех указанных случаев критические температуры уменьшаются. Это объясняется тем, что при увеличении S_1 уменьшается количество материала стержня, которое можно перераспределить, и тем самым ограничивается возможность оптимизации. При $S_1=1$ единственное распределение толщин, допускаемое условиями (1.4), (1.5), имеет вид $S(x)=S_1=1$. В этой точке значения оптимизируемых функционалов совпадают.

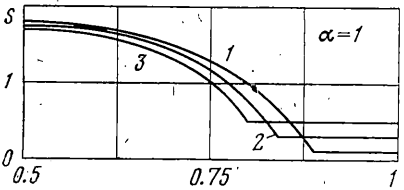
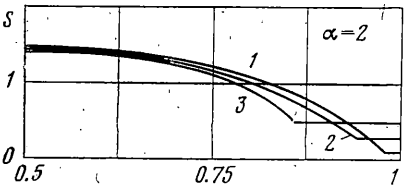
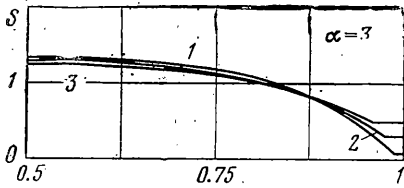
Оптимальные распределения площадей $S(x)$ для случаев $\alpha=1, 2, 3$ представлены на фиг. 2. На графиках кривые 1, 2, 3 отвечают значениям $S_1=0.1, 0.3, 0.5$. Ввиду имеющейся симметрии относительно точки $x=1/2$ все распределения $S(x)$ показаны при $1/2 \leq x \leq 1$. Найденные решения показывают, что для оптимального шарнирно-закрепленного стержня основная масса материала концентрируется в средней его части, а на краях тол-



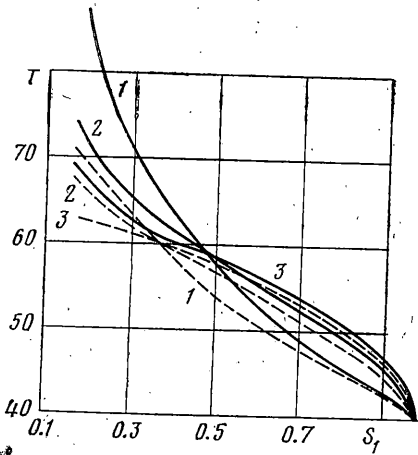
Фиг. 1



Фиг. 3



Фиг. 2

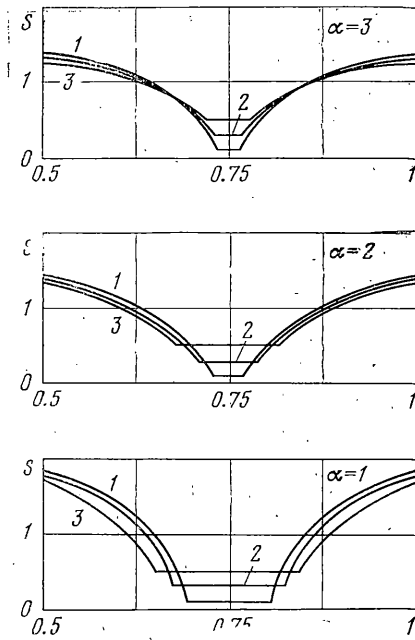


Фиг. 4

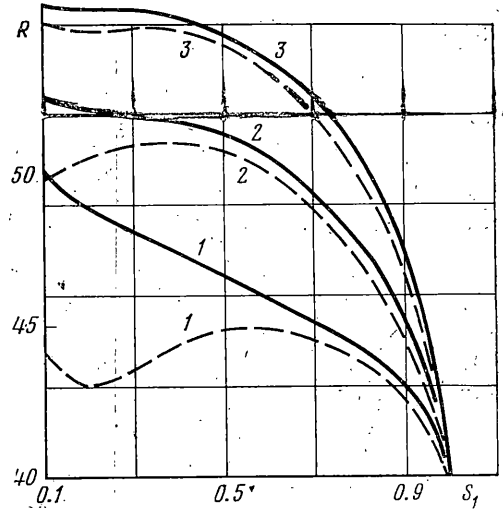
щина достигает минимально возможного значения. С увеличением S_1 удлиняются участки оптимальных стержней, где распределение толщин постоянно и равно минимальному значению.

Наряду с критической температурой T важной характеристикой задачи является величина реакции R , связанная с T соотношением (1.1). На фиг. 3 штриховыми кривыми 1, 2, 3, соответствующими случаям $\alpha=1, 2, 3$, показана зависимость R от S_1 для оптимальных стержней.

Представляет также интерес отыскание распределений $S(x)$ из условия максимума величины $R (R_* = \max_s R)$, при которой теряется устойчивость. Эта задача сводится к исследованной ранее [5-11] задаче оптимизации устойчивости стержня, сжимаемого силами, приложенными к концам. Распределения толщин, доставляющие максимум реакции R , находятся в качественном соответствии с показанными на фиг. 2, а рассчитанные зависи-



Фиг. 5



Фиг. 6

мости R_* от S_1 для случаев $\alpha=1, 2, 3$ представлены на фиг. 5 кривыми 1, 2, 3. Для этих распределений толщин графики зависимостей T от S_1 (штриховые линии 1, 2, 3) располагаются на фиг. 1 несколько ниже соответствующих оптимальных кривых 1—3.

4. Оптимизация форм жестко заземленных стержней. В случае жесткого заземления концов стержня краевая задача изгиба, граничные условия и выражения для критической температуры запишутся в виде

$$(EJw_{xx})_{xx} + R w_{xx} = 0, \quad w(0) = w_x(0) = w(l) = w_x(l) = 0 \quad (4.1)$$

$$T = \frac{A_\alpha}{\alpha l} \min_w \left(\int_0^l \frac{dx}{S} \right) \left(\int_0^l J w_{xx}^2 dx \right) \left(\int_0^l w_x^2 dx \right)^{-1}$$

Остальные соотношения (1.1), (1.3)—(1.6) остаются неизменными. Задача оптимизации (1.1), (1.3)—(1.6), (4.1) решалась аналогичным способом. При проведении расчетов использовались те же безразмерные переменные. Полученные в результате расчетов распределения площадей сечений $S(x)$ и зависимости T_* от S_1 представлены на фиг. 4, 5. Сплошные кривые 1, 2, 3 на фиг. 4 и графики $S(x)$ на фиг. 5 соответствуют значениям $\alpha=1, 2, 3$ и достаточно большим значениям S_2 , когда верхнее ограничение (1.4) является несущественным (в (1.4) реализуется знак строгого неравенства). Из рассмотрения зависимостей $S(x)$, показанных на фиг. 5, видно, что основная масса материала сконцентрирована в центральной части и по краям оптимального стержня. В переходных областях функции $S(x)$ достигают минимального возможного значения S_1 .

В расчетах было выявлено, что при уменьшении параметра S_1 происходит сближение первых двух собственных значений краевой задачи (4.1) и при достаточно малом S_1 первое собственное значение становится кратным. Построение оптимального решения для случая кратных собственных значений требует применения особой методики и здесь не излагается.

Для сравнения на фиг. 4 штриховыми линиями 1, 2, 3 ($\alpha=1, 2, 3$) показаны распределения критических температур $T(S_1)$ для $S(x)$, найденных из условия $R_* = \max_S R$. Соответствующие данным распределениям $S(x)$ зависимости $R_*(S_1)$ изображены сплошными кривыми 1-3 на фиг. 6. На том же графике штриховыми линиями 1, 2, 3, отвечающими $\alpha=1, 2, 3$, показаны величины реакций R для стержней, формы которых найдены из условия максимальности критической температуры.

Авторы благодарят А. А. Миронова за полезное обсуждение работы.

Поступила 27 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов, М., «Наука», 1973.
2. Баничук Н. В., Миронов А. А. Оптимизация частот колебаний упругой пластинки в идеальной жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
3. Баничук Н. В.; Каргвелишвили В. М., Миронов А. А. Об одном численном методе решения двумерных задач оптимизации в теории упругости. В сб.: Материалы V Всес. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, ч. 2. Новосибирск, Ин-т теорет. и прикл. механ. СО АН СССР, 1978.
4. Коллагу Л. Задачи на собственные значения. М., «Наука», 1968.
5. Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes. Miscellanea Taurinensia, 1770-1773, t. 5, p. 123.
6. Clausen T. Uber die Form architektonischer Säulen. Bull. phys.-math. de l'Academie de St.-Peterbourg, 1851, t. 9, Nr. 24.
7. Николаи Е. Л. Задача Лагранжа о наиболее выгоднейшем очертании колонн. Изв. Петерб. политехн. ин-та, 1907, т. 8, вып. 1.
8. Ченцов Н. Г. Стойки наименьшего веса. Тр. ЦАГИ, 1936, вып. 265.
9. Keller J. B. The shape of the strongest column. Arch. rational mech. and analysis, 1960, vol. 5, No. 4.
10. Tadjabakhsh I., Keller J. B. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues. Trans. ASME, Ser. E. J Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 1.
11. Баничук Н. В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 4.