

РАСЧЕТ ЛОКАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Н. А. АЛФУТОВ, Б. Г. ПОПОВ

(Москва)

Получено точное численное решение известной задачи об устойчивости прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами. Решение получено вариационным методом на основе энергетического критерия устойчивости, выраженного через статически возможные начальные напряжения и не требующего определения действительного напряженного состояния.

Устойчивость прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами, неоднократно рассматривалась различными авторами, получавшими тем или иным приближенным способом критическое значение нагрузки. Обычно решению задачи устойчивости предшествовало решение задачи определения начального напряженного состояния пластины, причем в случае действия на пластину сосредоточенных сил эта последняя задача тоже решалась приближенно. Энергетический критерий устойчивости, предложенный в [1], позволяет обойти трудности, связанные с определением начального напряженного состояния.

Задачу устойчивости пластины рассмотрим в обычной классической постановке, т. е. будем считать материал пластины линейно-упругим, пластину до потери устойчивости идеально плоской и найдем то значение внешней нагрузки, при превышении которого плоское состояние равновесия пластины перестанет быть устойчивым. При этом считаем, что начальное состояние пластины описывается соотношениями линейной теории упругости и изменением начальных размеров пластины можно полностью пренебречь.

1. Для определения критических нагрузок воспользуемся [1, 2] энергетическим критерием в форме $\delta(\Delta U) = 0$, где ΔU — изменение полной потенциальной энергии системы при переходе к отклоненному положению равновесия. Для прямоугольных пластин функционал ΔU может быть представлен в виде

$$\Delta U = \int_0^a \int_0^b \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \lambda \left[\frac{h}{2} \left(\sigma_x^* \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y^* \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy}^* \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{h}{E} (\sigma_x^* + \sigma_y^*) \nabla^2 \varphi \right] \right\} dx dy \quad (1.1)$$

Здесь E , ν , D — модуль упругости, коэффициент Пуассона и изгибная жесткость; a , b , h — габаритные размеры пластины вдоль осей x , y , z соответственно; σ_x^* , σ_y^* , τ_{xy}^* — статически возможные напряжения для заданного варианта нагружения; λ — параметр нагружения; w — бифуркационные нормальные прогибы первого порядка малости; φ — функция напря-

жения, удовлетворяющая уравнению

$$\nabla^4 \varphi = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (1.2)$$

и граничным условиям на контуре $\varphi = 0, \partial\varphi/\partial n = 0$.

Статически возможные напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия внутри контура пластины

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} = 0$$

и силовым граничным условиям на контуре.

2. Приближенное решение для определения критических нагрузок можно построить с помощью рядов. Нормальное перемещение w и функцию напряжения φ разложим в ряды. Для дальнейших выкладок ряды разложения более удобно представить в виде одинарных, а не двойных сумм. В случае удержания конечного числа членов ряда такое представление аналогично построчному перестроению всех коэффициентов матрицы в один вектор. Полученная при таком формальном преобразовании одинарная индексация позволяет разложение функций в ряды представить в виде скалярных произведений

$$w = \sum_{i=1}^M \alpha_i w_i = (\alpha \cdot W), \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i = (\beta \cdot \Phi) \quad (2.1)$$

$$\alpha = \|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M\|^T, \quad \beta = \|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\|^T$$

где T — знак транспонирования. Компоненты векторов W и Φ представляют функции, удовлетворяющие предварительным граничным условиям

$$W = \|w_1(x, y), w_2(x, y), \dots, w_M(x, y)\|^T \quad (2.2)$$

$$\Phi = \|\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_N(x, y)\|^T$$

Здесь M, N — число удерживаемых членов в разложениях для w и φ .

Поскольку функции φ и w связаны уравнением (1.2), то коэффициенты разложений α и β нельзя считать независимыми. Связь между ними установим путем решения уравнения (1.2) по методу Бубнова — Галеркина

$$\begin{aligned} & \iint_{0^0}^{a^b} (\beta \cdot \nabla^4 \varphi) \varphi_m dx dy = \\ & = \iint_{0^0}^{a^b} E \left[\left(\alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} W \right)^2 - \left(\alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} W \right) \left(\alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} W \right) \right] \varphi_m dx dy \end{aligned} \quad (2.3)$$

($m=1, 2, \dots, N$)

После интегрирования (2.3) получим относительно коэффициентов β линейную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^N a_{mn} \beta_n = (R^m \alpha \cdot \alpha) \quad (m=1, 2, \dots, N), \quad a_{mn} = \iint_{0^0}^{a^b} (\nabla^4 \varphi_n) \varphi_m dx dy \quad (2.4)$$

Для каждой m -й строки системы (2.4) правая часть представляет квадратичную форму относительно коэффициентов α . Элемент симметричной матрицы \mathbf{R}^m , соответствующий i -й строке и j -му столбцу, согласно (2.3), определяется по формуле

$$r_{ij}^m = \iint_{00}^{ab} E \left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \right] \varphi_m dx dy \quad (2.5)$$

($i, j=1, 2, \dots, M; \quad m=1, 2, \dots, N$)

Система (2.4) в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{A}\beta = \mathbf{r}_{11}\alpha_1^2 + \mathbf{r}_{12}\alpha_1\alpha_2 + \dots + \mathbf{r}_{MM}\alpha_M^2 \quad (2.6)$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \|r_{ij}^1, r_{ij}^2, \dots, r_{ij}^N\|^T$$

где \mathbf{A} — матрица коэффициентов a_{mn} . Решением системы (2.6) будет вектор

$$\beta = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{r}_{11}\alpha_1^2 + \mathbf{r}_{12}\alpha_1\alpha_2 + \dots + \mathbf{r}_{MM}\alpha_M^2) \quad (2.7)$$

Таким образом устанавливается связь между векторами β и α . Очевидно, что каждый коэффициент β_m разложения функции φ представляет квадратичную функцию относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$:

$$\beta_m = (\mathbf{G}^m \alpha \cdot \alpha) \quad (m=1, 2, \dots, N), \quad g_{ij}^m = \sum_{n=1}^N a_{mn}^* r_{ij}^n \quad (i, j=1, 2, \dots, M) \quad (2.8)$$

где a_{mn}^* — элементы обратной матрицы \mathbf{A}^{-1} , а g_{ij}^m — элементы симметричной матрицы \mathbf{G}^m .

Для функций перемещений и напряжений, представленных в виде рядов (2.1), с учетом связи коэффициентов разложения (2.8) функционал (1.1) будет однородной квадратичной функцией относительно коэффициентов α :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \left(\left[\mathbf{K} - \lambda \left(\mathbf{M} - \sum_{m=1}^N d_m \mathbf{G}^m \right) \right] \alpha \cdot \alpha \right) \quad (2.9)$$

Элементы симметричных матриц \mathbf{K} , \mathbf{M} и коэффициенты d_m определяются следующими соотношениями:

$$k_{ij} = \iint_{00}^{ab} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + (1-\nu) \left(2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \right\} dx dy \quad (2.10)$$

$$m_{ij} = - \iint_{00}^{ab} h \left\{ \sigma_x^* \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \sigma_y^* \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \right. \\ \left. + \tau_{xy}^* \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial x} \right) \right\} dx dy \quad (i, j=1, 2, \dots, M)$$

$$d_m = -2 \iint_{00}^{ab} \frac{h}{E} (\sigma_x^* + \sigma_y^*) \nabla^2 \varphi_m dx dy \quad (m=1, 2, \dots, N)$$

Условие стационарности квадратичной функции (2.9) приводит к однородной системе алгебраических уравнений

$$\left[K - \lambda \left(M - \sum_{m=1}^N d_m G^m \right) \right] \alpha = 0$$

для нетривиального решения которой необходимо и достаточно равенство нулю ее определителя. Последнее условие позволяет определить критический параметр нагружения λ .

3. Рассмотрим задачу устойчивости шарнирно-опертой по контуру прямоугольной пластины, нагруженной на части противоположных сторон сжимающими нагрузками. В качестве функций разложения для w и φ примем

$$w_i = \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \quad (i=1, 2, \dots, M),$$

$$\varphi_m = \sin^2 \frac{r\pi x}{a} \sin^2 \frac{s\pi y}{b} \quad (m=1, 2, \dots, N).$$
(3.1)

При такой записи необходимо связать номера индексов i и m с парами целых чисел k, l и r, s соответственно. Например, если в разложении w по координате x удерживаются первые две гармоники, а по y первые три гармоники, то связь индексов с номерами гармоник можно представить в виде

i	1	2	3	4	5	6
k, l	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3

Следует отметить, что для прямоугольных пластин, закрепленных по контуру, полной системой функций для φ будет набор парных произведений $\varphi_m(x, y) = X_r(x) Y_s(y)$, где в качестве $X_r(x), Y_s(y)$ можно взять собственные функции задачи устойчивости заземленного по торцам стержня. В случае статически возможных напряжений, симметричных относительно осей $x=a/2, y=b/2$, отличные от нуля коэффициенты d_m (2.10) будут соответствовать лишь симметричным формам φ_m (3.1).

Для выполнения интегрирования соответствующих уравнений введем дополнительные обозначения

$$w_j = \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b}, \quad \varphi_n = \sin^2 \frac{f\pi x}{a} \sin^2 \frac{t\pi y}{b}$$

где p, q, f, t — целые числа. Соответствие значений j, n и пар целых чисел p, q и f, t такое же, как и для (3.1).

Для принятой схемы нагружения (фиг. 3) в качестве статически возможных примем напряжения

$$\sigma_x^* = -1/(ch), \quad 1/2(b-c) \leq y \leq 1/2(b+c), \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\sigma_x^* = 0, \quad 0 \leq y < 1/2(b-c), \quad 1/2(b+c) < y \leq b, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\sigma_y^* = \tau_{xy}^* = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

где c — длина участка нагружения. После интегрирования получим следующие выражения для коэффициентов:

$$a_{mn} = \frac{\pi^4}{4b^2e^3} (z_1 f^4 + 2z_2 e^2 f^2 t^2 + z_3 e^4 t^4), \quad e = \frac{a}{b}$$

$$z_1 = \begin{cases} 0 (f \neq r) \\ 2 (t \neq s) \\ 3 (f = r, t = s) \end{cases} \quad z_2 = \begin{cases} 0 (f \neq r) \\ 0 (t \neq s) \\ 1 (f = r, t = s) \end{cases} \quad z_3 = \begin{cases} 0 (t \neq s) \\ 2 (f \neq r) \\ 3 (f = r, t = s) \end{cases}$$

$(m, n = 1, 2, \dots, N)$

$$k_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{\pi^4 D}{4b^2 e^3} (k^2 + l^2 e^2)^2 & (i = j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, M)$$

$$\bar{d}_m = \frac{2\pi e s \sin \pi \xi}{Eb} \frac{\sin \pi \xi}{\xi} \cos \pi l, \quad \xi = \frac{c}{b} \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & (k \neq p) \\ \frac{(k\pi)^2}{4be} \left[\frac{\sin \gamma_1}{\gamma_1} \cos(l-q) \frac{\pi}{2} - \frac{\sin \gamma_2}{\gamma_2} \cos(l+q) \frac{\pi}{2} \right] & (k=p) \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \frac{(l-q)\pi\xi}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{(l+q)\pi\xi}{2} \quad (i, j = 1, 2, \dots, M)$$

$$r_{ij}^m = \frac{\pi^4 E}{4b^2 e} \left[c_1 k l p q - \frac{1}{2} c_2 (k^2 q^2 + p^2 l^2) \right]$$

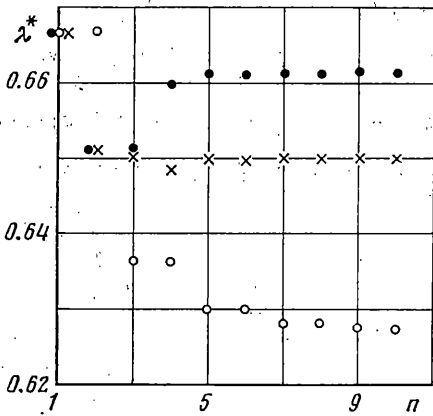
$$c_{1,2} = (x_1 \pm x_2 + x_3 + x_4) (y_1 \pm y_2 + y_3 + y_4)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \begin{cases} 0 & (k-p \neq 0) \\ 1/2 & (k-p=0) \end{cases} & y_1 &= \begin{cases} 0 & (l-q \neq 0) \\ 1/2 & (l-q=0) \end{cases} \\ x_2 &= \begin{cases} 0 & (k+p-2r \neq 0) \\ -1/4 & (k+p-2r=0) \end{cases} & y_2 &= \begin{cases} 0 & (l+q-2s \neq 0) \\ -1/4 & (l+q-2s=0) \end{cases} \\ x_3 &= \begin{cases} 0 & (k-p+2r \neq 0) \\ -1/4 & (k-p+2r=0) \end{cases} & y_3 &= \begin{cases} 0 & (l-q+2s \neq 0) \\ -1/4 & (l-q+2s=0) \end{cases} \\ x_4 &= \begin{cases} 0 & (k-p-2r \neq 0) \\ -1/4 & (k-p-2r=0) \end{cases} & y_4 &= \begin{cases} 0 & (l-q-2s \neq 0) \\ -1/4 & (l-q-2s=0) \end{cases} \end{aligned}$$

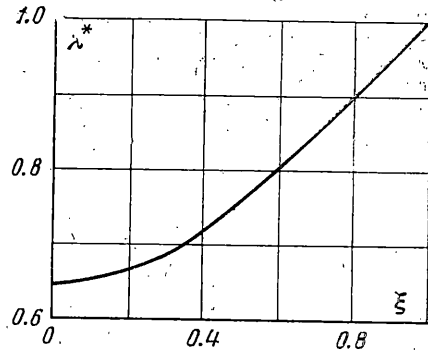
Коэффициенты e и ξ характеризуют удлинение пластины и неравномерность нагружения. Для $\xi=0$ имеет место случай нагружения сосредоточенными силами.

4. Для оценки величины критической нагрузки в зависимости от числа удерживаемых членов в разложениях для функций w и φ , а также для параметрического анализа была составлена программа для ЭВМ. Расчеты проводились на машинах серии ЕС. Основные матричные операции выполнялись с двойной точностью. Ниже представлены результаты расчета. Безразмерный критический параметр λ^* соответствует отношению суммарной критической силы для неравномерно сжатой пластины к критической силе равномерно сжатой пластины, т. е. к $P_* = 4\pi^2 D/b$.

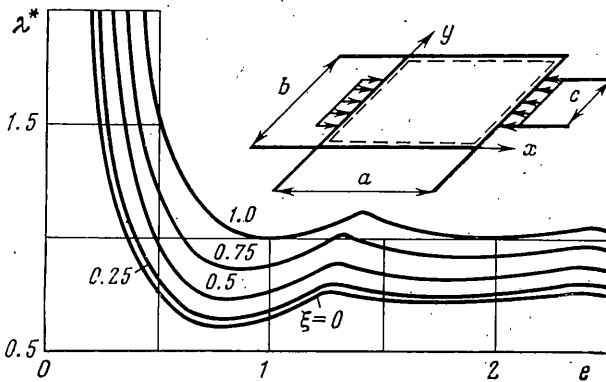
На фиг. 1 представлены численные результаты определения величины критической нагрузки для квадратной пластины в случае действия сосредоточенных сжимающих сил. Следует заметить, что при решении изложенным выше методом особенности, связанные с сосредоточенными нагрузками, имеют вид $(\sin k\xi)/\xi$ при $\xi \rightarrow 0$ и вычислительных трудностей не представляют. Светлыми точками отмечены результаты при удержании в разложениях для функций w и φ ($n \times n$) и (1×1) членов. Первое число в первой скобке соответствует в (3.4) максимальному числу k , второе — l , аналогично введены обозначения для второй скобки (числа r и s в (3.1)).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Это приближение соответствует менее жесткой схеме. «Уточнение» вносят лишь нечетные гармоники разложения w .

Темными точками отмечен процесс сходимости при уточнении лишь функции напряжений φ ($n \times n$) для функции прогиба w (1×1), представляющей произведение двух полуволн синусоиды. Как видно, процесс сходимости носит неравномерный характер и такое приближение соответствует наиболее жесткой схеме. Процесс сходимости решения при уточнении как по w , так и по φ отмечен на фиг. 1 крестиками.

В результате расчета при удержании первых 100 членов разложения для w и φ из полных систем функций было получено для квадратной пластины в случае действия сосредоточенных сил $\lambda^* = 0.650$. Приведем результаты решения данной задачи, полученные соответственно в [3-7]: 0.64*; 0.692; 0.478; 0.667; 0.66* (звездочкой отмечены значения, полученные пересчетом из графиков).

На фиг. 2 показано влияние неравномерности нагружения на величину критической нагрузки для квадратной пластины. Общий анализ влияния неравномерности нагружения ξ и удлинения пластины e приводится на фиг. 3.

Поступила 9 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфугов Н. А., Балабух Л. И. Энергетический критерий устойчивости упругих тел, не требующий определения начального напряженного состояния. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Алфугов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М., «Машиностроение», 1978.
3. Григолюк Э. И., Кулаков Н. А. Устойчивость пластин при неоднородном напряженном состоянии. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 9.
4. Лисовский В. Г. О закритическом поведении квадратной пластины, сжатой двумя сосредоточенными силами. Изв. ВУЗов. Машиностроение, М., 1979, № 4.
5. Тимошенко С. П. К вопросу об устойчивости упругих систем. Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1910, кн. 2.
6. Алфугов Н. А., Балабух Л. И. О возможности решения задач устойчивости пластин без предварительного определения начального напряженного состояния. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
7. M. Z. Khan, A. C. Walker. Buckling of plates subjected to localized edge loading. J. Struct. Engr. 1972, vol. 50, No. 6, p. 225-232.