

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГИХ
СЛАБО АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Ю. А. РОССИХИН

(Брянск)

Изучено распространение слабого разрыва (поверхностная волна ускорений) вдоль ненапряженной плоскости $x_1=0$, ограничивающей упругое анизотропное полупространство $x_1 > 0$.

Поверхностная волна образуется из трех комплексных плоских волн [1, 2].

1. Динамическое поведение анизотропного полупространства со свободной от напряжений границей описывается системой уравнений

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} v_{k,l}, \quad \sigma_{ij,j} = \rho v_i \quad (1.1)$$

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijkl}^{(0)} - \varepsilon \lambda_{ijkl}^{(1)}, \quad \lambda_{ijkl}^{(0)} = \lambda \delta_{ki} \delta_{lj} + \mu (\delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li})$$

$$\lambda = \lambda_{1122} = \lambda_{1133} = \lambda_{2233}, \quad \mu = \lambda_{1212} = \lambda_{1313} = \lambda_{2323}, \quad \varepsilon = 2\lambda_{2323} - (\lambda_{1111} - \lambda_{1122})$$

со следующими краевыми условиями:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad (x_1 = 0) \quad (1.2)$$

Здесь σ_{ij} — тензор напряжений; v_i — компоненты вектора скорости перемещения; ρ — плотность; ε — малая величина; компоненты тензора $\lambda_{ijkl}^{(1)}$ равны единице, если все индексы одинаковы, и нулю, если любые два из них различны; точки означают производные по времени; индекс после запятой — производную по соответствующей координате; латинские индексы принимают значения 1 — 3.

Используя (1.1), получим систему уравнений для определения скоростей распространения и интенсивностей плоских комплексных волн [3, 4]:

$$(\rho a_{(n)}^2 \delta_{ik} - \lambda_{ijkl} v_{j(n)} v_{l(n)}) \beta_{k(n)} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $a_{(n)}$, $\beta_{k(n)}$ — скорости и интенсивности комплексных волн: $v_{k(n)}$ ($v_{1(n)} = (1 - a_{(n)}^2 g^{-2})^{1/2}$, $v_{2(n)} = a_{(n)} n_2 g^{-1}$, $v_{3(n)} = a_{(n)} n_3 g^{-1}$) — компоненты векторов нормалей к этим волнам, причем $v_{1(n)}$ оказывается мнимой, так как $g < a_{(n)}$; g — скорость распространения поверхностной волны; n_i ($n_1 = 0$, $n_2 = \cos \varphi$, $n_3 = \sin \varphi$) — компоненты вектора нормали к этой волне; δ_{ik} — символ Кронекера; индекс n указывает на порядковый номер плоской волны.

Решение системы (1.3) представим в виде рядов по степеням малого параметра ε :

$$a_{(n)} = \sum_{h=0}^{\infty} a_{(n)}^{(h)} \varepsilon^h, \quad g = \sum_{h=0}^{\infty} g^{(h)} \varepsilon^h, \quad \beta_{i(n)} = \sum_{h=0}^{\infty} \beta_{i(n)}^{(h)} \varepsilon^h \quad (1.4)$$

и ограничимся в (1.4) членами второго порядка малости. В результате получим следующие соотношения:

для нулевого приближения

$$\rho a_{(3)}^{(0)2} = \lambda + 2\mu, \quad \beta_{k(3)}^{(0)} = \omega v_{k(3)}^{(0)}, \quad \rho a_{(\alpha)}^{(0)2} = \mu, \quad \beta_{k(\alpha)}^{(0)} = (c_{(\alpha)} l_k + m_k) \delta_{(\alpha)}, \quad (1.5)$$

для первого приближения

$$a_{(3)}^{(1)} = -s_{ik(3)}^{(1,0)} v_{i(3)}^{(0)} v_{k(3)}^{(0)} (2\rho a_{(3)}^{(0)})^{-1} \quad (1.6)$$

где $a_{(\alpha)}^{(1)}$ определяются из квадратного уравнения

$$(2\rho a_{(\alpha)}^{(0)})^2 a_{(\alpha)}^{(1)2} + 2\rho a_{(\alpha)}^{(0)} s_{ik}^{(1,0)} (l_i l_k + m_i m_k) a_{(\alpha)}^{(1)} + s_{ik}^{(1,0)} l_i l_k s_{jl}^{(1,0)} m_j m_l - (s_{ik}^{(1,0)} l_i m_k)^2 = 0$$

$$\beta_{i(3)}^{(1)} = \Omega v_{i(3)}^{(0)} + B_i \omega, \quad \beta_{k(\alpha)}^{(1)} = \delta_{(\alpha)} (A_{(\alpha)} v_k^{(0)} + \Phi_{(\alpha)} l_k) + D_{(\alpha)} (c_{(\alpha)} l_k + m_k)$$

$$A_{(\alpha)} = -\kappa_{(\alpha)}^{(1)} m_k v_k^{(1)} + s_{ik}^{(1,0)} v_i (c_{(\alpha)} l_k + m_k) (\lambda + \mu)^{-1}, \quad B_i = \kappa_{(3)}^{(1)} v_{i(3)}^{(1)} - \\ - (2\rho a_{(3)}^{(0)} a_{(3)}^{(1)} + s_{ik}^{(1,0)} v_k^{(0)}) (\lambda + \mu)^{-1}$$

$$v_{1(n)}^{(0)} = \sqrt{1 - \kappa_{(n)}^{(0)2}}, \quad v_{2(n)}^{(0)} = \kappa_{(n)}^{(0)} n_2, \quad v_{3(n)}^{(0)} = \kappa_{(n)}^{(0)} n_3, \quad v_{1(n)}^{(1)} = -\kappa_{(n)}^{(0)} / \sqrt{1 - \kappa_{(n)}^{(0)2}},$$

$$v_{2(n)}^{(1)} = n_2, \quad v_{3(n)}^{(1)} = n_3, \quad v_{1(n)}^{(2)} = \frac{\kappa_{(n)}^{(0)2} - 2}{\sqrt{(1 - \kappa_{(n)}^{(0)2})^3}} \kappa_{(n)}^{(1)2} - \frac{4\kappa_{(n)}^{(0)}}{\sqrt{1 - \kappa_{(n)}^{(0)2}}},$$

$$v_{2(n)}^{(2)} = \kappa_{(n)}^{(2)} n_2, \quad v_{3(n)}^{(2)} = \kappa_{(n)}^{(2)} n_3, \quad l_1 = 0, \quad l_2 = -n_3, \quad l_3 = n_2$$

$$m_1 = -\kappa_{(n)}^{(0)}, \quad m_2 = n_2 \sqrt{1 - \kappa_{(n)}^{(0)2}}, \quad m_3 = n_3 \sqrt{1 - \kappa_{(n)}^{(0)2}}$$

$$\kappa_{(n)}^{(0)} = a_{(n)}^{(0)} / g^{(0)}, \quad \kappa_{(n)}^{(1)} = (g^{(0)} a_{(n)}^{(1)} - g^{(1)} a_{(n)}^{(0)}) / g^{(0)2}$$

$$\kappa_{(n)}^{(2)} = 2 [g^{(0)} a_{(n)}^{(2)} - g^{(2)} a_{(n)}^{(0)} - g^{(0)} g^{(1)} (g^{(0)} a_{(n)}^{(1)} - g^{(1)} a_{(n)}^{(0)})] g^{(0)-4}, \quad s_{ik(n)}^{(1,0)} = \lambda_{ijk}^{(1)} v_{j(n)}^{(0)} v_{l(n)}^{(0)}$$

$$K_{ik(n)}^{(1,0)} = \lambda_{ijkl}^{(1)} (v_j^{(1)} v_l^{(0)} + v_j^{(0)} v_l^{(1)}), \quad c_{(\alpha)} = -\frac{s_{ik}^{(1,0)} l_i m_k}{2\rho a_{(\alpha)}^{(0)} a_{(\alpha)}^{(1)} + s_{ik}^{(1,0)} l_i l_k},$$

$$\Phi_{(\alpha)} = \frac{f_{1(\alpha)}}{2\rho a_{(\alpha)}^{(0)} a_{(\alpha)}^{(1)} + s_{ik}^{(1,0)} l_i l_k}$$

$$f_{1(\alpha)} = -s_{ik}^{(1,0)} l_i v_k^{(0)} A_{(\alpha)} + (-2\rho a_{(\alpha)}^{(1)2} - 4\rho a_{(\alpha)}^{(0)} a_{(\alpha)}^{(2)} + 2\mu v_{l(\alpha)}^{(2)} v_l^{(0)} + \\ + \mu v_l^{(1)} v_l^{(1)} \kappa_{(\alpha)}^{(1)2} - K_{ik}^{(1,0)} l_i l_k \kappa_{(\alpha)}^{(1)} c_{(\alpha)} - K_{ik}^{(1,0)} l_i m_k \kappa_{(\alpha)}^{(1)})$$

$$f_{2(\alpha)} = [-s_{ik}^{(1,0)} m_i v_k^{(0)} + (\lambda + \mu) v_l^{(1)} m_l \kappa_{(\alpha)}^{(1)}] A_{(\alpha)} - 2\rho a_{(\alpha)}^{(1)2} - 4\rho a_{(\alpha)}^{(2)} a_{(\alpha)}^{(0)} + 2\mu v_{l(\alpha)}^{(2)} v_l^{(0)} + \\ + \mu v_l^{(1)} v_l^{(1)} \kappa_{(\alpha)}^{(1)2} + (\lambda + \mu) (m_l v_l^{(1)})^2 \kappa_{(\alpha)}^{(1)2} - K_{ik}^{(1,0)} m_i m_k \kappa_{(\alpha)}^{(1)} - K_{ik}^{(1,0)} l_i m_k \kappa_{(\alpha)}^{(1)} c_{(\alpha)}$$

а $a_{(\alpha)}^{(2)}$ определяются из соотношения

$$(2\rho a_{(\alpha)}^{(0)} a_{(\alpha)}^{(1)} + s_{ik}^{(1,0)} m_i m_k) f_{1(\alpha)} - s_{ik}^{(1,0)} l_i m_k f_{2(\alpha)} = 0$$

Здесь индекс $\alpha=1,2$ ставится у тех величин, которые принимают различные значения на первой и второй комплексных волнах; ω , Ω , $\delta_{(\alpha)}$, $D_{(\alpha)}$ — произвольные постоянные.

2. Дальнейшее решение задачи связано с использованием граничных условий. Подставляя первое уравнение (1.1) в продифференцированные по времени условия (1.2) и учитывая, что поверхностная волна есть результат наложения трех типов плоских комплексных волн (сумма интенсивностей этих волн при $x_1=0$ дает интенсивность поверхностной волны),

будем иметь

$$\lambda_{ijkl} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{h(n)} v_{l(n)} = 0 \quad (x_1=0) \quad (2.1)$$

Учитывая (1.4) — (1.6) и ограничиваясь членами нулевого и первого порядка малости, из (2.1) найдем

$$\lambda_{ijkl} \{v_{h(3)}^{(0)} v_{l(3)}^{(0)} \omega + v_l [(c_{(1)} l_k + m_k) \delta_{(1)} + (c_{(2)} l_k + m_k) \delta_{(2)}]\} = 0 \quad (2.2)$$

$$\lambda_{ijkl} \{v_{h(3)}^{(0)} v_{l(3)}^{(0)} \Omega + v_l^{(0)} [(c_{(1)} l_k + m_k) D_{(1)} + (c_{(2)} l_k + m_k) D_{(2)}]\} = F_j \quad (2.3)$$

$$F_j = \lambda_{ijkl} \{ [2\rho a_{(3)}^{(0)} a_{(3)}^{(1)} (\lambda + \mu)^{-1} v_{l(3)}^{(0)} v_{k(3)}^{(0)} - \kappa_{(3)}^{(1)} v_{l(3)}^{(0)} v_{k(3)}^{(0)} + s_{ik}^{(1,0)} v_{i(3)}^{(0)} v_{l(3)}^{(0)} (\lambda + \mu)^{-1} \omega - \\ - (A_{(1)} \delta_{(1)} + A_{(2)} \delta_{(2)}) v_l^{(0)} v_k^{(0)} - \kappa_{(3)}^{(1)} v_{l(3)}^{(0)} v_{k(3)}^{(1)} \omega - \kappa_{(1)}^{(1)} (c_{(1)} l_k + m_k) v_l^{(1)} \delta_{(1)} - \\ - \kappa_{(2)}^{(1)} (c_{(2)} l_k + m_k) v_l^{(1)} \delta_{(2)} - (\Phi_{(1)} \delta_{(1)} + \Phi_{(2)} \delta_{(2)}) v_l^{(0)} l_k + \lambda_{ijkl}^{(1)} [v_{l(3)}^{(0)} v_{k(3)}^{(0)} \omega + \\ + (c_{(1)} l_k + m_k) v_l^{(0)} \delta_{(1)} + (c_{(2)} l_k + m_k) v_l^{(0)} \delta_{(2)}] \}$$

Записывая условие существования нетривиальных решений однородной системы (2.2), получаем уравнение для определения скорости поверхностной волны в нулевом приближении

$$N(g^{(0)}) = (\lambda + 2\mu - 2\mu\kappa_{(3)}^{(0)2}) (2\kappa_{(3)}^{(0)2} - 1) + 4\mu\kappa_{(3)}^{(0)} \kappa_{(3)}^{(0)} \sqrt{\kappa_{(3)}^{(0)2} - 1} \sqrt{\kappa_{(3)}^{(0)2} - 1} = 0 \quad (2.4)$$

Действительный корень уравнения (2.4) является скоростью распространения волны Рэлея в упругой изотропной среде [3].

При выполнении (2.4) уравнения системы (2.2) оказываются линейно-зависимыми и связывают произвольные постоянные ω , $\delta_{(\alpha)}$ следующими соотношениями:

$$\delta_{(1)} = \chi c_{(2)} \omega, \quad \delta_{(2)} = -\chi c_{(1)} \omega, \quad \chi = \frac{2\kappa_{(3)}^{(0)} \sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}}}{(c_{(1)} - c_{(2)}) (1 - 2\kappa_{(3)}^{(0)2})}$$

Для определения скорости поверхностной волны в первом приближении приведем систему (2.3) к виду

$$-c_{(2)} (\lambda + 2\mu - 2\mu\kappa_{(3)}^{(0)2}) \Omega + 2\mu\kappa_{(3)}^{(0)} (c_{(2)} - c_{(1)}) \sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}} D_{(1)} = \Delta_1 \omega \quad (2.5)$$

$$\Delta_1 = -c_{(2)} F_1^{\circ} + 2\kappa_{(3)}^{(0)} M^{\circ}$$

$$2\mu\kappa_{(3)}^{(0)} n_2 c_{(2)} \sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}} (1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}) \Omega +$$

$$+ \mu n_2 (c_{(2)} - c_{(1)}) (1 - 2\kappa_{(3)}^{(0)2}) \sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}} D_{(1)} = \Delta_2 \omega$$

$$\Delta_2 = (F_2^{\circ} - n_3 M^{\circ}) c_{(2)} \sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}} + M^{\circ} n_2 (1 - 2\kappa_{(3)}^{(0)2})$$

$$c_{(1)} D_{(1)} + c_{(2)} D_{(2)} = \Delta_3 \omega, \quad \Delta_3 = -\mu^{-1} M^{\circ} (1 - \kappa_{(3)}^{(0)2})^{-1/2}, \quad M^{\circ} = n_3 F_2^{\circ} - n_2 F_3^{\circ}$$

Величины F_j° , M° , в отличие от тех же величин без градуса, не содержат параметра ω , который является общим множителем всех членов, входящих в выражения для F_j , M .

Умножая первое уравнение системы (2.5) на $\mu n_2 (c_{(2)} - c_{(1)}) (1 - 2\kappa_{(3)}^{(0)2}) (1 - \kappa_{(3)}^{(0)2})^{1/2}$, а второе на $-2\mu\kappa_{(3)}^{(0)} (c_{(2)} - c_{(1)}) (1 - \kappa_{(3)}^{(0)2})^{1/2}$ и складывая,

находим

$$-N(g^{(0)}) = (1 - 2\kappa^{(0)2})F_1 + 2\kappa^{(0)}(n_2F_2 + n_3F_3)\sqrt{1 - \kappa^{(0)2}} \quad (2.6)$$

Если $g^{(0)}$ — корень уравнения (2.4), то левая часть (2.6) обратится в нуль. Приравняв нулю также правую часть этого соотношения, получим линейное уравнение с действительными коэффициентами для определения зависимости $g^{(1)}$ от угла φ (ввиду симметрии величины $g^{(1)}$ ее поведение рассматривается на отрезке $0 \leq \varphi \leq 1/2\pi$).

При выполнении (2.6) уравнения системы (2.5) оказываются линейно-зависимыми и позволяют выразить $D_{(1)}, D_{(2)}$ через ω, Ω :

$$D_{(1)} = \chi c_{(2)}\Omega + \Gamma_1\omega, \quad D_{(2)} = -\chi c_{(1)}\Omega + \Gamma_2\omega, \quad \Gamma_1 = \frac{\Delta_2}{\gamma} \quad (2.7)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\Delta_3}{c_{(2)}} - \frac{c_{(1)}\Delta_2}{c_{(2)}\gamma}, \quad \gamma = \mu n_2(c_{(2)} - c_{(1)}) (1 - 2\kappa^{(0)2})\sqrt{1 - \kappa^{(0)2}}$$

Учитывая соотношения (1.5), (1.6) и (2.7), запишем окончательное выражение для компонент вектора интенсивности поверхностной волны

$$\beta_i = \beta_i^{(0)} + \beta_i^{(1)} \varepsilon = (\omega + \varepsilon\Omega) [\chi(c_{(2)} - c_{(1)})m_i + v_{i(3)}^{(0)}] + \varepsilon\omega G_i \quad (2.8)$$

$$G_i = \chi[(c_{(2)}A_{(1)} - c_{(1)}A_{(2)})v_i^{(0)} + (c_{(2)}\Phi_{(1)} - c_{(1)}\Phi_{(2)})l_i] + \\ + (\Gamma_1c_{(1)} + \Gamma_2c_{(2)})l_i + (\Gamma_1 + \Gamma_2)m_i + B_i$$

Заметим, что в качестве первой координаты вектора интенсивности в (2.8) необходимо брать $-i\beta_1$, поскольку β_1 , в отличие от действительных координат β_2, β_3 , является чисто мнимой величиной.

Из (2.8) следует, что направление вектора интенсивности задается уравнениями движения среды и граничными условиями, а его величина $\beta = \beta^{(0)} + \varepsilon\beta^{(1)}$, $\beta^{(0)2} = -\beta_1^{(0)2} + \beta_2^{(0)2} + \beta_3^{(0)2}$, $\beta^{(1)} = -\beta_1^{(0)}\beta_1^{(1)} + \beta_2^{(0)}\beta_2^{(1)} + \beta_3^{(0)}\beta_3^{(1)}$, зависящая от произвольных постоянных ω, Ω , определяется начальными условиями. Если, например, в начальный момент времени $\beta = 1$ ($\beta^{(0)} = 1, \beta^{(1)} = 0$), то

$$\omega = \sqrt{b}, \quad b = [-\psi\kappa^{(0)} + \sqrt{1 - \kappa^{(0)2}}]^2 + (-\psi\sqrt{1 - \kappa^{(0)2}} + \kappa_{(3)}^{(0)})^2]^{-1} \\ \Omega = -\omega b [-G_1(\psi\kappa^{(0)} + \sqrt{1 - \kappa^{(0)2}}) + (G_2n_2 + G_3n_3)(-\psi\sqrt{1 - \kappa^{(0)2}} + \kappa_{(3)}^{(0)})] \quad (2.9)$$

В случаях $\varphi = 0, 1/4\pi, 1/2\pi$ формула (2.8) значительно упрощается

$$\beta_i = (\omega + \varepsilon\Omega)(v_{i(3)}^{(0)} - \psi m_i) + \varepsilon\omega(\Gamma m_i - A_{(2)}\psi v_i^{(0)} + B_i) \quad (2.10)$$

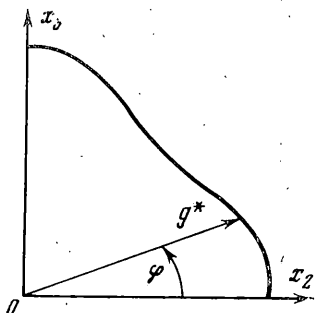
$$\psi_{(n)} = \frac{2\kappa_{(3)}^{(0)}\sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}}}{1 - 2\kappa_{(n)}^{(0)2}}, \quad \Gamma = \frac{F_2^{\circ}n_2 + F_3^{\circ}n_3}{2\mu\kappa_{(3)}^{(0)}\sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}}}$$

$$F_2^{\circ}n_2 + F_3^{\circ}n_3 = -4\mu\kappa_{(3)}^{(0)}\kappa_{(3)}^{(1)}\psi^{-1} - 2\mu\kappa_{(3)}^{(0)}\kappa_{(2)}^{(1)}\psi + \\ + (\lambda + \mu)^{-1}\mu\kappa_{(3)}^{(0)}\sqrt{1 - \kappa_{(3)}^{(0)2}}(1 + 4\mu a_{(3)}^{(0)}a_{(3)}^{(1)} - 2\kappa_{(3)}^{(0)2}n_2^2n_3^2)$$

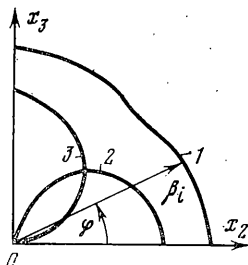
$$a_{(1)}^{(1)} = -\frac{2\kappa^{(0)2}n_2^2n_3^2}{2\rho a^{(0)}}, \quad a_{(2)}^{(1)} = -\frac{2\kappa^{(0)2}(1-\kappa^{(0)2})(1-n_2^2n_3^2)}{2\rho a^{(0)}}$$

Величина $a_{(3)}^{(1)}$ определяется той же формулой, что и раньше.

Из (2.10) видно, что при $\varphi=0, 1/4\pi, 1/2\pi$ вектор интенсивности поверхностной волны находится в плоскости, перпендикулярной к ее фронту.



Фиг. 1



Фиг. 2

что оказывается справедливым также при распространении волн Релея в изотропной упругой среде [3].

В качестве примера рассмотрим поверхностную волну в такой анизотропной среде, которая при $\epsilon \rightarrow 0$ переходит в изотропную среду со следующими упругими характеристиками: $a_{(3)}^{(0)} g^{(0)-1} = 1.69$, $a^{(0)} g^{(0)-1} = 1.11$, $a^{(0)} a_{(3)}^{(0)} = 0.66$.

Результаты расчета зависимостей $g^* = g^{(1)} \rho a_{(3)}^{(0)}$ и $-i\beta_i$ (кривая 1), β_2 (кривая 2), β_3 (кривая 3) от угла φ представлены на фиг. 1, 2 соответственно (при построении графиков для $-i\beta_i, \beta_2, \beta_3$ использовались формулы (2.9) и величина ϵ принималась равной 0,01).

Из графиков видно, что при $\varphi=0, 1/4\pi, 1/2\pi$ скорость поверхностной волны и координаты вектора интенсивности принимают экстремальные значения.

Поступила 10 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М., Русакова Н. Я. О распространении волн Релея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 4.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1937.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теорет. физика, т. 7. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
4. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., «Наука», 1965.