МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1980

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ТРАНСФОРМАНТЫ ЯДРА И ПРИЛОЖЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ, М. А. СУМБАТЯН

(Москва)

Рассматривается реализация метода «малых λ» [1, 2] решения смешанных задач математической физики в случае, когда трансформанта ядра соответствующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода имеет в нуле логарифмическую особенность. К такому типу уравнений сводятся некоторые задачи теории упругости, гидроаэромеханики, теории дифракции и другие (см., например, [3–5]). Посредством приближенной факторизации трансформанты ядра решение таких уравнений получается в простой аналитической форме.

Более подробно рассматривается применение предлагаемого подхода к задаче о вдавливании узкого прямоугольного в плане штампа в упругое полупространство. Эта задача исследовалась в [6–8]. В [9, 10] для решения задачи применяется асимптотический подход, в результате чего их авторы различными путями приходят к одному и тому же интегральному уравнению, соответствующему предельному случаю стремления удлинения основания штампа к нулю. В работе [11] последнее уравнение решается численно.

Асимптотический подход, развиваемый в данной работе и основанный на методе «малых λ», позволяет построить эффективное приближенное решение исходного уравнения задачи об узком прямоугольном штампе в аналитическом виде. При этом оказывается, что уравнение из [9–11] соответствует «вырожденному» решению задачи, описывающему распределение давления в удалении от границ штампа и не улавливающему характер его поведения вблизи острых кромок.

1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)K\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)dt=f(x),\quad |x|\leqslant 1\quad K(x)=\int_{-\infty}^{\infty}M(u)e^{-iux}du$$
$$M(u)\sim A\ln|u|+B\quad (u\to 0),\quad M(u)\sim\frac{1}{|u|}\quad (u\to\infty)\tag{1.1}$$

где $M(u)$ — четная функция, вещественная и не имеющая нулей и особенностей на вещественной оси, за исключением начала координат.

К такому типу уравнений сводятся многие задачи математической физики. Например, в задаче обтекания цилиндрической оболочки несжимаемым потоком идеальной жидкости [4]:

$$M(u)=\frac{K_0(a|u|)}{|u|K_1(a|u|)},\quad A=-1,\quad B=\ln\frac{2}{a}-C\tag{1.2}$$

В задаче об узком прямоугольном в плане штампе, если принять гипотезу равномерного распределения контактного давления вдоль малого размера [3]:

$$M(u) = \frac{1}{\pi|u|}\left[\pi - 2\int\limits_{|u|}^{\infty} K_0(t)\,dt\right], \quad A = -B = -\frac{2}{\pi} \tag{1.3}$$

Если же принять гипотезу о том, что распределение контактного давления вдоль малого размера такое же, как и в плоской задаче, то [8]:

$$M(u) = I_0\left(\frac{|u|}{2}\right)K_0\left(\frac{|u|}{2}\right), \quad A = -1, \quad B = \ln 4 - C \tag{1.4}$$

В задаче о взаимодействии жесткой цилиндрической накладки с поверхностью шахты в упругом пространстве

$$\begin{gathered} M(u) = \frac{-(1-\omega^2)u + 2(1-\nu)[\omega^2 u + 2\omega]}{2(1-\nu)[(1-\omega^2)u^2 + 2(1-\nu)]}, \quad u > 0 \\ \omega(u) = K_0(u)/K_1(u), \quad A = -1/(1-\nu), \quad B = -1/4(1-\nu)^2 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь везде I_n, K_n — модифицированные функции Бесселя n-го порядка, C — константа Эйлера.

В дальнейшем остановимся на случае, когда параметр λ, характеризующий геометрию задачи, мал.

Используя теоремы тауберова типа, легко показать, что в достаточно широком круге случаев ядро $K(x)$ обладает следующим асимптотическим поведением:

$$K(x) \sim D/|x| \quad \text{при } x \to \infty \tag{1.6}$$

а следовательно, не является суммируемым на вещественной оси. Это затрудняет исследование уравнения (1.1) при малых λ по сравнению со случаями, когда ядро уравнения таково, что его трансформанта $M(u)$ аналитична в окрестности вещественной оси [1,2]. В частности, наличие у трансформанты $M(u)$ логарифмической особенности в нуле не позволяет непосредственно применить метод «малых λ» [1,2]. Однако небольшое видоизменение метода позволяет преодолеть эту трудность.

Внесем в ядро уравнения (1.1) малое возмущение так, чтобы возмущенное ядро $K_\varepsilon(x)$ экспоненциально убывало на бесконечности и $\lim K_\varepsilon(x) = K(x)$ (при $\varepsilon \to 0$). Тогда соответствующая трансформанта $M_\varepsilon(u)$ аналитична в некоторой полосе плоскости комплексной переменной u, содержащей вещественную ось. Теперь асимптотика решения возмущенного уравнения при малых λ может быть построена известным способом [1,2]. В частности, первый член асимптотики может быть записан в мультипликативном виде

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\omega_1[(1+x)/\lambda]\,\omega_2[(1-x)/\lambda]}{v(x)}, \quad |x| \leqslant 1 \tag{1.7}$$

где $\omega_{1,2}(x)$, $v(x)$ находятся из следующих интегральных уравнений:

$$\int\limits_0^{\infty} \omega_{1,2}(t) K_\varepsilon(x-t)\,dt = \frac{1}{\lambda} f(\pm\lambda x \mp 1), \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{1.8}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} v(t) K_\varepsilon\left(\frac{x-t}{\lambda}\right) dt = f(x), \quad |x| < \infty \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.8) на полуоси строится методом Винера — Хопфа. Основной трудностью, возникающей на этом пути, является проблема факторизации трансформанты $M_\varepsilon(u)$. Она может быть успешно решена, если функцию $M_\varepsilon(u)$ аппроксимировать функцией $N_\varepsilon(u)$, аналитичной в некоторой окрестности вещественной оси, в определенном смысле слабо отклоняющейся от $M_\varepsilon(u)$ на этой оси и легко факторизуемой [1]. Такая аппроксимация должна быть равномерной по ε, ибо в пределе при $\varepsilon\to0$ должна получаться функция, слабо отклоняющаяся от $M(u)$.

В качестве функции $N_\varepsilon(u)$ можно взять следующую[1]:

$$N_\varepsilon(u)=\left[\frac{\ln(\varepsilon-iau)\ln(\varepsilon+iau)\,(B-ibu-1)\,(B+ibu-1)}{\ln(B-ibu)\ln(B+ibu)\,(\varepsilon-iau-1)\,(\varepsilon+iau-1)}\right]^{1/2}\frac{P_1(u)}{\sqrt{u^2+c^2}\,P_2(u)} \tag{1.10}$$

где $P_1(u)$, $P_2(u)$ — многочлены четных степеней u одинакового порядка, коэффициенты которых, так же как и константы a, b, c, B, находятся из условия наилучшей аппроксимации, а также из условия, чтобы поведение функции $N_\varepsilon(u)$ при $\varepsilon=0$ в нуле и на бесконечности было таким же, как у функции $M(u)$ (1.1).

Теперь факторизация функции $N_\varepsilon(u)$ осуществляется очень просто

$$N_\varepsilon(u)=N_\varepsilon^+(u)N_\varepsilon^-(u),\qquad N_\varepsilon^-(u)=N_\varepsilon^+(-u)$$
$$N_\varepsilon^+(u)=\left[\frac{\ln(\varepsilon-iau)\,(B-ibu-1)}{\ln(B-ibu)\,(\varepsilon-iau-1)}\right]^{1/2}\frac{P_1^+(u)}{\sqrt{c-iu}\,P_2^+(u)} \tag{1.11}$$

Далее решение уравнения (1.8) получается в квадратурах, соответствующих обращению преобразования Фурье или Лапласа.

Решение же уравнения (1.9) легко находится применением преобразования Фурье.

Построив решение возмущенного уравнения по формуле (1.7) и устремив затем ε к нулю, построим главный член асимптотики решения уравнения (1.1).

2. Рассмотрим более подробно контактную задачу теории упругости для области в виде узкого прямоугольника. Для простоты ограничимся случаем плоского основания штампа. Принимая гипотезу о том, что распределение контактного давления вдоль малого размера такое же, как и в плоской задаче

$$p(x,y)=\frac{p(y)}{\pi\sqrt{\delta^2-x^2}},\qquad |x|\leqslant\delta,\qquad |y|\leqslant a \tag{2.1}$$

и переходя к безразмерным переменным, для определения функции $p(y)$ получим уравнение [7, 8]:

$$\int_{-1}^{1}p(v)K\left(\frac{y-v}{\lambda}\right)dv=\lambda\frac{\pi^2E}{2(1-\nu^2)}W,\qquad |y|\leqslant1 \tag{2.2}$$

$$K(y)=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathbb{K}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}I_0\left(\frac{|u|}{2}\right)K_0\left(\frac{|u|}{2}\right)e^{-iuy}du$$

---

[1] На возможность такой аппроксимации авторам любезно указал Р. А. Грунтфест.

Здесь E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона упругого основания, W — глубина внедрения штампа. Малый параметр $\lambda=\delta/a$ характеризует удлинение основания штампа.

В [7, 8] к решению уравнения (2.2) применялся метод, эффективный лишь при больших и средних λ, что, строго говоря, некорректно, ибо интегральное уравнение (2.2) получено в предположении малости параметра λ. Здесь применим подход, изложенный в п. 1.

Аппроксимируем соответствующую функцию $M_\varepsilon(u)$ выражением

$$N_\varepsilon(u)=\left[\frac{\ln(\varepsilon-iua)\ln(\varepsilon+iua)\,(B-iua-1)\,(B+iua-1)}{\ln(B-iua)\ln(B+iua)\,(\varepsilon-iua-1)\,(\varepsilon+iua-1)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\frac{u^2+D^2}{\sqrt{(u^2+C_1^2)\,(u^2+\alpha^2)\,(u^2+\beta^2)}} \tag{2.3}$$

Поведение в нуле функции $M(u)$:

$$M(u)=I_0\left(\frac{|u|}{2}\right)K_0\left(\frac{|u|}{2}\right)\sim-\ln|u|+\ln 4-C \tag{2.4}$$

где C — константа Эйлера — определяет выбор постоянной a.

При $B=0.4$ $a=\exp(C-\ln 4)$; $C_1=(B-1)/\ln B$, $D=0.2$, $\alpha=0.365$, $D^2=\alpha\beta$; в случае $\varepsilon=0$ поведение функции $N_\varepsilon(u)$ в нуле и на бесконечности такое же, как и у $M(u)$, а относительная погрешность аппроксимации на всей вещественной оси не превышает 4.5%.

Переходя к решению уравнений (1.8), (1.9), заметим, что два уравнения в (1.8) совпадают и дают одно. Решая его методом Винера — Хопфа [1, 2], приходим к функциональному уравнению в образах Фурье

$$\Omega^+(s)N_\varepsilon(s)=\frac{\pi EW}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{-is}+E^-(s)$$

где $\Omega^+(s)$ — трансформанта Фурье функции $\omega(y)$; знак плюс или минус означает аналитичность функции соответственно в верхней или в нижней полуплоскости. После факторизации функции $N_\varepsilon(s)$ получаем

$$\Omega^+(s)N_\varepsilon^+(s)=\frac{\pi EW}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{-isN_\varepsilon^-(s)}+L^-(s)$$

Необходимое для дальнейшего разложение функции $1/(-isN_\varepsilon^-(s))$ осуществляется просто:

$$\frac{1}{-isN_\varepsilon^-(s)}=T^+(s)+T^-(s),\qquad T^+(s)=\frac{1}{-isN_\varepsilon^-(0)}$$

$$T^-(s)=\frac{1}{-is}\left[\frac{1}{N_\varepsilon^-(s)}-\frac{1}{N_\varepsilon^-(0)}\right]$$

В результате приходим к соотношению

$$\Omega^+(s)\left[\frac{\ln(\varepsilon-isa)\,(B-isa-1)}{\ln(B-isa)\,(\varepsilon-isa-1)}\right]^{1/2}\frac{D-is}{\sqrt{(C_1-is)\,(\alpha-is)\,(\beta-is)}}-$$

$$-\frac{\pi EW}{2(1-\nu^2)(-is)}\left[\frac{\varepsilon-1}{\ln\varepsilon}\right]^{1/2}=R^-(s)\equiv 0$$

Необходимость тождественного обращения этого выражения в нуль следует из условия, чтобы особенность функции $\omega(y)$ в нуле была интегрируемой. Находя отсюда $\Omega^+(s)$ и осуществляя замену переменной $-is=p$, позволяющую перейти от образов Фурье к образам Лапласа, для образа функции $\omega(y)$ получим выражение

$$\Omega(p)=\frac{\pi EW}{2(1-\nu^2)}\left[\frac{\varepsilon-1}{\ln\varepsilon}\right]^{1/2}\frac{1}{p(p+D)}\times$$
$$\times\left[\frac{(\varepsilon+pa-1)(C_1+p)(\alpha+p)(\beta+p)\ln(B+pa)}{\ln(\varepsilon+pa)(B+pa-1)}\right]^{1/2} \tag{2.5}$$

Решение же соответствующего уравнения (1.9) имеет вид [1]:

$$v(y)=\pi EW/[2(1-\nu^2)M_\varepsilon(0)],\qquad M_\varepsilon(0)=N_\varepsilon(0)=\ln\varepsilon/(\varepsilon-1) \tag{2.6}$$

Следовательно, после предельного перехода $\varepsilon\to0$ главный член асимптотики решения уравнения (2.2) при малых λ дается формулой (см. (1.7)):

$$p(y)=\frac{\pi EW}{2(1-\nu^2)}q\left(\frac{1+y}{\lambda}\right)q\left(\frac{1-y}{\lambda}\right),\qquad |y|\leqslant1 \tag{2.7}$$

причем $q(y)$ — оригинал, соответствующий образу

$$Q(p)=\frac{1}{p(p+D)}\left[\frac{(pa-1)(C_1+p)(\alpha+p)(\beta+p)\ln(B+pa)}{\ln(pa)(B+pa-1)}\right]^{1/2} \tag{2.8}$$

Для силы вдавливания имеем

$$P=\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-\delta}^{\delta}p(x,y)\,dx\,dy=\frac{\pi EW\delta}{2(1-\nu^2)}\int\limits_0^{2/\lambda}q(y)q\left(\frac{2}{\lambda}-y\right)dy=\frac{\pi EW\delta}{2(1-\nu^2)}q_1\left(\frac{2}{\lambda}\right) \tag{2.9}$$

Используя теорему о свертке, для образа Лапласа функции $q_1(z)$ получим

$$Q_1(p)=\frac{1}{p^2(p+D)^2}\frac{(pa-1)(C_1+p)(\alpha+p)(\beta+p)\ln(B+pa)}{\ln(pa)(B+pa-1)} \tag{2.10}$$

3. Асимптотический подход к решению задачи об узком прямоугольном в плане штампе был применен в [9–11]. Здесь выясним, в каком отношении находятся полученные в них результаты с методом, развиваемым в данной работе.

Перепишем уравнение (2.2) в виде

$$\int\limits_{-1}^{1}p(v)\,dv\int\limits_0^\infty M(u\lambda)\cos u(y-v)\,du=\frac{\pi^2EW}{2(1-\nu^2)},\qquad |y|\leqslant1 \tag{3.1}$$

$$M(u)=I_0\left(\frac{|u|}{2}\right)K_0\left(\frac{|u|}{2}\right)$$

Определение. «Вырожденным» решением уравнения (3.1) (согласно [1]) назовем функцию, определяемую из этого уравнения, если в нем заменить трансформанту ядра $M(u\lambda)$ ее поведением в нуле.

Известно, что вырожденное решение дает хорошее приближение к точному лишь при очень малых λ и в удалении от концов интервала, не улавливая поведения истинного решения в «погранслоях».

Лемма 3.1. Уравнение Калкера — Сивашинского [9-11] соответствует вырожденному решению задачи.

Доказательство. Взяв вместо функции $M(u\lambda)$ ее поведение в нуле (2.4), получим

$$\int_{-1}^{1} p(v)\,dv \int_{0}^{\infty}\left(-\ln\frac{\lambda u}{4}-C\right)\cos u(y-v)\,du=\frac{\pi^2 EW}{2(1-\nu^2)} \qquad (3.2)$$

Воспользовавшись следующими интегралами, понимаемыми в обобщенном смысле ($\delta(y)$ — дельта-функция Дирака):

$$\int_{0}^{\infty}\cos uy\,du=\pi\delta(y), \qquad \int_{0}^{\infty}\ln u\cos uy\,du=$$

$$=\frac{d}{dy}\int_{0}^{\infty}\ln u\frac{\sin uy}{u}\,du=-\frac{\pi}{2}\frac{d}{dy}\left[\operatorname{sign} y\,(C+\ln|y|)\right]$$

сведем уравнение (3.2) к виду

$$\left(-\ln\frac{\lambda}{4}-C\right)\int_{-1}^{1} p(v)\,\delta(y-v)\,dv+\frac{1}{2}\left[2C+\ln(1-y^2)\right]p(y)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[p(v)-p(y)\right]\frac{d}{dv}\left[\operatorname{sign}(v-y)\,(C+\ln|v-y|)\right]dv=\frac{\pi EW}{2(1-\nu^2)}$$

Учитывая соотношение $(\operatorname{sign} y)'=2\delta(y)$ и воспользовавшись основным свойством дельта-функции, приходим к уравнению

$$p(y)\ln\frac{16(1-y^2)}{\lambda^2}+\int_{-1}^{1}\frac{p(v)-p(y)}{|v-y|}\,dv=\frac{\pi EW}{1-\nu^2} \qquad (3.3)$$

которое совпадает с рассмотренным в [9-11]. Лемма доказана.

Известно [1], что контактное давление под штампом имеет корневую особенность в окрестности любой гладкой части границы штампа. В частности, это должно иметь место при приближении к малым сторонам прямоугольного основания штампа. Как будет показано в п. 4, решение, даваемое формулами (2.7), (2.8), обладает этим свойством. В то же время, поскольку при выводе уравнения (3.3) теряется поведение функции $M(u)$ на бесконечности, а следовательно, изменяется поведение ядра в нуле, это приводит к тому, что поведение вырожденного решения вблизи концов штампа будет отличаться от истинного.

Если допустить, что правый конец штампа не влияет на характер распределения давления вблизи левого конца, то можно оценить поведение решения уравнения (3.2) вблизи конца интервала, заменив его уравнением Винера — Хопфа на полуоси, соответствующим полубесконечному полосовому штампу

$$\int_{0}^{\infty}\omega(v)\,dv\int_{0}^{\infty}\left(-\ln\frac{\lambda u}{4}-C\right)\cos u(y-v)\,du=\frac{\pi^2 EW}{2(1-\nu^2)}$$

$$0\leqslant y<\infty, \qquad \omega(y)=p(y-1) \qquad (3.4)$$

Лемма 3.2. Решение уравнения (3.2) в классе функций с конечной энергией ведет себя на концах интервала, как $[\ln(1\pm y)]^{-1/2}$, т. е. обращается в нуль.

Доказательство. Рассматривая уравнение Винера — Хопфа (3.4), в результате находим, что два главных члена разложения образа Лапласа функции $\omega(y)$ на бесконечности по степеням $1/p$ имеют вид

$$\Omega(p)\sim A(\ln p)^{-1/2}+\frac{\pi EW}{2(1-\nu^2)}(\ln p)^{-1/2}/p,\quad p\to\infty \tag{3.5}$$

где A — произвольная константа. Члены, возрастающие на бесконечности и, следовательно, дающие неинтегрируемую особенность решения $\omega(y)$ в нуле, были отброшены.

Оригиналами агрегатов, участвующих в (3.5), являются соответствующие μ-функции, поведение которых в нуле известно [12]. Хотя оба оригинала обладают интегрируемым поведением в нуле — соответственно $(\ln y)^{-3/2}/y$ и $(\ln y)^{-1/2}$, тем не менее первый член необходимо отбросить, положив $A=0$. Дело в том, что поведение первого слагаемого в (3.5) на бесконечности таково, что энергия, определяемая формулой [13]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}M^*(u)\,|P(u)|^2du,\qquad M^*(u)=-\ln\frac{|u\lambda|}{4}-C$$

не является конечной. Здесь $M^*(u)$ — трансформанта Фурье ядра, $P(u)$ — трансформанта Фурье функции $p(y)$. Лемма доказана.

Поскольку при полубесконечном интервале интегрирования в уравнении (3.2) вывод уравнения (3.3) перестает быть справедливым, эквивалентность данных уравнений в этом случае нарушается. Поэтому решение уравнения (3.3) может обладать поведением на конце, отличным от указанного в лемме 3.2. Этот вопрос требует дальнейшего рассмотрения.

4. Перейдем к задаче нахождения оригиналов функций (2.8) и (2.10). Представляя их в виде произведения двух функций, одна из которых содержит в себе особенности в полюсах $p=0$ и $p=-D$, а вторая имеет в левой полуплоскости лишь интегрируемые особенности, и пользуясь теоремой о свертке, после деформирования контура интегрирования в интеграле Меллина до отрицательной полуоси получим представление искомых оригиналов в виде однократных интегралов по отрезкам вещественной оси.

Поскольку значение функции $q_1(z)$ в (2.9) необходимо знать лишь при больших значениях $z=2/\lambda$, построим ее асимптотику. Она определяется поведением функции $Q_1(p)$ в нуле. Производя разложение последней при малых p и ограничиваясь двумя первыми членами

$$Q_1(p)\sim-\frac{1}{p^2\ln(pa)}-\frac{N}{p\ln(pa)},\quad p\to0,\quad N=2.474 \tag{4.1}$$

для $q_1(z)$ получим степенно-логарифмическую асимптотику в следующем виде [14]:

$$q_1(z)\sim z\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{\Gamma(2)}\right]^{(k)}\left(\ln\frac{z}{a}\right)^{-k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\ln\frac{z}{a}\right)^{-k-1},\quad z\to\infty$$

$$a_k=(a+N)\frac{b_k(1)}{k+1}-a\left[\frac{1}{\Gamma(1)}\right]^{(k)} \tag{4.2}$$

где значение коэффициентов $b_k(1)$ см. в [14] (т. 1, стр. 306).

Сравнение безразмерного коэффициента податливости штампа

$$\gamma=\frac{aWE}{P(1-\nu^2)}=\frac{2/\lambda}{\pi q_1(2/\lambda)} \tag{4.3}$$

где значения $q_1(2/\lambda)$ определяются по формуле (4.2), с полученными в [8, 11] приведено ниже

$\lambda=0.2$	$\lambda=0.15$	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.02$
0.83555	0.92184	1.0444	1.2573	1.5260
–	0.927	1.05	1.27	1.57
0.817	0.911	1.049	1.289	1.599

Вторая строчка соответствует значениям γ из [8], третья — значениям γ из [11], а последняя — расчетам по методу «малых λ».

Видно, что данные, основанные на методе «малых λ», при не очень малых λ ближе к результатам [8], а при $\lambda\leqslant 0.1$ ближе к результатам [11]. Это закономерно, ибо метод ортогональных многочленов, примененный в [8], эффективен лишь при больших и средних λ, а при малых λ теряет устойчивость. В то же время вырожденное решение [11] эффективно лишь при очень малых λ.

Для вычисления функции $q(y)$ при больших y также удобно пользоваться ее асимптотическим представлением, аналогичным (4.2). В нуле же эта функция имеет корневую особенность: $q(y)\sim(\pi y)^{-1/2}$, $y\to 0$.

y/a	$\lambda=0.2$	$\lambda=0.15$	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.05$	$\lambda=0.02$
0.0	0.4410	0.4558	0.4662	0.4670	0.4690
0.1	0.4413	0.4561	0.4668	0.4674	0.4695
0.2	0.4426	0.4575	0.4688	0.4704	0.4711
0.3	0.4448	0.4597	0.4722	0.4756	0.4738
0.4	0.4485	0.4633	0.4770	0.4828	0.4821
0.5	0.4543	0.4686	0.4836	0.4930	0.4881
0.6	0.4645	0.4768	0.4924	0.5022	0.4975
0.7	0.4827	0.4914	0.5055	0.5196	0.5186
0.8	0.5218	0.5226	0.5296	0.5437	0.5483
0.85	0.5612	0.5547	0.5534	0.5613	0.5709
0.9	0.6366	0.6182	0.6013	0.5908	0.6016
0.95	0.8305	0.7880	0.7372	0.6738	0.6532
0.975	1.130	1.057	0.9642	0.8278	0.7318
0.99	1.748	1.623	1.457	1.193	0.9460

Результаты вычислений для безразмерного давления $ap(y)/P$ приведены в таблице. Если бы контактное давление было распределено вдоль большого размера равномерно — как в случае плоской задачи, то эта величина была бы равна 0.5. Из таблицы видно, что при уменьшении отношения сторон основания штампа в точках, удаленных от границы (в частности, при $y=0$), эта величина стремится к 0.5, что закономерно и свидетельствует о постепенном выходе на плоскую задачу. В то же время это стремление очень медленное, ибо в асимптотике решения присутствуют логарифмические члены.

В заключение отметим, что ранее делалась попытка применить к уравнению (2.2) «метод малых λ», игнорируя логарифмическую особенность трансформанты в нуле. Оказалось, что полученное таким образом решение дает практически точные результаты при умеренно малых λ, обладая заметной погрешностью, лишь когда λ очень мало[1]. Этот факт может

[1] *Сумбатян М. А.* Вдавливание прямоугольного в плане узкого штампа в упругое полупространство. Тез. докл. Всес. научн. конф. «Смешанные задачи механики деформируемого тела», Ростов-на-Дону, 1977.

быть объяснен тем, что логарифмическое поведение в нуле функции $M(u\lambda)$ в уравнении (3.1) сказывается значительно лишь при очень малых λ.

В частности, для интегральной характеристики γ при изменении λ от 0.2 до 0.02 относительное отклонение такого решения от полученного в данной работе изменяется от 1 до 10%.

Поступила 26 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., «Наука», 1974.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. М., «Наука», 1976.
3. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев, «Наукова думка», 1977.
4. *Буйвол В. Н.* Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев, «Наукова думка», 1975.
5. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М., «Сов. радио», 1966.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
7. *Бородачев Н. М.* Вдавливание штампа с основанием в виде узкого прямоугольника в упругое полупространство. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
8. *Бородачев Н. М., Галин Л. А.* Контактная задача для штампа с основанием в виде узкого прямоугольника. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
9. *Sivashinsky G. I.* The problem of a slender die. J. Elasticity, 1975, vol. 5, No. 2.
10. *Kalker J. J.* On elastic line contact. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 4, p. 1125–1132.
11. *Panek C., Kalker J. J.* A solution for the narrow rectangular punch. J. Elasticity, 1977, vol. 7, No. 2.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 3. М., «Наука», 1967.
13. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
14. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов, т. 1, 2. Рига, «Зинатне», 1974, 1977.