МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1980

УДК 539.3

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА

Р. В. ГОЛЬДШТЕЙН, Е. И. ШИФРИН

(Москва)

Исследование деформирования и разрушения квазихрупких тел с трещинами предусматривает предварительное отыскание различных локальных и (или) интегральных характеристик упругого поля. При сложной форме трещины и (или) тела их определение связано с решением весьма трудных, в общем случае пространственных, задач теории упругости. В связи с этим возникает потребность в построении оценок тех или иных характеристик решения задачи о трещине сложной формы. Некоторые методы, позволяющие получать подобные оценки, предложены в [1–4].

В предлагаемой работе даны методы построения верхних и нижних оценок объема трещины нормального разрыва, занимающей плоскую область в упругой среде (пространстве, слое), и полной потенциальной энергии тела с трещиной. Оценки объема важны, в частности, при определении эффективных характеристик деформирования тела, содержащего трещины [5], при изучении закономерностей развития трещин в среде, насыщенной газом или жидкостью [6]. Оценки полной потенциальной энергии позволяют в ряде случаев получить достаточные условия разрушения (или неразрушения) тела с трещиной, так как приводят к оценкам снизу максимального и сверху минимального значения коэффициента интенсивности напряжений на произвольном контуре трещины и к двусторонним оценкам коэффициента интенсивности напряжений на контурах, вдоль которых коэффициент интенсивности постоянен (эти вопросы рассматриваются отдельно).

1. Верхние и нижние оценки объема трещины и полной потенциальной энергии тела в случае безграничной среды. 1.1. Рассмотрим безграничную среду с трещиной нормального разрыва, занимающей область G в плоскости $x_3=0$. Пусть к поверхностям трещины приложены симметричные относительно плоскости $x_3=0$ нормальные нагрузки, т. е. $\sigma_{33}(x_1, x_2, 0)=-p(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2)\in G$. Нормальные смещения $u(x_1, x_2)$ точек поверхностей трещины удовлетворяют уравнению (см., например, [2, 4])

$$p_G\Lambda u=f,\quad f=\frac{2(1-\nu^2)}{E}p(x_1,x_2),\quad u(x_1,x_2,0)=0,\quad (x_1,x_2)\in G \tag{1.1}$$

где Λ — псевдодифференциальный оператор с символом $|\xi|$

$$\Lambda u=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}u^\vee(\xi)\,|\xi|\,e^{-i(x,\xi)}d\xi \tag{1.2}$$

здесь и в дальнейшем используются обозначения

$$u^\vee(\xi)=u^\vee(\xi_1,\xi_2),\quad u^\vee(\xi)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}u(x)e^{i(x,\xi)}dx,\quad d\xi=d\xi_1\,d\xi_2,\quad (x,\xi)=x_1\xi_1+x_2\xi_2$$

p_G — ограничение на область G; предполагается, что ∂G — достаточно гладкая граница.

Рассмотрим следующие интегральные характеристики решения задачи (1.1). Объем трещины

$$V=2\int\limits_G u(x)\,dx=2L_u \tag{1.3}$$

Полная потенциальная энергия деформации тела с трещиной W, равная в силу теоремы Клапейрона

$$W=\int\limits_G u(x)\,p(x)\,dx \tag{1.4}$$

В случае однородных нагрузок $p(x)=p_0$ эти величины пропорциональны $W=(p_0V)/2$.

Перейдем к построению оценок для V и W.

1.2. Получим сначала оценки сверху для V и W. Заметим, что в силу неравенства Шварца

$$L_u\leqslant\left(\int\limits_G u^2(x)\,dx\right)^{1/2}S^{1/2}=\|u\|S^{1/2} \tag{1.5}$$

где S — площадь области G и

$$L_{u\cdot p}\leqslant\|u\|\cdot\|p\| \tag{1.6}$$

Поэтому оценки V и W сверху можно получить, оценив сверху $\|u\|$. Оператор $p_G\Lambda$ коэрцитивен, т. е.

$$(\Lambda u,\ u)\geqslant C\|u\|^2 \tag{1.7}$$

Согласно [7]:

$$(\Lambda u, u)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2}|\xi|\,|u^{\vee}(\xi)|^2d\xi=C'\int\limits_{R^2\times R^2}H_u(x,y)\,dxdy=C'M_u$$

$$H_u(x,y)=|u(x+y)-u(x)|^2|y|^{-3}$$

Поскольку носитель $u(x)\subset G$ и G — ограниченная область (для определенности пусть G лежит в круге радиуса R), то

$$M_u\geqslant\int\limits_{x\in G}\int\limits_{|y|>2R}H_u(x,y)\,dxdy=\int\limits_{x\in G}\int\limits_{|y|>2R}|u(x)|^2|y|^{-3}dxdy=C''\|u\|^2$$

Откуда следует (1.7). Из (1.1) и (1.7) имеем

$$C\|u\|^2\leqslant(\Lambda u,\ u)\leqslant\|f\|\cdot\|u\|,\quad \|u\|\leqslant\|f\|/C \tag{1.8}$$

Очевидно, что оценка (1.8) тем точнее, чем большее значение C удается подобрать. Из (1.7) следует, что наибольшее возможное значение C совпадает с величиной

$$\lambda_1(G)=\inf_{u\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)}(\Lambda u, u)\,\|u\|^{-2} \tag{1.9}$$

представляющей наименьшее собственное число оператора $p_G\Lambda$. Определение пространств $H_s^{\circ}(G)$ и $H_s(G)$ см., например, в [7].

Таким образом построение оценки $\|u\|$ сверху сводится к нахождению $\lambda_1(G)$. В связи с этим необходимо учитывать

Замечание 1.1. Оператор $p_G\Lambda$ осуществляет изоморфизм пространств $\overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$ и $H_{-1/2}(G)$. Обозначим обратный оператор через Ω'. Так как $H_0(G)\subset H_{-1/2}(G)$, то можно рассмотреть ограничение Ω' на $H_0(G)$:

$$\Omega':H_0(G)\to \overset{\circ}{H}_{1/2}(G),\qquad i:\overset{\circ}{H}_{1/2}(G)\to H_0(G),\qquad \Omega=i\circ\Omega'$$

где i – вполне непрерывное вложение.

Поскольку оператор Ω' непрерывен, отсюда следует, что Ω – вполне непрерывный оператор. Далее, так же как и $p_G\Lambda$, оператор Ω самосопряженный и положительно определенный, действующий в $L_2(G)$. Поэтому Ω обладает в $L_2(G)$ ортогональным базисом из собственных векторов; все собственные числа положительны и накапливаются к нулю, собственные векторы оператора Ω являются собственными векторами оператора $p_G\Lambda$, причем соответствующие собственные числа взаимнообратны. Поэтому вместо того, чтобы находить наименьшее собственное число оператора $p_G\Lambda$, можно найти наибольшее собственное число оператора Ω.

Прежде чем переходить к нахождению $\lambda_1(G)$, отметим, что точность оценки (1.5), (1.8) объема V, опирающейся на (1.7), зависит лишь от свойств оператора $p_G\Lambda$. При этом не учитываются свойства u как решения (1.1). В случае однородной нагрузки (для определенности единичной интенсивности $p=1$) можно предложить другой способ построения верхней оценки V, использующий то, что u_0 – решение (1.1) при $p=1$.

Величина $q_0=2/V_0$, где V_0 – объем трещины при единичной нагрузке, представляет минимальное значение функционала

$$\inf_{u\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)} (\Lambda u,u)\,L_u^{-2}=q_0 \tag{1.10}$$

реализующееся на решении u_0. Действительно, пусть $u(x)\in\overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$, тогда с учетом равенства Парсеваля имеем

$$L_u^2=\gamma^2\left[\int_G \Lambda u_0 u\,dx\right]^2=\gamma^2\left[\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}|\xi|u_0^{\vee}(\xi)\bar{u}^{\vee}(\xi)\,d\xi\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant\gamma^2(\Lambda u_0,u_0)(\Lambda u,u)=\gamma L_{u_0}(\Lambda u,u);\qquad \gamma=E/[2(1-\nu^2)]$$

Следовательно

$$(\Lambda u,u)L_u^{-2}\geqslant\gamma^{-1}L_{u_0}^{-1}=(\Lambda u_0,u_0)L_{u_0}^{-2}=q_0 \tag{1.11}$$

В дальнейшем удобно рассматривать параллельно задачи построения оценок при однородной и неоднородной нагрузках, поскольку в основе вычисления $\lambda_1(G)$ и $q_0(G)$ лежит следующая *теорема*, устанавливаемая в п. 2: для безграничной среды с плоской трещиной нормального отрыва заданной площади величины $\lambda_1(G)$ и $q_0(G)$ принимают минимальное значение в случае круговой трещины.

Из этой теоремы следует, что

$$\lambda_1(G)\geqslant\lambda_1(K_R) \tag{1.12}$$

где K_R – круг радиуса R, такой, что $\mu(K_R)=\mu(G)=S$ $(R=\sqrt{S/\pi})$.

Нетрудно видеть, что в соответствии с (1.9) и [7]:

$$\lambda_1(K_R)=\inf_{u\in\overset{\circ}{H}_{1/2}(K_R)}(\Lambda u,u)\|u\|^{-2}=\inf_{u\in\overset{\circ}{H}_{1/2}(K_R)}C'M_u\|u\|^{-2}=$$

$$=\inf_{v\in\overset{\circ}{H}_{1/2}(K_1)}C'M_v\|v\|^{-2}R^{-1}=R^{-1}\lambda_1(K_1)=\lambda_1(K_1)\sqrt{\pi/S} \tag{1.13}$$

Учитывая (1.12), (1.13), имеем из (1.8), (1.9) оценку

$$\|u\|\leqslant\lambda_1^{-1}(K_1)\|f\|\sqrt{S/\pi} \tag{1.14}$$

и, согласно (1.3) — (1.6), используя (1.14), оценки V и W

$$V\leqslant2\gamma^{-1}\lambda_1^{-1}(K_1)S\pi^{-1/2}\|p\|,\qquad W\leqslant\gamma^{-1}\lambda_1^{-1}(K_1)\sqrt{S/\pi}\|p\|^2 \tag{1.15}$$

Входящая в (1.15) величина $\lambda_1(K_1)$ вычислена в п. 2.2 и оказалась равной двум.

В случае однородной нагрузки, согласно теореме

$$q_0(G)\geqslant q_0(K_R) \tag{1.16}$$

и, следовательно ($q_0=2/V_0$)

$$V_0(K_R)\geqslant V_0(G) \tag{1.17}$$

Это изопериметрическое неравенство показывает, что объем круговой трещины не меньше объема трещины, занимающей произвольную область той же площади.

Замечание 1.2. Неравенство (1.17) было сформулировано в [2], исходя из введенного там представления об экстремальных контурах трещины, в предположении, что последние в случае однородной нагрузки существуют и являются окружностями. Приводимое здесь доказательство изопериметрического неравенства (1.17) служит одновременно доказательством этого предположения при условии, что речь идет об экстремальных контурах данной площади S, охватывающих некоторую фиксированную область, которую можно заключить в круг площади S.

1.3. Построим оценки W и V снизу. Для объема трещины из (1.1), (1.3) можно записать

$$(\Lambda u,\ u)=(f,\ u)\leqslant f_{\max}{}^1/_2V \tag{1.18}$$

Другой способ получения оценки V снизу состоит в том, чтобы воспользоваться установленным в [4] на основе теоремы взаимности соотношением

$$^1/_2V=\int\limits_G u(x)\,dx=\int\limits_G p(x)\,u_0(x)\,dx\geqslant p_{\min}\int u_0 dx={}^1/_2p_{\min}V_0=\gamma p_{\min}(\Lambda u_0,\ u_0) \tag{1.19}$$

Здесь, как и в п. 1.2, u_0 – решение (1.1) при однородной нагрузке единичной интенсивности. Выражение для полной потенциальной энергии W можно записать в виде $W=\gamma(\Lambda u,\ u)$.

Таким образом, один из способов построения оценок снизу для V и W заключается в том, чтобы найти предварительно оценку снизу для величины $(\Lambda u,\ u)$ (или $(\Lambda u_0,\ u_0)$).

Величину $(\Lambda u,\ u)$ оценим, используя следующее соотношение:

$$(\Lambda u, u)=\sup_{v\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)}\left[\left(\int\limits_G fv\,dx\right)^2/(\Lambda v, v)\right] \tag{1.20}$$

справедливость которого проверяется непосредственно. В силу (1.1)

$$(f, v)^2=(\Lambda u, v)^2\leqslant(\Lambda u, u)(\Lambda v, v),\quad \forall v\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G) \tag{1.21}$$

поэтому $(\Lambda u,\ u)\geqslant(f,\ v)^2(\Lambda v,\ v)^{-1}$; в то же время $(f,\ v)^2(\Lambda v,\ v)^{-1}=(f,\ u)^2(\Lambda u,\ u)^{-1}=(\Lambda u,\ u)$ при $v=u$.

Таким образом, оценку снизу $(\Lambda u,\ u)$ можно получить, выбирая различные пробные функции v в. (1.20). При этом полезно иметь в виду, что если рассмотреть области G, G_1, для которых $G_1\subset G$, то будем иметь

$$\sup_{w\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G_1)}\left(\int\limits_{G_1} fw\,dx\right)^2(\Lambda w, w)^{-1}\leqslant\sup_{v\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)}\left(\int\limits_G fv\,dx\right)^2(\Lambda v, v)^{-1} \tag{1.22}$$

Поскольку вычисление величины $(\Lambda v,\ v)$ для функций $v\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$ весьма трудоемко, можно перейти к более удобным оценкам, учитывая, что $\overset{\circ}{H}_{1/2}(G)\supset \overset{\circ}{H}_1(G)$. Поэтому

$$\sup_{v\in \overset{\circ}{H}_{1/2}(G)}(f, v)^2(\Lambda v, v)^{-1}\geqslant\sup_{v\in \overset{\circ}{H}_1(G)}(f, v^2)(\Lambda v, v)^{-1} \tag{1.23}$$

для $v \in H_1^\circ(G)$ имеем

$$(\Lambda v, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi| |v^\vee(\xi)|^2 d\xi \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(|\xi|^2+1)}{2} |v^\vee(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\|v\|^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|^2 \right) = E_1(v) \qquad (1.24)$$

или другое, более точное, неравенство

$$(\Lambda v, v) \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi|^2 |v^\vee(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{-\infty}^{\infty} |v^\vee(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|^2 \right)^{1/2} \|v\| = E_2(v) \qquad (1.25)$$

Из (1.20), (1.23) – (1.25) следуют два неравенства для $(\Lambda u, u)$:

$$(\Lambda u, u) \geqslant \sup_{v \in H_1^\circ(G)} A_i(f, v) = A_i(f) \quad (i=1,2), \quad A_i(f, v) = (f, v)^2 E_i^{-1}(v) \qquad (1.26)$$

Величины $E_1(v)$ $E_2(v)$ легко вычисляются при заданной функции v. Соотношения (1.18) и (1.26) дают искомые оценки V и W снизу

$$V \geqslant 2 f_{\max}^{-1} A_i(f), \qquad W = \gamma(\Lambda u, u) \geqslant \gamma A_i(f), \qquad V \geqslant 2 f_{\min} A_i(1) \qquad (1.27)$$

Неравенство (1.26) позволяет свести оценку снизу квадратичной формы $(\Lambda u, u)$ к оценке снизу квадратичной формы $(-\Delta w, w)$, где $w \in H_1^\circ(G)$ и Δw задано.

Действительно, $\sup\limits_{v \in \overset{\circ}{H}_1(G)} (f, v)^2 E_2^{-1}(v) \geqslant (f, w)^2 E_2^{-1}(w)$, в частности для $w \in H_1^\circ(G)$ и $-\Delta w = f$. Обозначим $\|\partial w / \partial x_1\|^2 + \|\partial w / \partial x_2\|^2 = D(w)$. Тогда, очевидно, $(f, w) = D(w)$ и

$$\frac{(f, w)^2}{E_2(w)} = \frac{D^2(w)}{\sqrt{D(w)}\, \|w\|} = \frac{\sqrt{D(w)}}{\|w\|} D(w) = \frac{\sqrt{D(w)}}{\|w\|} (f, w)$$

Из результатов [8] следует, что $\sqrt{D(w)} / \|w\| \geqslant \sqrt{\lambda^1(G)} \geqslant \sqrt{\lambda^1(K_R)}$, где $\lambda^1(G)$ – минимальное собственное число оператора $-\Delta$ в области G и $\lambda^1(G) \geqslant \lambda^1(K_R)$, здесь K_R – круг, площадь которого равна площади области G. Поэтому окончательно имеем

$$(\Lambda u, u) \geqslant \sqrt{\lambda^1(K_R)}\, (f, w), \qquad -\Delta w = f, \qquad w \in H_1^\circ(G)\ (x_1, x_2) \in G \qquad (1.28)$$

1.4. Приведем примеры применения полученных оценок для объема трещины V. Пусть $G = K_1$ – круг единичного радиуса и $p = 1 - r^2$. В соответствии с точным известным решением задачи имеем $V = 8\gamma^{-1} / 5$.

Из (1.15), учитывая, что $\lambda_1(K_1) = 2$ и $S = \mu(K_1) = \pi$, получим

$$V \leqslant 2\gamma^{-1} \pi \|1 - r^2\| / (\sqrt{\pi} 2) = \gamma^{-1} \sqrt{\pi} \|1 - r^2\| = V^u$$

Поскольку

$$\|1 - r^2\| = \left(\int\limits_{K_1} (1 - r^2)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

окончательно имеем $V^u = \gamma^{-1} \pi / \sqrt{3}$.

Оценку снизу найдем согласно (1.27). В данном случае $p_{max}=1$. В качестве пробной функции v возьмем $v=1-r^2$. Тогда

$$(p,v)^2=\left(\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^2 r\,dr\,d\varphi\right)^2=\frac{\pi^2}{9},\quad E_2(v)=\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

поскольку $\|v\|=(v,v)^{1/2}=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$, $\left\|\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right\|^2+\left\|\dfrac{\partial v}{\partial x_2}\right\|^2=2\pi.$

В результате из (1.27) имеем

$$V\geqslant 2\gamma^{-1}\pi/(3\sqrt{6})=V_{\text{est}}^{l} \tag{1.29}$$

Верхнее оценочное значение V отличается от точного на 14%, нижнее — на 47%. Отметим, что нижнюю оценку можно улучшить за счет более удачного выбора пробной функции v.

Пусть G — эллиптическая область с полуосями a, b $(a>b)$ и $p=A+Bx_1$ (постоянные A и B выбраны так, чтобы в пределах трещины $p\geqslant 0$). Тогда, согласно результатам [9], точное значение объема V равно: $V=\frac{4}{3}\pi abc$, $c=\gamma^{-1}Ab/E^*(k)$, $k^2=1-b^2/a^2$. Здесь $E^*(k)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода.

Для определенности пусть $a=1$, $b=0.5$, $A=1$, $B=-1$. При этом $V=\gamma^{-1}\pi/3.63$. Верхнее оценочное значение V находим из (1.15), учитывая, что $\|p\|=\sqrt{5\pi/8}$. Таким образом, $V^u=\frac{1}{2}\gamma^{-1}\pi\sqrt{5/8}$ и отличие оценочного значения от точного составляет 44%.

2. Доказательство изопериметрического неравенства. 2.1. Доказательство теоремы, сформулированной в п. 1.2, использует вариационную формулировку (1.9), (1.10) задач отыскания $\lambda_1(G)$, $q_0(G)$ и операцию симметризации, близкую к [8], его можно разделить на пять этапов.

1. *Лемма 2.1.* Функция u_0, реализующая минимум функционала (1.10), строго положительна внутри G; в подпространстве функций, реализующих минимум функционала (1.9), можно выбрать строго положительную внутри G функцию u_1.

Сначала покажем, что решение u задачи (1.1) строго положительно внутри области $G\forall f\geqslant 0$ и $f\not\equiv 0$. Действительно, u является граничным значением гармонической в R_+^3 функции U [10], удовлетворяющей условиям

$$U(x_1,x_2,0)=0,\ (x_1,x_2)\in G,\quad U(x_1,x_2,0)=u$$

$$(x_1,x_2)\in G,\quad \frac{\partial U(x_1,x_2,0)}{\partial x_3}=-f(x_1,x_2) \tag{2.1}$$

Если существует точка $M(x_1^M,x_2^M)\in G$, в которой $u\leqslant 0$, то U принимает минимальное значение $U(M^*)<0$ в точке M^*, но по условию (2.1) $[\partial U(x_1,x_2,0)/\partial x_3]\leqslant 0$, что противоречит усиленному принципу максимума Хопфа [11]. Таким образом, оператор Ω, введенный ранее (замечание 1.1), положителен. Отметим, что близкое доказательство положительности u приведено в [1].

Поскольку u_0 — решение (1.1) при $p=1$, то по доказанному u_0 строго положительна внутри G.

Справедливость второй части утверждения леммы 2.1 устанавливается с помощью теоремы 2.5, приведенной в [12]. Применимость этой теоремы в рассматриваемом случае проверяется непосредственно.

Оператор Ω положителен и вполне непрерывен. Рассмотрим некоторую собственную функцию u_1, отвечающую собственному числу $\lambda_1(G)$. Если $-u_1\geqslant 0$, то, поскольку $(-u_1)$ также собственная функция, отвечающая

$\lambda_1(G)$, можно тем самым выбрать неотрицательную собственную функцию, отвечающую $\lambda_1(G)$. Если же $(-u_1)$ не является неотрицательной, то u_1 можно представить в виде $u_1=v-w$, где v, w — неотрицательны и $\Omega u_1=\lambda_1 u_1$. По теореме 2.5 [12] из этого следует, что существует неотрицательный собственный вектор x_0, такой, что $\Omega x_0=\lambda_0 x_0$ и $\lambda_0\geqslant\lambda_1$. Однако λ_1 — максимальное собственное число оператора Ω. Поэтому $\lambda_0=\lambda_1$ и существует неотрицательный собственный вектор u_1, отвечающий λ_1. Из того, что $u_1\neq 0$, следует строгая положительность u_1 внутри G. Лемма доказана.

2. *Введем необходимое для дальнейшего понятие симметризации функции относительно плоскости.* Пусть $\Phi_1(x_1, x_2, x_3)$ — непрерывная функция, определенная в полупространстве $\overline{R_+^3}$, такая, что $\Phi_1(x)\geqslant 0$, $\Phi_1(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$ и Π — плоскость, параллельная оси x_3. Считаем, что функция $\Phi_2(x)$ получена симметризацией функции $\Phi_1(x)$ относительно плоскости Π, если она построена по следующему правилу. Примем, что

$$D(t)=\{x\in\overline{R_+^3},\ \Phi_1(x)>t\},\qquad D^0(t)=\{x\in\overline{R_+^3},\ \Phi_1(x)\geqslant t\},\ t>0$$

Обозначим длину пересечения прямой l, перпендикулярной к Π, с множествами $D(t)$ и $D^0(t)$ через $l(t)$ и $l^0(t)$ соответственно. Принимая точку пересечения l с Π за начало координат, положим $\Phi_2(x)=t$ на отрезках $[-l^0(t)/2, -l(t)/2]$ и $[l(t)/2, l^0(t)/2]$ прямой l.

При $t=0$, если $l(0)=\infty$, то $\Phi_2(\pm\infty)=0$; в противном случае, когда $l(0)<\infty$, функция $\Phi_2(x)=0$ на лучах $(-\infty, -l(0)/2]$, $[l(0)/2, +\infty)$.

На каждой прямой построение ведется от $t=0$ до $t=\Phi_{1\max}^{l}$, равного максимальному значению функции $\Phi_1(x)$ на прямой l.

Проведя такое построение для всех прямых, перпендикулярных Π и лежащих в $\overline{R_+^3}$, определим функцию $\Phi_2(x)$.

Определение Φ_2 корректно, так как в силу непрерывности $\Phi_1(x)$ $l(t_1)\leqslant l^0(t_1)<l(t_2)$ при $t_1>t_2$. Можно проверить, что полученная функция $\Phi_2(x)$ непрерывна и $\Phi_2(x)\to 0$ $(|x|\to\infty)$.

Замечание 2.1. Рассмотрим функцию $\Phi_1(x)$, определенную в замкнутой области T. Пусть граница T — поверхность уровня $\Phi_1(x)$. Если поверхности уровня функции $\Phi_1(x)$ представляют простые поверхности, вложенные друг в друга, и минимум $\Phi_1(x)$ достигается на границе T, то любая прямая, перпендикулярная фиксированной плоскости Π, пересекает поверхность уровня $\Phi_1(x)=t$ в $2n$ точках $q_1^l, \ldots, q_{2n}^l$ (точки касания прямой с поверхностью уровня считаются дважды). Длина пересечения $l(t)$ равна $q_2^l-q_1^l+q_4^l-q_3^l+\ldots+q_{2n}^l-q_{2n-1}^l$, и введенная выше симметризация сводится к симметризации Штейнера [8] поверхностей уровня функции $\Phi_1(x)$. В более общем случае, при наличии у $\Phi_1(x)$ критических точек, поверхности уровня $\Phi_1(x)$ могут иметь особые точки и построение симметризованной функции $\Phi_2(x)$ осуществляется по указанному в определении правилу.

Пусть функция $\Phi_1(x)=U(x)$ гармоническая в R_+^3, такая, что

$$U(x_1, x_2, 0)=0,\quad (x_1, x_2)\in R^2\setminus G$$

$$U(x_1, x_2, 0)=u(x_1, x_2)>0,\quad (x_1, x_2)\in G,\ U(x)\to 0,\ |x|\to\infty \tag{2.2}$$

Соответствующую ей после симметризации функцию $\Phi_2(x)$ обозначим через $V(x)$. Из определения следует

$$V(x_1, x_2, 0)=0,\ (x_1, x_2)\in R^2\setminus G';\ V(x_1, x_2, 0)=v(x_1, x_2),\ (x_1, x_2)\in G' \tag{2.3}$$

где область G' получена из G с помощью симметризации Штейнера [8] относительно прямой, являющейся пересечением плоскостей Π и $x_3=0$. Согласно правилу построения функции Φ_2, для любой функции g справедливо тождество

$$\int_G g(u)\,dx=\int_{G'} g(v)\,dx \tag{2.4}$$

Так как гармоническая функция $U(x)$ аналитична в R_+^3 и не является постоянной, то прямая, перпендикулярная плоскости П и не лежащая в плоскости $x_3=0$, может пересекать поверхность уровня функции U не более, чем в конечном числе точек. Аналогично на каждой такой прямой не более конечного числа критических точек функции U.

3. *Лемма 2.2.* Пусть $U(x)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая условиям (2.2), и $V(x)$ получена симметризацией относительно плоскости П, тогда

$$\int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx \geqslant \int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} V|^2 dx \tag{2.5}$$

Выше отмечалось, что на каждой прямой l может быть лишь конечное число критических точек функции $U(x)$. Поэтому множество точек пересечения l с поверхностями уровня, имеющими критические точки на l меры нуль. Вне этого множества построение $V(x)$ сводится к симметризации Штейнера относительно плоскости П поверхностей уровня функции $U(x)$. В связи с этим доказательство (2.5) повторяет доказательство аналогичного соотношения, используемого при выводе изопериметрического неравенства для электростатической емкости [8] (п. 7.3).

4. *Лемма 2.3.* Пусть функция $F\in H_1(R_+^3)$ и $F(x_1, x_2, 0)=u$, $F(x)\to 0$ при $|x|\to\infty$. Тогда

$$\int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} F|^2 dx \geqslant \int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx \tag{2.6}$$

где U — гармоническая в R_+^3 функция, удовлетворяющая условиям (2.2).

Предположим сначала, что $F\in C^1(R_+^3)$, и представим F в виде $F=U+h$, где $h\to 0$ при $|x|\to\infty$ и $h(x_1, x_2, 0)=0$.

Тогда

$$\int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} F|^2 dx = \int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx + \int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} h|^2 dx + \sum_{1}^{3} \int\limits_{R_+^3} \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial h}{\partial x_i} dx$$

Можно показать, что последний член в этой формуле равен нулю. Следовательно

$$\int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} F|^2 dx \geqslant \int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx$$

Если функция F удовлетворяет условиям леммы, то ее можно представить в виде $F=U+h$, где $h\in H_1^0(R_+^3)$. Так как $C_0^\infty(R_+^3)$ плотно в $H_1^0(R_+^3)$, то существует последовательность $h_n\in C_0^\infty(R_+^3)$, такая, что $h_n\to h$ в H_1^0. Тогда последовательность $F_n=U+h_n\to F$ в H_1. По доказанному

$$\int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} F_n|^2 dx \geqslant \int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx, \quad \forall n$$

поэтому имеет место утверждение леммы 2.3.

5. При завершении доказательства теоремы понадобится следующее тождество:

$$(\Lambda u, u) = \int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx = I_U \tag{2.7}$$

где U — гармоническая функция, определенная условиями (2.2). Справедливость его проверяется непосредственно

$$\int\limits_{R_+^3} |\operatorname{grad} U|^2 dx = -\int\limits_{R^2(x_3=0)} \frac{\partial U}{\partial x_3} U\,dx - \int\limits_{R_+^3} U\Delta U dx = -\int\limits_{R^2(x_3=0)} \frac{\partial U}{\partial x_3} U dx = (\Lambda u, u)$$

Используя (2.7), можно переписать выражения (1.9), (1.10) для $\lambda_1(G)$ и $q_0(G)$ следующим образом:

$$\lambda_1(G)=(\Lambda u_1,\ u_1)\|u_1\|^{-2}=I_{U_1}\|u_1\|^{-2},\quad q_0(G)=(\Lambda u_0,\ u_0)L_{u_0}^{-2}=I_{U_0}L_{u_0}^{-2} \tag{2.8}$$

Напомним, что здесь u_1 — положительная собственная функция оператора $p_G\Lambda$, отвечающая собственному числу $\lambda_1(G)$; u_0 — решение задачи (1.1) при единичной нагрузке; гармонические функции U_1, U_0 удовлетворяют условиям (2.2) при $u=u_1$ и u_0 соответственно.

Функции $u_1(x)$ и $u_0(x)$, согласно лемме 2.1, положительны. Поэтому в силу принципа максимума для оператора Лапласа функции $U_1(x)$ и $U_0(x)$ также положительны.

Применим к этим функциям операцию симметризации относительно плоскости П, параллельной оси x_3. При этом $U_1(x)$ и $U_0(x)$ перейдут в функции $V_1(x)$ и $V_0(x)$, удовлетворяющие (2.3) при $v=v_1$ и v_0. Из (2.4) следует, что для v_1, v_0 имеют место соотношения

$$\int\limits_G u_1^2(x)\,dx=\int\limits_{G'} v_1^2(x)\,dx;\qquad L_{u_0}=\int\limits_G u_0(x)\,dx=\int\limits_{G'} v_0(x)\,dx=L_{v_0} \tag{2.9}$$

В соответствии с леммами 2.2 и 2.3 получим

$$\begin{gathered}\lambda_1(G)=I_{U_1}\|u_1\|^{-2}\geqslant I_{V_1}\|v_1\|^{-2}\geqslant I_{U_1'}\|u_1'\|^{-2}=\lambda_1(G')\\ q_0(G)=I_{U_0}L_{u_0}^{-2}\geqslant I_{V_0}L_{v_0}^{-2}\geqslant I_{U_0'}L_{u_0'}^{-2}=q_0(G')\end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь u_1', v_0' реализуют минимум функционалов (1.9), (1.10) для области G'; U_1', U_0' — гармонические в R_+^3 функции, которые определяются через u_1', u_0' по условиям (2.2).

Область G' получена симметризацией Штейнера из области G, поэтому $\mu(G')=\mu(G)$. С помощью надлежащей последовательности симметризацией из G можно получить круг [8] (п. 7.3). Теорема доказана.

Замечание 2.2. Соображения, аналогичные использованным в [8] (п. 7.4), приводят к утверждениям о том, что в однородном поле нагрузок объем трещины, занимающей область в виде равностороннего треугольника (квадрата), не меньше, чем объем трещин, занимающих произвольные треугольные (четырехугольные) области той же площади.

2.2. Перейдем к вычислению $\lambda_1(K_1)$. С этой целью рассмотрим введенный в п. 1.2 оператор Ω: $L_2(K_1)\to L_2(K_1)$. Максимальное собственное число (оператора Ω) $\mu_1(K_1)=1/\lambda_1(K_1)$ равно норме оператора Ω. Построим теперь последовательность операторов Ω_n, такую, что максимальное собственное число

$$\mu_1(K_1)=\lim_{n\to\infty}\mu_1^{(n)}(K_1) \tag{2.11}$$

где $\mu_1^{(n)}(K_1)$ — максимальное собственное число оператора Ω_n.

Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ — ортонормированная система функций в $L_2(K_1)$. Подпространство, натянутое на векторы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, обозначим через Π_n. Пусть, далее, ортонормированная система такова, что $\overline{\cup\Pi_n}$ содержит собственный вектор e_1, отвечающий собственному числу $\mu_1(K_1)$. Определим оператор Ω_n: $\Pi_n\to\Pi_n$, $\Omega_n u=p_n\Omega u$, $\forall u\in\Pi_n$, где p_n — оператор проектирования на Π_n, Ω_n — положительно-определенный самосопряженный оператор, действующий в конечномерном пространстве Π_n; $\mu_1^{(n)}(K_1)$ равно норме Ω_n. Последовательность $\mu_1^{(n)}$ неубывающая, так как, очевидно, $\|\Omega_{n+1}\|\geqslant\|\Omega_n\|$. Отсюда с учетом того, что $\overline{\cup\Pi_n}\ni e_1$, следует соотношение (2.11).

Представим собственную функцию $e_1^{(n)}$ оператора Ω_n, отвечающую $\mu_1^{(n)}$ в виде $e_1^{(n)}=\Sigma a_k\psi_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Поскольку $(e_1^{(n)}, \psi_i)=a_i$, то, обозначая $(\Omega\psi_k, \psi_i)=\gamma_{ki}$, получим

$$(\Omega_n e_1^{(n)}, \psi_i)=(\Omega e_1^{(n)}, \psi_i)=\sum_{k=1}^{n} a_k\gamma_{ki}=\mu_1^n a_i \tag{2.12}$$

Для единичного круга, очевидно, $e_1(x_1, x_2)=e_1(r)$, $r^2=x_1^2+x_2^2$. На функциях, зависящих только от радиуса r, оператор Ω в круге K_1 имеет вид [10]:

$$\Omega q=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}\sin\alpha} q(\sqrt{r^2\sin^2\alpha+y^2})\,dy\,d\alpha \tag{2.13}$$

Это позволяет вычислить γ_{ki} при конкретном выборе системы функций ψ_k. Из (2.12) имеет систему уравнений относительно a_k и μ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\gamma_{ki}=\mu a_i \quad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)} \tag{2.14}$$

Поскольку $e_1^{(n)}\neq 0$, то не все $a_k=0$ и $\det\|\gamma_{ki}-\mu\delta_{ki}\|=0$. В качестве $\mu_1^{(n)}$ выбирается максимальное собственное число матрицы $\|\gamma_{ki}\|$. При расчетах использовалась следующая система ортонормированных базисных функций: $\psi_k(r)=(\pi r)^{-1/2}\sin(k\pi r)$. Оказалось, что максимальное собственное число $\mu_1^{(n)}$ оператора Ω_n при $n=7$ и 9 равно $\mu_1^{(7)}=0.40772$ и $\mu_1^{(9)}=0.49798$.

Поэтому в качестве $\mu_1(K_1)$ было принято $\mu_1(K_1)\approx 0.5$ и $\lambda_1(K_1)\approx 2$.

3. Оценки объема трещины, расположенной в слое. Используя изопериметрическое неравенство для $\lambda_1(G)$, можно получить также верхние оценки объема трещины, расположенной в срединной плоскости $x_3=0$ упругого слоя толщины $2h$. Будем считать, что грани слоя свободны от напряжений, а к поверхностям трещины приложены нормальные нагрузки, симметричные относительно плоскости трещины. Тогда нормальные смещения $u(x)$ точек поверхностей трещины удовлетворяют псевдодифференциальному уравнению [2]:

$$p_G(\Lambda-K_h)u(x)=f(x), \quad u(x)=0 \quad (x\bar{\in} G), \quad f(x)=\gamma^{-1}p(x) \tag{3.1}$$

$$K_h(\xi)=|\xi|l(h|\xi|), \quad l(z)=\frac{2(1+2z+2z^2-e^{-2z})}{4z+e^{2z}-e^{-2z}}, \quad 0\leqslant z<\infty \tag{3.2}$$

Функция $l(z)$ — убывающая функция, так как $l'(z)<0$, кроме того, $l(0)=1$ и $l(+\infty)=0$, поэтому $0\leqslant l(h|\xi|)\leqslant 1$.

Как и в случае безграничной среды (п. 1.2), для построения верхней оценки V и W нужно предварительно оценить сверху $\|u\|$. Из (3.1) имеем

$$((\Lambda-K_h)u, u)=(f, u)\leqslant\|f\|\|u\| \tag{3.3}$$

Покажем, что для оператора $p_G(\Lambda-K_h)$ имеет место условие, аналогичное (1.7):

$$((\Lambda-K_h)u, u)\geqslant\|u\|^2C_h, \quad C_h=[1-l(hR_0(h))]\left[\sqrt{\frac{\pi}{S}}\lambda_1(K_1)-R_0(h)\right] \tag{3.4}$$

где $R_0(h)$ определено ниже. Введем $J_0=(\Lambda u, u)$ и $J_h=(K_h u, u)$. Тогда оценка снизу для $((\Lambda-K_h)u, u)=J_0-J_h$ получится, если J_h оценить сверху. Имеем

$$J_h=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\xi|<R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2 l(h|\xi|)\,d\xi+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\xi|>R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2 l(h|\xi|)\,d\xi \tag{3.5}$$

Далее

$$J_h-J_0=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\xi|<R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2[l(h|\xi|)-1]\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\xi|>R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2[l(h|\xi|)-1]\,d\xi$$

Поскольку $[l(h|\xi|)-1]\leqslant 0$ и $l(h|\xi|)$ — убывающая функция

$$J_h-J_0\leqslant\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\xi|>R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2[l(h|\xi|)-1]\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^2}[l(hR)-1]\int\limits_{|\xi|>R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2\,d\xi \tag{3.6}$$

Обозначим $J_R=\dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int\limits_{|\xi|>R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2\,d\xi$. Для величины J_R справедливы неравенства

$$J_R=J_0-\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\xi|<R}|\xi||u^\vee(\xi)|^2\,d\xi\geqslant J_0-\frac{R}{(2\pi)^2}\int\limits_{|\xi|<R}|u^\vee(\xi)|^2\,d\xi\geqslant$$

$$\geqslant J_0-\frac{R}{(2\pi)^2}\int\limits_{R^2}|u^\vee(\xi)|^2\,d\xi=J_0-R\|u\|^2\geqslant J_0-\frac{R}{\lambda_1(G)}J_0\geqslant\frac{\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(K_1)-R}{\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(K_1)}J_0 \tag{3.7}$$

При $0\leqslant R\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{S}}\lambda_1(K_1)$ из (3.6), (3.7) с учетом того, что $[l(h|\xi|)-1]\leqslant$ $\leqslant 0$ следует неравенство

$$J_h\leqslant J_0\left[(l(hR)-1)\frac{\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(K_1)-R}{\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(K_1)}+1\right]=J_0 I(R) \tag{3.8}$$

Пусть при $0\leqslant R=R_0(h)\leqslant\sqrt{\dfrac{\pi}{S}}\lambda_1(K_1)$ достигается минимум выражения $I(R)$. Тогда для $((\Lambda-K_h)u, u)$ с учетом (1.9) имеем

$$((\Lambda-K_h)u, u)=J_0-J_h>J_0-J_0 I(R_0(h))=$$

$$=(\Lambda u, u)\,[1-l(hR_0(h))]\,\frac{\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(K_1)-\overset{\circ}{R}_0(h)}{\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(K_1)}\geqslant$$
$$\geqslant[1-l(hR_0(h))]\,[\sqrt{\pi/S}\,\lambda_1(K_1)-R_0(h)]\,\|u\|^2 \qquad (3.9)$$

Отметим, что неравенство (3.9) позволяет доказать существование и единственность решения в $\overset{\circ}{H}_{1/2}(G)$ при $f\in H_{-1/2}(G)$ для уравнения (3.1).

Таким образом, справедливость неравенства (3.4) установлена. В силу (3.3), (3.4) имеем $\|u\|\leqslant\|f\|/C_h$ и соответственно для V и W получаем оценки, аналогичные (1.15):

$$V\leqslant2\sqrt{S}\|f\|/C_h,\quad W\leqslant\gamma^{-1}\|p\|^2/C_h$$

Поступила 26 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М.* Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3.
2. *Goldstein R. V., Entov V. M.* Variational bounds and qualitative methods in fracture mechanics. Proc. 4th Internat. Conf. on Fracture, Canada, 1977. New York — London, Pergamon Press, 1978, vol. 4.
3. *Гольдштейн Р. В., Спектор А. А.* Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 2.
4. *Гольдштейн Р. В.* Плоская трещина произвольного разрыва в упругой среде. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 3.
5. *Салганик Р. Л.* Механика тел с большим числом трещин. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
6. *Гольдштейн Р. В., Ентов В. М., Павловский Б. Р.* Модель развития водородных трещин в металле. Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 4.
7. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М., «Наука», 1973.
8. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М., Физматгиз, 1962.
9. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading. Eng. Fract. Mech., 1971, vol. 3, No. 1.
10. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Наукова думка», 1968.
11. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
12. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.