МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1980

УДК 539.3.01

К ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДИСТОРСИЯХ

Н. Н. СУСЛОВА

(Кострома)

Приводится постановка статических задач теории упругости в дисторсиях, которая сводится к нахождению потенциального тривектора дисторсии, удовлетворяющего системе трех линейных уравнений в частных производных первого порядка по заданным на границе его касательным составляющим или по заданным «обобщенным» нормальным составляющим. Сформулирован вариационный принцип условного минимума функционала энергии V с плотностью энергии, выраженной в компонентах дисторсии; показана эквивалентность предлагаемой постановки задач теории упругости в дисторсиях и вариационной постановки. Доказано, что при построении функционала I, имеющего безусловный экстремум, неопределенные множители Лагранжа являются функциями, которые непосредственно связаны с функциями напряжений, введенными Ю. А. Крутковым [1].

1. Обозначим $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки, $\mathbf{u}(\mathbf{x})=(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений в некотором ортонормированном декартовом базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=1, 2, 3$; $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})={}^1/_2(u_{i,j}+u_{j,i})$ — компоненты тензора деформаций $\varepsilon^\vee$. Плотность потенциальной энергии для однородного анизотропного упругого тела

$$W(\varepsilon^\vee)={}^1/_2E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \tag{1.1}$$

представляет потенциал напряжений

$$\sigma_{ij}=\partial W/\partial\varepsilon_{ij}=E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1.2}$$

Модули упругости обладают симметрией $E_{ijkl}=E_{klij}=E_{jikl}=E_{ijlk}$ и обеспечивают положительную определенность квадратичной формы (1.1).

Уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}+\rho F_i=0 \tag{1.3}$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{\sigma}_i=\sigma_{ij}\mathbf{e}_j, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_i+\rho F_i=0 \tag{1.4}$$

с учетом выражений для $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ и $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ можно привести к уравнениям равновесия в перемещениях

$$E_{ijkl}u_{k,lj}+\rho F_i=0 \tag{1.5}$$

где $\mathbf{F}=F_i\mathbf{e}_i$ — заданный вектор плотности массовой силы.

Пусть рассматриваемое тело занимает конечную односвязную область Ω, ограниченную поверхностью Σ.

Первая основная задача: в области Ω необходимо найти решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ системы трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1.5), удовлетворяющее на граничной поверхности Σ краевому условию

$$\mathbf{u}|_\Sigma=\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x}) \text{ или } u_i|_\Sigma=u_i^\circ(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Sigma \tag{1.6}$$

где $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})$ — заданная на границе вектор-функция.

Вторая основная задача: в области $\Omega\cup\Sigma$ необходимо найти решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ системы (1.5), удовлетворяющее на граничной поверхности Σ краевым условиям

$$\sigma_{ij}\nu_j=S_i^\circ(\mathbf{x}) \quad \text{или} \quad E_{ijmn}u_{m,n}\nu_j=S_i^\circ(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Sigma \tag{1.7}$$

причем $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{x})=S_i^\circ(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ — заданный на границе вектор.

Как известно [2], необходимые условия разрешимости второй основной задачи имеют вид

$$\int\limits_\Omega \mathbf{F}d\Omega+\int\limits_\Sigma \mathbf{S}^\circ d\Sigma=0, \qquad \int\limits_\Omega \mathbf{F}\times\mathbf{x}d\Omega+\int\limits_\Sigma \mathbf{S}^\circ\times\mathbf{x}d\Sigma=0 \tag{1.8}$$

а необходимые условия единственности решения записываются так:

$$\int\limits_\Omega \mathbf{u}\,d\Omega=0, \qquad \int\limits_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{u}d\Omega=0 \tag{1.9}$$

На заданные функции (перемещения и плотности массовых и поверхностных сил), а также на геометрические параметры поверхности Σ накладываются известные ограничения, зависящие от классов функций, в которых рассматривается решение (вектор перемещений, тензор напряжений). Все эти ограничения выясняются при доказательствах теорем существования и единственности решения [3, 4].

В рассматриваемой области $\Omega\cup\Sigma$ введем тривектор $\mathbf{a}_i(\mathbf{x})=a_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$, который будем называть тривектором дисторсии, соответственно — тензор дисторсий $a^\vee=\{a_{ij}(\mathbf{x})\}$, и наложим следующие определяющие ограничения.

Тривектор $\mathbf{a}_i$ является в Ω непрерывно дифференцируемым и потенциальным

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}_i=0, \; a_{i\alpha,\beta}=a_{i\beta,\alpha}, \; \alpha\neq\beta \tag{1.10}$$

Симметрия компонент тензора $a^\vee$ представляет компоненты тензора деформаций $\varepsilon^\vee$

$${}^1/_2(a_{ij}+a_{ji})=\varepsilon_{ij} \tag{1.11}$$

Тогда на основании (1.1) и симметрии тензора модулей упругости получим новые выражения плотности энергии

$$W(a^\vee)={}^1/_2E_{ijkl}a_{ij}a_{kl} \tag{1.12}$$

и компонент напряжений (1.2)

$$\boldsymbol{\sigma}_i(a^\vee)=\partial W/\partial\mathbf{a}_i, \quad \sigma_{ij}=\partial W/\partial a_{ij}=E_{ijmn}a_{mn} \tag{1.13}$$

Назовем следующую задачу *первой краевой задачей теории упругости в дисторсиях*: требуется найти тензор $a_{ij}(\mathbf{x})$, удовлетворяющий внутри области Ω системе двенадцати линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$a_{i\alpha,\beta}=a_{i\beta,\alpha}, \; \alpha\neq\beta, \; \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.14}$$

$$E_{ijkl}a_{kl,j}+\rho F_i=0, \; \mathbf{x}\in\Omega \tag{1.15}$$

а на границе Σ — шести линейным алгебраическим условиям

$$a_{ij}\mathbf{e}_j\times\mathbf{v}=\mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Sigma \tag{1.16}$$

где $\mathbf{f}_i$ — заданный на поверхности тривектор. Ниже будет показано, что заданный на поверхности Σ тривектор $\mathbf{f}_i$ должен обладать следующими свойствами:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_i=0, \; \operatorname{div}_\Sigma\mathbf{f}_i=0 \tag{1.17}$$

Здесь оператор div_Σ представляет двумерную дивергенцию заданного на поверхности Σ тривектора $\mathbf{f}_i$.

Второй краевой задачей теории упругости в дисторсиях назовем следующую: требуется найти тензор $a_{ij}(\mathbf{x})$, удовлетворяющий в области Ω системе уравнений (1.14), (1.15), а на границе Σ — трем линейным алгебраическим краевым условиям

$$E_{ijkl}a_{kl}\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{v}=\varphi_i(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\Sigma \tag{1.18}$$

где $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})=\varphi_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ — заданный на поверхности Σ вектор.

Из условий (1.16), которые можно записать в виде

$$\mathbf{a}_i\times\mathbf{v}=\mathbf{f}_i \tag{1.19}$$

непосредственно ясно, что в каждой точке граничной поверхности Σ задаются только касательные составляющие тривектора $\mathbf{a}_i$; ниже будет доказано, что достаточно задать касательные составляющие тривектора дисторсий только в каком-нибудь одном полном семействе непересекающихся криволинейных координатных линий на поверхности Σ. Это означает, что в действительности условия (1.19) представляют только три независимых алгебраических уравнения в каждой точке поверхности Σ.

Три условия (1.18) не являются заданием нормальных составляющих тривектора дисторсии $\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{v}$, но дают определенные основания называть их заданием «обобщенной» нормальной составляющей тривектора a_i, так как для изотропного тела

$$\mu^{-1}\boldsymbol{\sigma}_i\mathbf{v}\equiv\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{v}+(a_{ji}\mathbf{e}_j+\mu^{-1}\lambda a_{kk}\mathbf{e}_i)\cdot\mathbf{v}=\psi_i$$

Таким образом, задачи теории упругости в дисторсиях сводятся к нахождению потенциального тривектора дисторсии $\mathbf{a}_i=a_{ij}\mathbf{e}_j$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_i=0$, удовлетворяющего уравнению (1.15) по заданным на границе его касательным составляющим (в поле криволинейных координат одного семейства) или по заданным «обобщенным» нормальным составляющим.

Далее будет показана полнота постановок краевых задач теории упругости в дисторсиях в смысле эквивалентности основным краевым задачам упругости в перемещениях. Целесообразность этих постановок определяется тем, что в обеих задачах граничные условия по существу представляются тремя однотипными линейными алгебраическими уравнениями относительно искомых функций, удовлетворяющих внутри области одной и той же системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Классические основные задачи в этом отношении существенно неоднородны, что приводит к определенным неудобствам при решении задач численными методами.

2. Следующие леммы будут использованы при обсуждении существования решений поставленных задач в дисторсиях.

Лемма 2.1. Если построено решение первой основной задачи теории упругости в перемещениях (1.5), (1.6), то этим решением определяется решение первой задачи теории упругости в дисторсиях (1.14) — (1.17), причем тривектор $\mathbf{f}_i$ этой задачи выражается через заданный на границе вектор перемещений $\mathbf{u}^\circ$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — решение задачи (1.5), (1.6). Положим

$$\mathbf{a}_i=\mathrm{grad}\,u_i,\ a_{ij}=\partial u_i/\partial x_j,\ \mathbf{x}\in\Omega \tag{2.1}$$

Тогда, очевидно

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_i=0,\ E_{ijkl}a_{kl,\,j}+\rho F_i=0,\ \mathbf{x}\in\Omega$$

т. е. уравнения (1.14), (1.15) удовлетворены.

Пусть поверхность Σ задана с помощью криволинейных координат

$\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ уравнением $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\alpha_1, \alpha_2)=\mathbf{x}(\alpha)$ и пусть

$$d\mathbf{x}=\mathbf{p}_k d\alpha_k,\ \mathbf{p}_k=\partial\mathbf{x}/\partial\alpha_k,\ g_{kl}=\mathbf{p}_k\mathbf{p}_l=\partial x_i/\partial\alpha_k\partial x_i/\partial\alpha_l$$

$$\mathbf{v}=D^{-1}\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2,\quad \mathbf{p}^1=D^{-1}\mathbf{p}_2\times\mathbf{v},\quad \mathbf{p}^2=D^{-1}\mathbf{v}\times\mathbf{p}_1 \tag{2.2}$$

$$g^{kl}=\mathbf{p}^k\mathbf{p}^l,\quad D^2=|g_{kl}|=|g^{kl}|^{-1}=(\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2)^2=g_{11}g_{22}-g_{12}^2 \quad (k, l=1, 2),\ (i=1, 2, 3)$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{p}^l$, g_{kl}, g^{kl} — локальные единичная нормаль, ко- и контравариантные реперы и метрические тензоры (см. например, [5]).

Представим тривектор дисторсии на Σ в местном репере $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{v})$:

$$\mathbf{a}_i\equiv a_{ij}\mathbf{e}_j=A_{ik}\mathbf{p}_k+A_{i3}\mathbf{v} \tag{2.3}$$

Умножая это выражение на $\mathbf{p}^l=\mathbf{p}_k g^{kl}$, найдем выражения для коэффициентов

$$A_{il}=a_{ij}\mathbf{e}_j\mathbf{p}_k g^{kl}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial\alpha_k}g^{kl}=\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_k}g^{kl} \tag{2.4}$$

Умножая $\mathbf{a}_i$ векторно справа на $\mathbf{v}$, на основании (2.2) получим

$$\mathbf{a}_i\times\mathbf{v}=D(A_{i2}\mathbf{p}^1-A_{i1}\mathbf{p}^2) \tag{2.5}$$

Поскольку на Σ вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ принимает заданное значение $\mathbf{u}^\circ(\alpha_1, \alpha_2)$, то на основании (2.4) строим касательный тривектор $\mathbf{f}_i$ с компонентами f_{ik} в репере $\mathbf{p}_k$:

$$\mathbf{f}_i=f_{i1}\mathbf{p}_1+f_{i2}\mathbf{p}_2=D\frac{\partial u_i^\circ}{\partial\alpha_k}(\mathbf{p}^1 g^{k2}-\mathbf{p}^2 g^{k1}) \tag{2.6}$$

Отсюда, умножая на $\mathbf{p}^1$ и затем на $\mathbf{p}^2$, находим компоненты

$$\begin{aligned} f_{i1}&=D\frac{\partial u_i^\circ}{\partial\alpha_k}(g^{11}g^{k2}-g^{12}g^{k1})=D^{-1}\frac{\partial u_i^\circ}{\partial\alpha_2}\\ f_{i2}&=D\frac{\partial u_i^\circ}{\partial\alpha_k}(g^{12}g^{k2}-g^{22}g^{k1})=-D^{-1}\frac{\partial u_i^\circ}{\partial\alpha_1}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Соотношения (2.5) принимают вид $\mathbf{a}_i\times\mathbf{v}=\mathbf{f}_i$; следовательно, все свойства касательного тривектора $\mathbf{f}_i$, входящего в граничное условие (1.16), определяются выражениями его компонент через вектор $\mathbf{u}^\circ$, т. е. (2.7).

Таким образом, необходимые и достаточные условия, которым должен удовлетворять заданный на границе непрерывно дифференцируемый тривектор $\mathbf{f}_i$, сводятся к (1.17), причем развернутое выражение второй группы условий (1.17) имеет вид

$$\operatorname{div}_\Sigma \mathbf{f}_i\equiv\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(Df_{i1})+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(Df_{i2})=0 \tag{2.8}$$

Из доказательства леммы 2.1 следует возможность другой (эквивалентной) ее формулировки: каждой первой основной задаче теории упругости в перемещениях соответствует, т. е. может быть сформулирована соответствующая ей краевая задача в дисторсиях.

Лемма 2.2. Если построено решение первой краевой задачи теории упругости в дисторсиях (1.14)—(1.17), то этим решением определяется решение первой основной задачи в перемещениях (1.5), (1.6) с точностью до поступательного движения тела как абсолютно твердого.

Доказательство. Пусть вектор $\mathbf{a}_i=a_{ij}\mathbf{e}_j$ — решение краевой задачи теории упругости в дисторсиях (1.14)—(1.17). Из уравнений (1.14) следует существование потенциалов

$$\mathbf{a}_i = \operatorname{grad} v_i,\ \ a_{ij} = \partial v_i/\partial x_j,\ \ \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.9}$$

и существование вектора $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$.

Из уравнений (1.15) получаем

$$E_{ijkl} v_{k,\,lj} + \rho F_i = 0,\ \ \mathbf{x} \in \Omega \tag{2.10}$$

т. е. уравнения для v_i, отличающиеся от (1.5) обозначением искомого вектора.

Из граничных условий (1.16) и выражений (2.9) с помощью выкладок, аналогичных проведенным при доказательстве леммы 2.1, находим связь вектора $\mathbf{v}$ с тривектором $\mathbf{f}_i$; первая группа равенств (1.17) и выражения (2.9) будут справедливы при замене $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$ и $\partial \mathbf{u}^\circ/\partial \alpha_k$ на $\partial \mathbf{v}^\circ/\partial \alpha_k$ на поверхности Σ:

$$D(\alpha_1, \alpha_2) f_{i1}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial v_i^\circ}{\partial \alpha_2}, \qquad D(\alpha_1, \alpha_2) f_{i2}(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\partial v_i^\circ}{\partial \alpha_1} \tag{2.11}$$

причем существование вектора $\mathbf{v}^\circ$ обеспечивается второй группой условий (1.17) и условиями (2.8). Отсюда

$$v_i^\circ = -\int_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1} D(\xi_1, \alpha_2) f_{i2}(\xi_1, \alpha_2)\, d\xi_1 + c_i(\alpha_2)$$

$$c_i'(\alpha_2) = D f_{i1}(\alpha_1, \alpha_2) + \int_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [D(\xi_1, \alpha_2) f_{i2}(\xi_1, \alpha_2)]\, d\xi_1 \tag{2.12}$$

На основании (2.8) получаем

$$c_i'(\alpha_2) = D(\alpha_1^\circ, \alpha_2) f_{i1}(\alpha_1^\circ, \alpha_2) \tag{2.13}$$

В результате окончательно находим выражения компонент вектора $\mathbf{v}^\circ$ на поверхности

$$v_i^\circ = c_i^\circ + \int D(\alpha_1^\circ, \alpha_2) f_{i1}(\alpha_1^\circ, \alpha_2)\, d\alpha_2 - \\ - \int_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1} D(\xi_1, \alpha_2) f_{i2}(\xi_1, \alpha_2)\, d\xi_1 \tag{2.14}$$

Таким образом, по решению краевой задачи в дисторсиях однозначно (с точностью до аддитивного постоянного вектора $\mathbf{c}^\circ$) определены векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^\circ$, удовлетворяющие уравнениям (1.5), (1.6) первой основной задачи теории упругости в перемещениях, если положить $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{u}^\circ = \mathbf{v}^\circ$.

Из (2.11), (2.14) находим в любой точке границы Σ связь между компонентами касательного тривектора $\mathbf{f}_i$:

$$D(\alpha_1, \alpha_2) f_{i1}(\alpha_1, \alpha_2) = D(\alpha_1^\circ, \alpha_2) f_{i1}(\alpha_1^\circ, \alpha_2) - \\ - \int_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [D(\xi_1, \alpha_2) f_{i2}(\xi_1, \alpha_2)]\, d\xi_1 \tag{2.15}$$

Из (2.14), (2.15) следует, что граничное значение вектора перемещений $\mathbf{u}^\circ = \mathbf{v}^\circ$ с точностью до поступательного движения тела как абсолютно твердого определяется заданием только одной касательной составляющей тривектора $\mathbf{f}_i$, например $f_{i2}(\alpha_1, \alpha_2)$ для всех точек $\mathbf{x}\in\Sigma$, и значениями другой составляющей только на одной из линий семейства, например $f_{i1}(\alpha_1^\circ, \alpha_2)$ на линии $\alpha_1=\alpha_1^\circ$. При надлежащем выборе системы координат (α) условия (1.16) представляют три скалярных алгебраических соотношения всюду на Σ.

Из доказательства леммы 2.2 следует возможность другой (эквивалентной) ее формулировки: каждой краевой задаче теории упругости в дисторсиях соответствует, т. е. может быть сформулирована соответствующая ей первая основная задача теории упругости в перемещениях.

Существование решения первой краевой задачи теории упругости в дисторсиях следует из леммы 2.2 и теоремы существования решения первой основной задачи теории упругости. Построим соответствующую этой задаче первую основную задачу. Согласно известной теореме, при известных ограничениях на заданные функции и форму границы ее решение существует и, значит, решение краевой задачи в дисторсиях тоже существует.

Лемма 2.1 устанавливает условия (1.17), которым должен удовлетворять заданный на границе тривектор $\mathbf{f}_i$; эти условия обеспечивают существование соответствующего вектора перемещений $\mathbf{u}^\circ$ на границе Σ.

Существование решения второй краевой задачи теории упругости в дисторсиях (1.14), (1.15), (1.18) при заданной плотности поверхностной нагрузки $\mathbf{S}^\circ$ следует из теоремы существования решения второй основной задачи теории упругости. Удовлетворяя (1.14), положим $\mathbf{a}_i=\operatorname{grad} v_i$ и подставим это выражение в (1.15), (1.18). Тогда для вектора $\mathbf{v}$ получаем уравнения (1.5), (1.7). Поскольку существование решения второй основной задачи доказано, то решение задач (1.14), (1.15), (1.18) существует.

3. *Теорема единственности.* При заданных в некоторых (известных) классах массовых силах $F_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\Omega$ и касательных составляющих дисторсии $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ первая краевая задача теории упругости в дисторсиях (1.14)–(1.17) единственным образом определяет тривектор дисторсии $\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$, $i=1, 2, 3$, т. е. единственное решение в соответствующем классе функций.

Доказательство. Пусть существует два различных тривектора $\mathbf{a}_i^{(1)}$ и $\mathbf{a}_i^{(2)}$, соответствующих одним и тем же объемным силам при одинаковых граничных условиях.

Введем обозначения для разностей: $\boldsymbol{\eta}_i\equiv\mathbf{a}_i^{(1)}-\mathbf{a}_i^{(2)}\equiv\eta_{ij}\mathbf{e}_j$, $\eta_{ij}\equiv a_{ij}^{(1)}-a_{ij}^{(2)}$, $\mathbf{b}_i\equiv\boldsymbol{\sigma}_i(a^{\vee(1)})-\boldsymbol{\sigma}_i(a^{\vee(2)})\equiv b_{ij}\mathbf{e}_j$, $b_{ij}\equiv\sigma_{ij}(a^{\vee(1)})-\sigma_{ij}(a^{\vee(2)})$, $b_{ij}=(\partial/\partial\eta_{ij})W(\eta^\vee)$.

Тогда из (1.14)–(1.16) получим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta}_i=0, \quad \mathbf{x}\in\Omega \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{b}_i=0, \quad \mathbf{x}\in\Omega \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\eta}_i\times\mathbf{v}=0, \quad \mathbf{x}\in\Omega \tag{3.3}$$

Из уравнения (3.2) следует, что поле тривектора $\mathbf{b}_i$ является соленоидальным, что возможно тогда и только тогда, когда (см., например, [6])

$$\mathbf{b}_i+\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i=0 \tag{3.4}$$

Умножим (3.4) на тривектор $\boldsymbol{\eta}_i$ и проинтегрируем результат по объему Ω:

$$\int_\Omega \mathbf{b}_i\boldsymbol{\eta}_i d\Omega+\int_\Omega \boldsymbol{\eta}_i \operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i d\Omega=0 \tag{3.5}$$

Используя тождество

$$\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}=\operatorname{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}] \tag{3.6}$$

и соотношения (1.14), преобразуем уравнение (3.5) к виду

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_i \eta_i d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}[\lambda_i \times \boldsymbol{\eta}_i] d\Omega = 0 \tag{3.7}$$

На основании формулы Гаусса — Остроградского, свойств смешанного произведения и граничных условий (3.3) можем записать

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}[\lambda_i \times \boldsymbol{\eta}_i] d\Omega = -\int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_i \times \mathbf{v} \cdot \lambda_i d\Omega = 0$$

Следовательно, из (3.7) получим

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_i \boldsymbol{\eta}_i d\Omega = 0 \tag{3.8}$$

Учитывая (1.13), будем иметь

$$\int_{\Omega} \mathbf{b}_i \boldsymbol{\eta}_i d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial W(\eta^{\vee})}{\partial \eta_{ij}} \eta_{ij} d\Omega = 2\int_{\Omega} W(\eta^{\vee}) d\Omega = 0$$

Следовательно

$$W(\eta^{\vee}) = {}^1/{}_2 E_{ijkl} \eta_{ij} \eta_{kl} = {}^1/{}_8 E_{ijkl} (\eta_{ij} + \eta_{ji})(\eta_{kl} + \eta_{lk}) = 0$$

что возможно только при условиях

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 0; \quad \eta_{ij} = -\eta_{ji} \; (i \neq j) \tag{3.9}$$

Для доказательства единственности решения остается показать, что в области Ω смешанные компоненты дисторсии $\eta_{ij} = 0$, $i \neq j$. Для этого выпишем все девять уравнений (3.1) и, используя (3.9), убедимся, что η_{ij} $(i \neq j)$ являются линейными функциями координат в Ω:

$$\begin{aligned} \eta_{23} &= -\eta_{32} = c_1 + d_1 x_1 \\ \eta_{31} &= -\eta_{13} = c_2 + d_1 x_2 \\ \eta_{12} &= -\eta_{21} = c_3 + d_1 x_3 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Далее из граничных условий (3.3) находим

$$\eta_{i2} v_3 - \eta_{i3} v_2 = 0, \quad \eta_{i3} v_1 - \eta_{i1} v_3 = 0, \quad \eta_{i1} v_2 - \eta_{i2} v_1 = 0$$

Откуда, учитывая первую группу соотношений (3.9), получаем $\eta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ на границе Σ. На основании (3.10) заключаем, что $\eta_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ всюду, и теорема доказана, так как два состояния тела при одинаковых дисторсиях отличаются только поступательным движением.

Единственное решение второй основной задачи теории упругости в дисторсиях (1.14), (1.15), (1.18) определяется наряду с заданием вектора напряжений на границе, заданием вектора поворота тела в одной точке.

4. *Вариационный принцип.* Из поля Z непрерывно дифференцируемых тривекторов дисторсии $\mathbf{z}_i = z_{ij} \mathbf{e}_j \in Z$, удовлетворяющих условию потенциальности

$$\operatorname{rot} \mathbf{z}_i = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{4.1}$$

и на границе Σ — граничному условию

$$\mathbf{z}_i \times \mathbf{v} = \mathbf{f}_i \tag{4.2}$$

истинные дисторсии, т. е. обеспечивающие равновесие в точках $\mathbf{x} \in \Omega$, дают минимум потенциальной энергии:

$$V(z^\vee)=\int_\Omega W(z^\vee)\,d\Omega,\quad W(z^\vee)=\frac{1}{2}E_{ijkl}z_{kl}z_{ij} \tag{4.3}$$

Следовательно, потенциальная энергия $V(z^\vee)$, выраженная через тривектор дисторсии $\mathbf{z}_i=z_{ij}\mathbf{e}_j$, имеет в истинном состоянии условный минимум.

Доказательство. Введем в области Ω тривектор $\boldsymbol{\lambda}_i=\lambda_{ij}\mathbf{e}_j$ и составим функционал

$$I(z^\vee)=\int_\Omega [W(z^\vee)+\boldsymbol{\lambda}_i\operatorname{rot}\mathbf{z}_i]\,d\Omega \tag{4.4}$$

Согласно методу неопределенных множителей Лагранжа, функционал $I(z^\vee)$ имеет уже безусловный минимум на поле дисторсий Z. Преобразуем выражение (4.4), используя формулы (3.6)

$$I(z^\vee)=\int_\Omega [W(z^\vee)+\boldsymbol{\lambda}_i\operatorname{rot}\mathbf{z}_i-\mathbf{z}_i\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i+\mathbf{z}_i\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i]\,d\Omega=$$

$$=\int_\Omega [W(z^\vee)+\mathbf{z}_i\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i]\,d\Omega-\int_\Sigma \mathbf{z}_i\times\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\lambda}_i\,d\Sigma \tag{4.5}$$

Рассмотрим функционал $I(z^\vee)$ на поле дисторсий $z_1^\vee=z^\vee+\delta z^\vee$, где $z_1^\vee$, $\delta z^\vee\in Z$, и найдем разность $I(z_1^\vee)-I(z^\vee)=\delta I+\delta^2 I$. Учитывая, что в соответствии с (3.3)

$$\delta(\mathbf{z}_i\times\mathbf{v})=\delta\mathbf{f}_i=0,\quad \mathbf{x}\in\Sigma$$

на основании сформулированного вариационного принципа получаем

$$\delta I(z^\vee)=\int_\Omega\left[\frac{\partial W(z^\vee)}{\partial \mathbf{z}}+\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i\right]\delta\mathbf{z}_i\,d\Omega=0 \tag{4.6}$$

Вследствие произвольности вектора $\delta\mathbf{z}_i$ равенство (4.6) возможно только при условии равенства нулю подынтегрального выражения. Следовательно,

$$\boldsymbol{\sigma}_i=\partial W(z^\vee)/\partial\mathbf{z}_i=-\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i \tag{4.7}$$

причем $\boldsymbol{\sigma}_i=\sigma_{ij}\mathbf{e}_j$ — вектор напряжения, соответствующий дисторсии $\mathbf{z}_i$. Компоненты σ_{ij} выражаются формулами

$$\sigma_{ij}=E_{ijkl}z_{kl}=-\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i\mathbf{e}_j \tag{4.8}$$

Теперь видно, что тривектор $\mathbf{z}_i$ удовлетворяет уравнениям (1.15) при замене $\mathbf{a}_i$ на $\mathbf{z}_i$, поскольку (4.8) — наиболее общее решение уравнений равновесия $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_i=-\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i=0$.

Таким образом, найденное из вариационного принципа поле $\mathbf{z}_i(\mathbf{x})$ представляет истинную дисторсию задачи теории упругости в дисторсиях: $\mathbf{a}_i=\mathbf{z}_i$. Формула (4.6) выражает условие экстремума функционала $I(z^\vee)$. Разность

$$\delta I=I(z^\vee+\delta z^\vee)-I(z^\vee)=\int_\Omega W(\delta z^\vee)\,d\Omega$$

при этом положительна, так как для всех отличных от нуля $\delta\mathbf{z}_i$ форма $W(\delta z^\vee)$ определенно-положительная. Следовательно, имеет место минимум функционала $I(z^\vee)$.

Формулы (4.8) для компонент тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{i\alpha}=-\operatorname{rot}\boldsymbol{\lambda}_i\mathbf{e}_\alpha=\partial\lambda_{i\beta}/\partial x_\gamma-\partial\lambda_{i\gamma}/\partial x_\beta \tag{4.9}$$

Здесь индексы α, β, γ образуют четную подстановку (1, 2, 3). Выражения (4.9) показывают, что матрица $\|\lambda_{ij}\|$ представляет собой тензор функций напряжений.

Легко доказать, что тривектор λ_i в (4.7) связан с тензором функций напряжений, введенным в [1]. Из (4.9) следует

$$\operatorname{div}\mathbf{L}_\alpha=0,\quad \mathbf{L}_\alpha=(\lambda_{i\alpha}-\lambda_{kk}\delta_{i\alpha})\mathbf{e}_i \tag{4.10}$$

Общее решение этого уравнения $\mathbf{L}_\alpha=-\operatorname{rot}\mathbf{v}_\alpha$ позволяет преобразовать формулы (4.9) к виду

$$\sigma_{11}=\frac{\partial^2 w_{22}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 w_{33}}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2 w_{(23)}}{\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_{23}=-\frac{\partial^2 w_{(23)}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w_{(31)}}{\partial x_1\,\partial x_2}+\frac{\partial^2 w_{(12)}}{\partial x_1\,\partial x_2}-\frac{\partial^2 w_{11}}{\partial x_2\,\partial x_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

причём $w_{(\alpha\beta)}={}^1/_2(w_{\alpha\beta}+w_{\beta\alpha})$ представляют компоненты тензора функций напряжений [1].

Принцип минимума может быть переформулирован заменой условия (4.1) эквивалентным ему для односвязных областей условием равенства нулю циркуляции вектора $\mathbf{z}_i$ по любому замкнутому контуру M внутри области Ω (см., например, [6])

$$\Gamma_i=\oint_M \mathbf{z}_i d\mathbf{s}=\oint_M \mathbf{z}_i\mathbf{t}_s ds=0$$

где $\mathbf{t}_s$ — единичный вектор касательной к контуру.

Автор искренне благодарит проф. А. А. Ильюшина за постоянное внимание к работе и большую помощь.

Поступила 3 X 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крутков Ю. А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. Л.– М., Изд-во АН СССР, 1949.
2. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.– Л., Гостехтеоретиздат, 1952.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М., «Наука», 1976.
4. *Fichera G.* Existence theorems in elasticity. In: Handbuch der Physik, Bd 6a/2, Berlin, Springer Verlag, 1972. (Рус. перев.: М., «Мир», 1974).
5. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды. М., Изд-во Московск. ун-та, 1978.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.