

О ВЫБОРЕ ПОХОДКИ ЧЕТЫРЕХНОГОГО ШАГАЮЩЕГО АППАРАТА

В. В. КАЛИНИН

(Москва)

Биомеханические эксперименты [1, 2] показывают, что четырехногие животные изменяют походку (аллюр) в зависимости от скорости движения. При этом в режиме медленной ходьбы большую часть времени занимает фаза опоры на все четыре ноги; с увеличением скорости движения возрастает доля малоопорных фаз — на две, одну конечность и фазы полета.

Вопрос о формировании походки в зависимости от скорости может возникнуть и при организации ходьбы шагающего аппарата (ША). В данной работе задача организации походки (способа чередования опорных фаз) простейшей модели четырехногого аппарата решается исходя из критерия энергетических затрат на движение. Исследование проводится для класса «жестких» управлений и для программных движений модели на постоянной высоте с постоянной скоростью.

1. Рассмотрим плоскую модель четырехногого ША (фиг. 1) с двухзвенными конечностями малой (по отношению к корпусу) массы. Пусть, для определенности, аппарат находится в фазе опоры на две ноги. Введем систему координат AXY с вертикальной осью $A\dot{Y}$ и осью $A\dot{X}$, ориентированной по направлению движения. Обозначим через X_i, Y_i ($i=1, 2$) координаты точек подвеса ног. Индекс $i=1$ будем относить к задней опорной конечности, индекс $i=2$ — к передней. Будем считать, что в составе системы управления имеются датчики, позволяющие измерять абсолютные координаты и скорости точек подвеса ног, а также углы α_i и β_i звеньев с вертикалью.

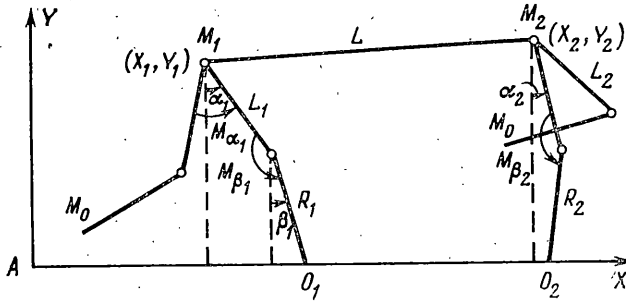
Движение аппарата осуществляется за счет управляющих приводов, установленных в верхних и средних суставах конечностей и создающих в фазе опоры моменты M_{α_i} — от корпуса к верхнему звену и M_{β_i} — от верхнего звена к нижнему.

Зададимся программной высотой (H) точек подвеса ног и программной продольной скоростью модели (V). Задачу вывода модели на указанный программный режим будем решать как задачу автоматического регулирования.

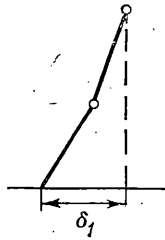
Будем считать массу корпуса сосредоточенной в точках подвеса ног (массы M_1 и M_2 соответственно). Запишем выражения для рассогласованных текущих и программных значений переменных по позиционным и скоростным сигналам

$$\begin{aligned}
 U_{x_i} &= M_i \left[(X_i - V) - (-1)^i \frac{1}{2} \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} (Y_2 - Y_1) \right] \\
 U_{y_i} &= M_i [Y_i + T_0^{-1} (Y_i - H)] \quad (i=1, 2)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

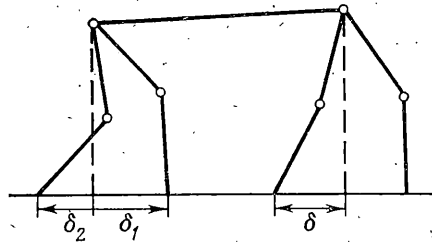
Множители M_i размерности массы введены в (1.1) для удобства дальнейшей записи.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Из (1.1) следует, что идеальному управлению, обеспечивающему отсутствие рассогласований U_{x_i} , U_{y_i} , отвечает движение ПА с заданной программной скоростью середины корпуса и экспоненциальный по времени выход на программную высоту.

Ограничимся классом систем с жестким управлением. Управляющие моменты M_{α_i} , M_{β_i} ($i=1,2$) будем формировать как жесткие, линейные функции рассогласований

$$P_i = kG_i U_i \quad (i=1,2) \quad P_i = \begin{pmatrix} P_{\alpha_i} \\ P_{\beta_i} \end{pmatrix}, \quad U_i = \begin{pmatrix} U_{x_i} \\ U_{y_i} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$P_{\alpha_i} = (M_{\alpha_i} - M_{\beta_i})/L_i, \quad P_{\beta_i} = M_{\beta_i}/R_i$$

Безразмерные матрицы G_i осуществляют перераспределение управляющих сигналов по суставам конечностей. Коэффициент усиления привода k в (1.2) представим в виде $k=1/T_1$.

Величина T_1 имеет размерность времени и характеризует быстродействие системы управления. Предположению о жесткости управления, т. е. о большой величине коэффициента k , отвечает требование $T_1 \ll T_0$, T_* , $T_* = (L/g)^{1/2}$ — характерное время программного движения.

Если в (1.2) жесткость управления k стремится к бесконечности, то значения рассогласований U_{x_i} , U_{y_i} ($i=1,2$) стремятся к нулю. При этом величины управляющих воздействий P_{α_i} , P_{β_i} будут оставаться конечными.

Зададимся следующей программой отрыва и постановки конечностей аппарата: отрыв конечности производится, когда ее вынос (горизонтальная проекция вектора, соединяющего точку опоры ноги с точкой ее крепления к корпусу) достигает величины δ_1 (фиг. 2); постановка ноги производится в положении с выносом $(-\delta_1)$ в момент, когда вынос соответствующей

опорной конечности достигает значения δ_2 (фиг. 3); в момент постановки задней конечности положение передних ног характеризуется величиной δ выноса одной из них (фиг. 3). Соотношением величин $\delta_1, \delta_2, \delta$ определяется тот или иной тип походки модели ША.

Перенос конечностей будем осуществлять таким образом, чтобы при идеальном управлении скорость конца ноги относительно поверхности в моменты отрыва и постановки равнялась нулю, а движение было равноускоренным в первую половину фазы переноса и равнозамедленным — во вторую. Программную высоту конца ноги при переносе будем считать нулевой.

Сформируем сигналы рассогласований текущих и программных переносных для переносимых конечностей

$$\begin{aligned} U_{x_i}' &= M_i [X_{0_i}'' + X_i' - W(X_i - X_{0_i})] \\ U_{y_i}' &= M_i [Y_{0_i}'' + Y_i' + T_0^{-1}(Y_{0_i}' + Y_i)] \quad (i=1,2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где функция $W(X)$ определяется выражением

$$W(X) = \begin{cases} qV(\delta_2 + X) & \text{при } -\delta_2 < X < 0 \\ qV(\delta_2 - X) & \text{при } 0 \leq X < \delta_2 \end{cases} \quad q = 2(\delta_1 + \delta_2)/\delta_2^2$$

X_{0_i}', Y_{0_i}' — координаты вектора, соединяющего точку крепления с концом переносимой конечности.

Жесткое управление переносимыми конечностями будем осуществлять аналогично управлению (1.2) опорными ногами

$$P_i' = kG_i'U_i' \quad (i=1, 2) \quad (1.4)$$

Для осуществления процесса ликвидации рассогласований управляющие матрицы G_i, G_i' ($i=1, 2$) должны обеспечивать устойчивость программного режима движения рассматриваемой модели ША. Жесткость системы управления позволяет воспользоваться для решения этой задачи методами разделения движений.

Примем для простоты, что массы всех конечностей равны величине M_0 и сосредоточены в концах ног. Согласно сделанному предположению, $M_0 \ll M_1, M_2$. Запишем уравнения движения аппарата в виде

$$M_i X_i'' = F_{x_i} + N_{x_i} + F_{x_i}', \quad M_i Y_i'' = F_{y_i} + N_{y_i} - M_i g + F_{y_i}' \quad (1.5)$$

$$M_0 X_0'' = -M_0 X_i'' - F_{x_i}', \quad M_0 Y_0'' = -M_0 Y_i'' - F_{y_i}' - M_0 g \quad (i=1,2)$$

Здесь F_{x_i}, F_{y_i} — составляющие реакций со стороны опорных ног; F_{x_i}', F_{y_i}' — со стороны переносимых ног; N_{x_i}, N_{y_i} — реакции в корпусе.

Система (1.5) замыкается соотношениями (1.1) — (1.4), кинематической зависимостью декартовых и угловых координат, выражениями для реакций $F_{x_i}, F_{y_i}, F_{x_i}', F_{y_i}'$ и уравнениями сил и моментов для корпуса.

Проведем в уравнениях движения аппарата переход к новым переменным, в состав которых включим рассогласования $U_{x_i}, U_{y_i}, U_{x_i}', U_{y_i}'$ ($i=1, 2$) [3, 4]. В полученной системе осуществим переход к безразмерным нормализованным величинам: $t = T/T_*$, $u = U/U_*$, $m_i = M_i/M_*$, $p_i = P_i/P_*$, $v = V/V_*$, $l_i = L_i/L$, $r_i = R_i/L$, $x_i = X_i/L, \dots$

Обозначив $\varepsilon = T_i/T_* \ll 1$, $\mu = M_0/M_* \ll 1$, $\tau_0 = T_0/T_*$, $\kappa = M_*g/P_*$ и считая характерные значения величин связанными соотношениями $kU_* = P_*$, $T_* = L/V_*$, $M_* = P_*T_*/V_*$, получим систему с малыми параметрами при про-

ИЗВОДНЫХ

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{du_{x_i}}{dt} &= f_{x_i} + f'_{x_i} + n_{x_i} + \varphi_i(x, y, u) \\ \varepsilon \frac{du_{y_i}}{dt} &= f_{y_i} + f'_{y_i} + n_{y_i} - m_i \chi + \frac{\varepsilon}{\tau_0} u_{y_i} - \frac{m_i}{\tau_0^2} (y_i - h) \\ \varepsilon \mu \frac{du_{x_i}}{dt} &= -f'_{x_i} + \mu qv (\varepsilon u_{x_i} + m_i v + m_i \Psi_i(x, y)) \operatorname{sign}(x_i - x_{0_i})\end{aligned}$$

$$\varepsilon \mu \frac{du_{y_i}}{dt} = -f'_{y_i} - \mu m_i \chi + \frac{\varepsilon \mu}{\tau_0} u'_{y_i} - \frac{\mu m}{\tau_0^2} (y'_{0_i} + y_i)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varepsilon}{m_i} u_{x_i} + v + \psi_i(x, y)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{\varepsilon}{m_i} u_{y_i} - \frac{1}{\tau_0} (y_i - h)$$

$$\frac{dx_{0_i}}{dt} = -\frac{dx_i}{dt} + \frac{\varepsilon}{m_i} u'_{x_i} + qv \delta_2 - qv x_i \operatorname{sign}_i^*(x_i - x_{0_i})$$

$$\frac{dy_{0_i}}{dt} = -\frac{dy_i}{dt} + \frac{\varepsilon}{m_i} u'_{y_i} - \frac{1}{\tau_0} (y'_{0_i} + y_i)$$

$$n_{x_1} + n_{x_2} = 0, \quad n_{y_1} + n_{y_2} = 0$$

(1.6)

$$n_{x_1}(y_2 - y_1) - n_{y_1}(x_2 - x_1) + p_{\alpha_1} l_1 + p_{\beta_1} r_1 + p_{\alpha_2} l_2 + p_{\beta_2} r_2 = 0$$

$$\left(\frac{u_{x_1}}{m_1} - \frac{u_{x_2}}{m_2} \right) (x_1 - x_2) + \left(\frac{u_{y_1}}{m_1} - \frac{u_{y_2}}{m_2} \right) (y_1 - y_2) = 0$$

$$\varphi_i(x, y, u) = (-1)^{i+1} \frac{m_i}{\tau_0} \left(\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} \right) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} +$$

$$+ (-1)^i \frac{m_i}{2\tau_0} \left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \right) \frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$\psi_i(x, y) = (-1)^i \frac{1}{2\tau_0} \frac{(y_2 - y_1)^2}{x_2 - x_1}$$

$$x_i = x_{0_i} - l_i \sin \alpha_i - r_i \sin \beta_i$$

$$y_i = l_i \cos \alpha_i + r_i \cos \beta_i$$

$$x'_{0_i} = x_i + l_i \sin \alpha_i' + r_i \sin \beta_i'$$

$$y'_{0_i} = y_i - l_i \cos \alpha_i' - r_i \cos \beta_i'$$

$$f_i = \Phi_i p_i, \quad p_i = G_i u_i, \quad f_i' = \Phi_i' p_i', \quad p_i' = G_i' u_i'$$

$$\Phi_i = \frac{1}{\sin(\alpha_i - \beta_i)} \begin{vmatrix} \sin \beta_i & -\sin \alpha_i \\ -\cos \beta_i & \cos \alpha_i \end{vmatrix},$$

$$f_i = \begin{vmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \end{vmatrix}, \quad p_i = \begin{vmatrix} p_{\alpha_i} \\ p_{\beta_i} \end{vmatrix}, \quad u_i = \begin{vmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

аналогичные обозначения приняты для характеристик, связанных с переносимыми конечностями.

К уравнениям (1.6) с малыми параметрами при производных применимы методы разделения движений в форме А. Н. Тихонова и А. Б. Васильевой [5, 6]. В системе (1.6) переменные $x_i, y_i, x_{0i}', y_{0i}', \alpha_i, \beta_i, \alpha_i', \beta_i'$ — «медленные», переменные u_i, u_i' — «быстрые». Медленные составляющие движения (при $\epsilon=0$) отвечают выходу аппарата на программный режим. Быстрые составляющие движения описывают колебания в системе за счет жесткости управления.

Близость порядка малого параметра ϵ решений полной системы (1.6) и системы медленных движений обеспечивается [6] при асимптотической устойчивости положения равновесия линейных систем для быстрых движений во временах $\tau_1=t/\epsilon\mu$ и $\tau_2=t/\epsilon$

$$\frac{du_i'}{d\tau_1} = -\Phi_i' G_i' u_i', \quad x_i, y_i, u_i, \alpha_i, \beta_i = \text{const} \quad (i=1,2)$$

$$\frac{du_i}{d\tau_2} = \Phi_i G_i u_i + n_i, \quad x_i, y_i, \alpha_i, \beta_i = \text{const}, \quad n_i = \begin{vmatrix} n_{x_i} \\ n_{y_i} \end{vmatrix}$$

Таким образом, использование метода разделения движений позволило свести исследование существенно нелинейной задачи (1.6) к исследованию линейной системы быстрых движений, имеющей к тому же более низкий порядок.

Приведем два возможных варианта организации управления в опорных конечностях аппарата [4]

$$G_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad G_2 = \Phi_2^{-1} \Phi_1 G_1 \quad (1.7)$$

$$G_1 = G_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (1.8)$$

Аналогичным образом могут быть выбраны матрицы управления G_1', G_2' в переносимых конечностях.

Следует отметить, что выбор законов управления осуществляется из соображений асимптотического характера (т. е. справедлив при $\epsilon \rightarrow 0$) и ограничивался фазой опоры на две конечности. Вопрос о допустимых значениях малого параметра ϵ (конечной жесткости системы управления) и о влиянии смены опорных ног во время движения ША на работоспособность полученных законов решается численным моделированием процесса ходьбы на ЭВМ и будет обсуждаться ниже.

2. Рассмотрим вопрос об организации ходьбы описанной модели четырехногого ША. Как уже отмечалось, тип походки определяется величинами $\delta_1, \delta_2, \delta$. В биологическом эксперименте [2] описывается бег животного (собака), при котором момент начала опоры задней конечности совпадает с моментом отрыва передней. Такие аллюры у модели отвечают ограничению $\delta = \delta_1$.

Отношение времени фазы опоры каждой ноги ко времени ее переноса при постоянной скорости движения модели равно величине $\lambda_p = \delta_1/\delta_2$ и может быть названо (по биомеханической терминологии) ритмом работы конечностей. В указанном эксперименте величина ритма работы конечностей λ_p убывала с ростом скорости животного.

Выделим для удобства качественного сравнения результатов моделирования ходьбы ША с результатами исследования [2] движения животного

несколько аллюров (табл. 1); при этом естественно разделение конечностей модели на правые и левые условно. В третьей графе табл. 1 представлены опорные формулы аллюров, т. е. количество опорных ног в разные фазы ходьбы, в четвертой — отношения длительности соответствующих опорных фаз. (Аллюр VI отвечает ходьбе, близкой к рыси, т. е. чередованию двух опорных фаз.)

Таблица 1

Аллюр	λ_p	Опорная формула	Длительность опорных фаз.
I	7:1	4-3-3	2:1:1
II	5:1	4-3-3	1:1:1
III	3:1	3-3-3	1:1:1
IV	2:1	3-3-2	1:1:1
V	5:3	3-3-2	1:1:2
VI	1,60:1	3-3-2	1:1:50

При моделировании ходьбы ША использовались уравнения (1.6), выведенные по параметру ϵ_r (т. е. полагалось $\epsilon_r=0$); полученные при этом результаты могли иметь погрешность порядка $\epsilon_r \ll 1$. Моделировалась ходьба с аллюрами I—VI отдельно для законов управления (1.7) и (1.8). В случае, когда в опоре находились обе задние или обе передние конечности, матрицы управления принимались для них одинаковыми. Пользуясь методикой, изложенной в [6], можно показать, что для рассматриваемого случая малой инерционности ног ($\mu=M_0/M_* \ll 1$) закон управления переносимыми конечностями в принятом приближении мог выбираться произвольным.

3. Учет энергетические затраты при ходьбе модели ША. Предположим, что управляющими приводами аппарата являются электродвигатели, питающиеся от аккумулятора через идеальный усилительный контур.

Запишем уравнения, описывающие работу электродвигателей в предположении их безынерционности и отсутствия индуктивности в обмотках

$$U_e = \Phi \omega + IR_e, M_d = \Phi I \quad (3.1)$$

Здесь U_e — подаваемое напряжение, ω — угловая скорость ротора, R_e — сопротивление цепи, I — ток в обмотках якоря, Φ — приведенный магнитный поток.

С учетом (3.1) выражение для мощности, потребляемой двигателем, имеет вид

$$P_e = U_e I = M_d \omega + R_e \Phi^{-2} M_d^2 \quad (3.2)$$

Первое слагаемое в (3.2) отвечает механической мощности, второе — необратимым тепловым потерям. Для установившегося режима движения аппарата на постоянной высоте с постоянной скоростью потребляемая мощность определяется расходами на тепло. В силу этого для оценки расходов энергии примем функционал

$$f_n = \frac{1}{x_1(t) - x_1(0)} \int_0^t \sum_{n=1}^8 M_{d_n}^2 dt \quad (3.3)$$

который с точностью до постоянного множителя равен тепловым потерям во всех двигателях, приходящимся на единицу пути аппарата. (Все вели-

чины в (3.3) будем считать уже безразмерными, нормализованными.) Заметим, что энергетические расходы даже в режиме стояния аппарата отличны от нуля, а функционал (3.3) при этом обращается в бесконечность.

Минимизация функционала (3.3) по программной скорости движения ША проводилась для аллюров I—VI методами численного моделирования. Отметим, что задача минимизации энергетических затрат на ходьбу может решаться в зависимости от большего числа параметров: от программной высоты движения, длины шага, относительных длин звеньев конечностей и т. д.

Таблица 2

Аллюр	v_{opt}	f_{Tmin}
I	0.10	2.04
II	0.13	1.79
III	0.21	1.75
IV	0.28	1.04
V	0.30	1.12
VI	0.43	1.72

Таблица 3

Аллюр	v_{opt}	f_{Tmin}
I	0.10	2.29
II	0.14	2.08
III	0.22	2.09
IV	0.29	1.14
V	0.31	1.13
VI	0.43	1.71

При моделировании были взяты следующие параметры ША и программного режима движения: $l_1=r_1=l_2=r_2=0.5$; $m_1=m_2=1.0$; $\mu=0.08$; $\tau_0=1.0$; $x=1.0$; $\delta=0.3$; $h=0.8$; $\varepsilon=0.01$. (Вообще говоря, при моделировании было установлено, что стабилизация программного режима движения аппарата обеспечивалась при жесткости управления, отвечающей ограничению $\varepsilon \leq 0.1$ на малый параметр ε .)

Значения скоростей v_{opt} движения аппарата, доставляющих при аллюрах I—VI минимум функционалу (3.3), приведены в табл. 2 (закон управления (1.7)) и в табл. 3 (закон управления (1.8)). Из анализа приведенных в таблицах результатов моделирования движения плоской модели четырехногого ША могут быть сделаны следующие выводы.

Величины оптимальных скоростей v_{opt} для обоих рассмотренных законов управления монотонно растут с уменьшением ритма работы конечностей λ_p . Таким образом, выявлено соответствие скорости движения четырехногого ША и типа его походки. Указанное соответствие качественно аналогично имеющему место в природе у четырехногих животных [2].

Значения скоростей v_{opt} для каждого аллюра практически одинаковы при обоих рассмотренных законах управления, что позволяет предполагать инвариантность оптимальной скорости движения ША для каждого типа походки по закону управления опорными конечностями.

Существуют оптимальные для каждого закона управления виды ходьбы. Для управления (1.7) оптимальным является движение со скоростью $v=0.28$ при аллюре IV (опорная формула 3—3—2 с отношением длительности опорных фаз 1:1:1). Для управления (1.8) оптимальным является движение со скоростью $v=0.31$ при аллюре V (опорная формула 3—3—2 с отношением длительности опорных фаз 1:1:2).

Приведем для оценки в размерной форме энергетических расходов и оптимальных скоростей движения числовой пример. Примем для управляющих приводов характеристики микроэлектродвигателей серии ДПР-72. Пусть питание двигателей осуществляется от стандартного автомобильного аккумулятора емкостью 50 А·ч с напряжением на выходе 12 В, корпус модели имеет длину $L=1$ м и массу $M=M_1+M_2=25$ кг. Тогда для аллюра V при управлении (1.8) оптимальная скорость движения аппарата $V=1.0$ м/с, а энергетические затраты на единицу пути равны 68 Дж/м; при

этом без подзарядки аккумулятора аппарат может преодолеть расстояние порядка 30 км.

Автор благодарит И. В. Новожилова за большое внимание к работе и за полезные обсуждения.

Поступила 26 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Гамбарян П. П. Бег млекопитающих. Л., «Наука», 1972.
2. Аршавский Ю. И., Коц Я. М., Орловский Г. Н., Родионов И. М., Шик М. Л. Исследования биомеханики бега собаки. Биофизика, 1965, т. 10, № 4.
3. Новожилов И. В. Управление ногой шагающего аппарата в фазе опоры. В кн.: Биомеханика. Тр. Рижск. н.-и. ин-та травматол. и ортопед., 1975.
4. Калинин В. В. Управление ходьбой четырехногого шагающего аппарата. Тр. Московск. энергетич. ин-та, 1977, вып. 331.
5. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31, № 3.
6. Васильева А. Б., Бугузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.