МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1980

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ПОДВИЖНЫХ МАСС

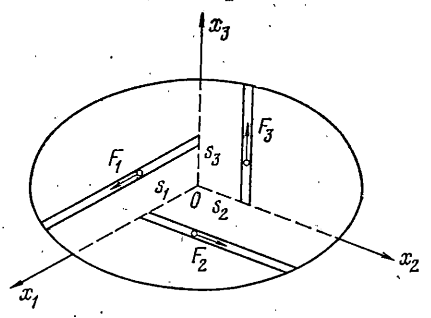
В. В. КРЕМЕНТУЛО

(Москва)

В рамках аналитической теории управления [1, 2] дано решение задачи об оптимальной (в определенном смысле) стабилизации положения равновесия твердого тела с неподвижной точкой при помощи внутренних сил, вызывающих требуемое относительное движение трех масс параллельно главным осям инерции тела. Полученные в явном виде управляющие силы обеспечивают асимптотическую устойчивость рассматриваемого положения равновесия системы по всем фазовым координатам стабилизируемого тела и минимум некоторого функционала интегрального типа.

Известно, что положение равновесия твердого тела может быть стабилизировано при помощи масс, совершающих вращательное движение относительно этого тела. В качестве таких масс берутся маховики или гироскопы, управляемые специально выбираемыми моментами внутренних сил (см., например, [3] с обширной библиографией). Однако установлено, что указанная задача решается и при помощи масс, совершающих поступательное движение относительно стабилизируемого тела [4, 5] под действием специально подбираемых внутренних сил.

1. Рассмотрим изолированную механическую систему, состоящую из твердого тела с неподвижной точкой O и главными осями инерции $Ox_1x_2x_3$ и трех масс, которые могут перемещаться по прямолинейным каналам, расположенным параллельно главным осям инерции тела (фигура). Указанные массы будем в дальнейшем рассматривать как материальные точки, движущиеся по прямолинейным траекториям. Предположим, что на теле расположены специальные устройства, которые способны создавать силы, приложенные к материальным точкам и меняющиеся по требуемому закону.



Введем следующие обозначения: A_1, A_2, A_3 – моменты инерции тела относительно осей $Ox_1x_2x_3$ соответственно; ρ_1, ρ_2, ρ_3 – массы материальных точек; s_1, s_2, s_3 – расстояния между прямолинейными каналами и осями координат; F_1, F_2, F_3 – управляющие силы, действующие на материальные точки; M_1, M_2, M_3 – моменты этих сил относительно осей $Ox_1x_2x_3$: x_i (i=1, 2, 3) – координата точки, движущейся параллельно оси Ox_i; p_1, p_2, p_3 – проекции мгновенной угловой скорости тела на оси $Ox_1x_2x_3$; α_{ij} – направляющие косинусы углов между осями $Ox_1x_2x_3$ и осями инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$ (на фигуре не показаны); G_1, G_2, G_3 – проекции вектора кинетического момента системы относительно точки O на оси $Ox_1x_2x_3$; h_1, h_2, h_3 – постоянные проекции вектора кинетического момента системы относительно точки O на оси $OX_1X_2X_3$; g_1, g_2, g_3 – проекции векторов кинетических моментов точек относительно точки O на оси $Ox_1x_2x_3$.

Используя выражения для проекций кинетического момента системы

$$G_1=B_1p_1-e_3p_2-e_2p_3+g_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.1}$$

$$B_1=A_1+\rho_1s_3^2+\rho_3s_2^2+\rho_2x_2^2+\rho_3x_3^2 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.2}$$

$$e_1=\rho_3x_3s_2,\quad g_1=\rho_3x_3^{\cdot}s_2$$

и применяя теорему об изменении кинетического момента системы относительно осей $Ox_1x_2x_3$, приходим к трем уравнениям, получающимся одно из другого циклической перестановкой индексов

$$B_1p_1^{\cdot}-e_3p_2^{\cdot}-e_2p_3^{\cdot}+B_1^{\cdot}p_1-2g_2p_3+(B_3-B_2)p_3p_2-$$

$$-p_1(e_2p_2-e_3p_3)-e_1(p_2^2-p_3^2)+g_1^{\cdot}=0 \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.3}$$

С учетом симметрии изучаемой механической системы можно записать в аналогичной форме и все последующие уравнения (чтобы втрое сократить их число).

Выпишем также девять кинематических уравнений Пуассона

$$\alpha_{i1}^{\cdot}=p_3\alpha_{i2}-p_2\alpha_{i3} \quad (i=1,\ 2,\ 3)\ (1\ 2\ 3) \tag{1.4}$$

Уравнения относительного движения материальных точек после несложных преобразований можно записать в виде

$$g_1^{\cdot}=M_1-\rho_3s_2^2(p_1^{\cdot}+p_2p_3)+e_1(p_1^2+p_2^2)$$

$$(1\ 2\ 3)$$

$$M_1=F_3s_2 \tag{1.5}$$

Уравнения (1.3)—(1.5) составляют замкнутую систему уравнений движения изучаемой механической системы по фазовым координатам p_i, α_{ij}, x_i (i, j=1, 2, 3). Для решения поставленной задачи полученные уравнения движения целесообразно преобразовать к новой форме. Заменив слагаемые $g_i^{\cdot}$ в уравнениях (1.3) правыми частями уравнений (1.5), имеем

$$C_1p_1^{\cdot}-e_3p_2^{\cdot}-e_2p_3^{\cdot}=f_1 \quad (1\ 2\ 3)$$

$$C_1=B_1-\rho_3s_2^2,\quad -f_1=B_1^{\cdot}p_1-2g_2p_3+ \tag{1.6}$$

$$+(B_3-B_2-\rho_3s_2^2)p_3p_2-p_1(e_2p_2-e_3p_3)+e_1(p_1^2+p_3^2)+M_1 \quad (1\ 2\ 3)$$

Уравнения (1.6) можно привести к форме Коши, поскольку определитель при производных $p_1^{\cdot}$, $p_2^{\cdot}$, $p_3^{\cdot}$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} C_1 & -e_3 & -e_2 \\ -e_3 & C_2 & -e_1 \\ -e_2 & -e_1 & C_3 \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

что нетрудно проверить, отличен от нуля. Разрешая уравнения (1.6) относительно $p_1^{\cdot}$, $p_2^{\cdot}$, $p_3^{\cdot}$, получим

$$p_1^{\cdot}=\Delta^{-1}[f_1(C_2C_3-e_1^2)+f_2(C_3e_3+e_1e_2)+f_3(C_2e_2+e_1e_3)] \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.8}$$

С учетом (1.6) приходим к уравнениям

$$p_i^{\cdot}=\Sigma f_{ij}p_j+u_i+P_i \quad (i,j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.9}$$

Здесь функции $f_{ij}=f_{ij}(x_1,\ x_2,\ x_3;\ x_1^{\cdot},\ x_2^{\cdot},\ x_3^{\cdot})$, линейные относительно скоростей точек $x_1^{\cdot}$, $x_2^{\cdot}$, $x_3^{\cdot}$, определяются соотношениями

$$\Delta f_{11}=-C_1^{\cdot}(C_3C_2-e_1^2)+2g_3(C_3e_3+e_1e_2)$$

$$\Delta f_{12}=-C_2^{\cdot}(C_3e_3+e_1e_2)+2g_1(C_2e_2+e_1e_3) \quad (1\ 2\ 3) \tag{1.10}$$

$$\Delta f_{13}=-C_3^{\bullet}(C_2e_2+e_1e_3)+2g_2(C_2C_3-e_1^2)$$

В (1.9) через P_i обозначены члены, нелинейные относительно проекций угловой скорости тела p_i ($i=1, 2, 3$). Новые управления u_i имеют вид

$$-\Delta u_1=M_1(C_3C_2-e_1^2)+M_2(C_3e_3+e_1e_2)+M_3(C_2e_2+e_1e_3) \quad {}_{(1\,2\,3)} \tag{1.11}$$

Соотношения (1.11) позволяют по найденным управлениям u_i вычислить искомые управляющие моменты сил M_i, так как определитель при M_i

$$\Delta_1=\begin{Vmatrix} C_3C_2-e_1^2 & C_3e_3+e_1e_2 & C_2e_2+e_1e_3 \\ C_3e_3+e_1e_2 & C_1C_3-e_2^2 & C_1e_1+e_2e_3 \\ C_2e_2+e_1e_3 & C_1e_1+e_2e_3 & C_1C_2-e_3^2 \end{Vmatrix} \tag{1.12}$$

отличен от нуля.

В дальнейшем потребуются уравнения (1.1), (1.2), разрешенные относительно $x_i^{\bullet}$:

$$\begin{gathered} x_1^{\bullet}=\rho_1^{-1}s_3^{-1}(G_2-B_2p_2+e_1p_3+e_3p_1) \quad {}_{(1\,2\,3)} \\ G_i=\Sigma h_j\alpha_{ji}, \quad h_i^{\bullet}=0 \quad {}_{(i,\, j=1,\, 2,\, 3)} \end{gathered} \tag{1.13}$$

На основании (1.13) выражения f_{ij} (1.10) можно рассматривать как функции p_i, x_i и постоянных параметров h_i. Окончательная система уравнений движения механической системы примет вид

$$\begin{gathered} p_i^{\bullet}=\Sigma f_{ij}p_j+u_i+P_i, \quad \alpha_{i1}^{\bullet}=p_3\alpha_{i2}-p_2\alpha_{i3} \quad {}_{(1\,2\,3)} \\ x_1^{\bullet}=\rho_1^{-1}s_3^{-1}(G_2-B_2p_2+e_1p_3+e_3p_1), \quad G_i=\Sigma h_j\alpha_{ji}, \quad h_i^{\bullet}=0 \quad {}_{(i,\, j=1,\, 2,\, 3)} \end{gathered} \tag{1.14}$$

Положение равновесия механической системы как частное решение уравнений (1.14) имеет вид

$$\begin{gathered} p_i=0, \quad \alpha_{ii}=1, \quad \alpha_{ij}=0 \ {}_{(i\neq j)}, \quad x_i=0 \\ x_i^{\bullet}=0, \quad u_i=0, \quad h_i=0 \quad {}_{(i,\, j=1,\, 2,\, 3)} \end{gathered} \tag{1.15}$$

В этом положении главные оси инерции тела $Ox_1x_2x_3$ направлены по одноименным осям инерциальной системы координат $OX_1X_2X_3$, материальные точки покоятся на осях $Ox_1x_2x_3$ на расстояниях s_1, s_2, s_3 от неподвижной точки O; силы F_i, приложенные к точкам, обращаются в нуль.

Возьмем (1.15) в качестве невозмущенного движения и составим на основании (1.14) уравнения возмущенного движения, сохраняя за возмущениями обозначения исходных переменных. Нетрудно проверить, что эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} p_i^{\bullet}=\Sigma f_{ij}p_j+u_i+P_i \\ \alpha_{ii}^{\bullet}=A_{ii}, \quad \alpha_{12}^{\bullet}=-p_3+A_{12}, \quad \alpha_{13}^{\bullet}=p_2+A_{13} \quad {}_{(1\,2\,3)} \\ x_1^{\bullet}=\rho_1^{-1}s_3^{-1}(h_2-B_2p_2+e_1p_3+e_3p_1+\Sigma h_j\alpha_{j2}) \quad {}_{(1\,2\,3)} \\ A_{i1}=p_3\alpha_{i2}-p_2\alpha_{i3} \quad {}_{(i,\, j=1,\, 2,\, 3)} \end{gathered} \tag{1.16}$$

Поставим следующую задачу: так определить управления u_i, как функции фазовых координат тела p_i, α_{ij} (и, возможно, координат точки x_i), чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость режима (1.15) по переменным p_i, α_{ij} и минимум функционала

$$\int_0^{\infty} \Omega(p_1, p_2, p_3;\ \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33};\ u_1, u_2, u_3;\ x_1, x_2, x_3)\,dt \tag{1.17}$$

в котором Ω — определенно-положительная по переменным p_i, α_{ij} функция, которая будет найдена в процессе решения задачи.

2. Решение поставленной задачи проводится в два этапа. Сначала рассмотрим укороченную систему уравнений возмущенного движения (1.17)

$$p_i^{\bullet}=u_i \quad (i=1,\,2,\,3)$$
$$\alpha_{ii}^{\bullet}=A_{ii},\quad \alpha_{12}^{\bullet}=-p_3+A_{12},\quad \alpha_{13}^{\bullet}=p_2+A_{13} \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.1}$$

полученную путем линеаризации первой группы уравнений (1.16) и содержащую в качестве переменных лишь фазовые координаты стабилизируемого тела p_i, α_{ij} (i, $j=1, 2, 3$). Эта система уравнений была детально изучена ранее (см. [3], стр. 67). Вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнений (2.1)

$$p_i=0,\quad \alpha_{ij}=0 \quad (i,\,j=1,\,2,\,3) \tag{2.2}$$

и минимизации функционала

$$\int_0^\infty \Omega_1(p_1, p_2, p_3;\, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33};\, u_1, u_2, u_3)\,dt \tag{2.3}$$

решается построением функции Ляпунова

$$2V=k\Sigma(\alpha_{i1}^2+\alpha_{i2}^2+\alpha_{i3}^2)+\Sigma m_i p_i^2+$$
$$+2p_1\Sigma a_{ij}\alpha_{ij}+2p_2\Sigma b_{ij}\alpha_{ij}+2p_3\Sigma c_{ij}\alpha_{ij} \tag{2.4}$$

и подынтегральной функции

$$\Omega_1=\Sigma e_{ii}p_i^2+k_1^*(\alpha_{23}-\alpha_{32})^2+k_2^*(\alpha_{31}-\alpha_{13})^2+$$
$$+k_3^*(\alpha_{12}-\alpha_{21})^2+\Sigma n_i u_i^2-\Sigma(p_1a_{ij}+p_2b_{ij}+$$
$$+p_3c_{ij})A_{ij} \quad (d_i=m_i/2n_i,\ k_i^*=k^2/4n_id_i^2) \tag{2.5}$$

зависящих от семи положительных параметров k, m_i, n_i, которыми можно распоряжаться нужным образом. Вычисляя коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, e_{ij} функций (2.4), (2.5) на основании теоремы Н. Н. Красовского об оптимальной стабилизации, приходим к следующему оптимальному управлению:

$$u_1=-d_1p_1+km_1^{-1}(\alpha_{23}-\alpha_{32}) \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.6}$$

Управляющие моменты M_i сил, действующих на материальные точки, вычисленные согласно (1.11), линейны относительно фазовых координат тела p_i, α_{ij} и нелинейны относительно координат точек x_i. Заметим, что все уравнения установлены выше при любых соотношениях между массами тела и материальных точек. Если же учесть, что в практической задаче массы стабилизирующих точек много меньше массы стабилизируемого тела, то получим $e_i \ll C_i$ ($i=1, 2, 3$) и моменты M_i станут независимыми от x_i

$$M_1 \simeq C_1[d_1p_1+km_1^{-1}(\alpha_{32}-\alpha_{23})] \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.7}$$

С учетом (1.5) управляющие силы F_i примут вид

$$F_1 \simeq C_2 s_3^{-1}[d_2p_2+km_2^{-1}(\alpha_{13}-\alpha_{31})] \quad (1\ 2\ 3) \tag{2.8}$$

Нетрудно установить, что при определенных условиях функция Ляпунова (2.4) и оптимальное управление (2.6), построенные для приближенной системы уравнений (2.1), сохраняют силу и для полных уравнений возмущенного движения (1.16). Действительно, взятая с обратным знаком полная производная по времени от функции (2.4) в силу уравнений (1.16) имеет вид

$$-V^{\cdot}=\Omega=\Omega_1+\Omega_2+\Omega_3 \tag{2.9}$$

где Ω_1 — определенно-положительная по p_i, α_{ij} квадратичная форма (2.5), Ω_2 — знакопеременная квадратичная форма по p_i, α_{ij}:

$$\Omega_2=\Sigma g_{ij}p_i\alpha_{ij} \quad (i,j=1,2,3) \tag{2.10}$$

с коэффициентами $g_{ij}=g_{ij}(x_1, x_2, x_3; h_1, h_2, h_3)$, зависящими от x_i и малых постоянных параметров h_i, причем $g_{ij}(0, 0, 0; h_1, h_2, h_3)=0$. Через Ω_3 обозначены члены третьего порядка малости относительно p_i, α_{ij}, не влияющие на знак Ω.

Для знакоопределенности функции Ω требуется, чтобы коэффициенты g_{ij} были достаточно малы, т. е. чтобы движение (1.15) было устойчиво по x_i, $x_i^{\cdot}$. Последнее может быть достигнуто путем введения упругих пружин, ограничивающих перемещения рассматриваемых подвижных масс, что имеет место в реальных механических системах. В этом случае суммарная сила Φ_i, действующая на каждую массу, будет состоять из упругой силы и найденной силы (2.8). Обозначив коэффициенты жесткости пружин через c_i ($i=1, 2, 3$), получим [4]:

$$\begin{gathered}\Phi_1\simeq-c_1x_1+k_1p_2+l_1(\alpha_{13}-\alpha_{31}) \quad (1\ 2\ 3)\\ k_1=C_2s_3^{-1}d_2, \quad l_1=C_2ks_3^{-1}m_2^{-1}\end{gathered} \tag{2.11}$$

Точные выражения управляющих сил можно найти согласно (1.11), (1.12), (2.6).

После того как тело придет в исходное положение равновесия и управления (2.7) будут выключены, пружины при помощи специальных устройств должны быть раскреплены с телом, чтобы дать возможность массам равномерно перемещаться вдоль каналов до их полного отделения от тела. В противном случае в силу закона сохранения кинетического момента системы относительно точки O массы не смогут принять на себя возмущения кинетического момента системы и обеспечить стабилизацию положения равновесия тела. Предложенный способ стабилизации имеет, таким образом, на последнем этапе внешнее сходство со стабилизацией при помощи реактивных двигателей, но по сравнению с последним представляется более приемлемым с энергетической точки зрения. С технической точки зрения данная система стабилизации выглядит более удобной, чем система стабилизации при помощи маховиков или гироскопов [3].

Поступила 9 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: *Малкин И. Г.* Теория устойчивсcти движения. Доп. 4, М., «Наука», 1966.
2. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. *Крементуло В. В.* Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс. М., «Наука», 1977.
4. *Childs D. W.* A movable-mass attitude-stabilization system for artificial-g space stations. J. Spacecraft and Rockets, 1971, vol. 8, No. 8.
5. *Kunciw B. G., Kaplan M. H.* Optimal space station detumbling by internal mass motion. Automatica, 1976, vol. 12, No. 5.