

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПОДВЕШЕННОГО НА СТРУНЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ОДНОЙ ИЗ ЕГО ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, С. В. МАЛАШЕНКО, В. А. СТОРОЖЕНКО,
М. Е. ТЕМЧЕНКО, П. Г. ШИШКИН

(Москва, Киев)

В работе [1] получены общие уравнения, определяющие стационарные движения тяжелого твердого тела произвольной конфигурации, шарнирно-подвешенного на струне. Эти уравнения исследованы при больших значениях ω — угловой скорости вращения рассматриваемого тела.

Изучение стационарных движений осесимметричного твердого тела, проведенное в [2], показало, что при некоторых угловых скоростях среди всего семейства этих движений имеются такие, у которых ось симметрии тела расположена в горизонтальной плоскости.

В данной работе рассматривается случай, когда точка подвеса самой струны отстоит от оси вращения, направленной по вертикали. Теоретически и экспериментально изучаются такие стационарные движения твердого тела (в общем случае не осесимметричного), при которых одна из главных центральных осей инерции тела занимает вертикальное положение и обращается вокруг неподвижной вертикали.

1. Пусть произвольное твердое тело массы m подвешено на струне длины l . Струна присоединена к телу в точке O_2 , а противоположный ее конец закреплен в точке O на конце штанги длиной s (фиг. 1, а). Примем, что струна лишена массы, абсолютно гибкая и нерастяжимая. Точка O_2 подвеса тела к струне не лежит ни на одной из его главных центральных осей инерции.

Исследуем стационарные движения тела, при которых оно вместе со струной и штангой вращается как неизменяемая конфигурация с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси.

Введем неподвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в точке O_1 и осью ζ , направленной вертикально вверх (фиг. 1, а). В точке O_1 поместим также начало системы координат $\xi'\eta'\zeta'$, ось ζ' которой совпадает с неподвижной осью ζ . Будем считать, что система $\xi'\eta'\zeta'$ вращается относительно системы $\xi\eta\zeta$ с упомянутой выше угловой скоростью ω .

В центре масс тела — точке G разместим начала трех следующих систем координат: системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$, оси которой параллельны соответствующим осям вращающейся системы $\xi'\eta'\zeta'$; жестко с телом связанной системы $x^*y^*z^*$ с осями, являющимися его главными центральными осями инерции (фиг. 1, б); системы xuz . Последняя, при заданной точке O_2 — крепления струны к телу, также неизменно связана с телом; ее ось z проходит через точку O_2 , а ось x расположена в плоскости x^*y^* .

Определим условия, при выполнении которых тело будет находиться в положении относительного равновесия по отношению к вращающейся системе координат $\xi'\eta'\zeta'$.

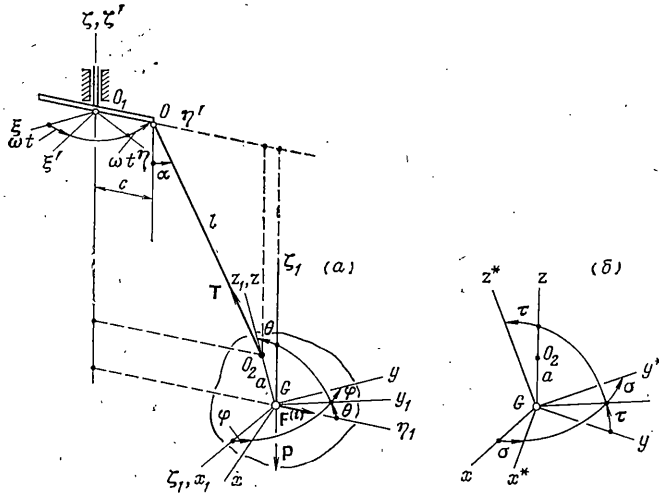
Пренебрегая влиянием среды, примем, что на тело действует лишь сила натяжения струны T и сила тяжести $P=mg$.

Обозначим координаты центра масс тела G в системе $\xi'\eta'\zeta'$ соответственно через $\xi_G', \eta_G', \zeta_G'$. Без уменьшения общности можно считать, что точка G находится в плоскости $\eta'\zeta'$ и соответственно этому положить $\xi_G' = 0$.

При вращении тела с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси ζ главный вектор даламберовых сил инерции перпендикулярен оси вращения и выражается формулой

$$F^{(i)} = -m\omega G = -m[\omega \times (\omega \times r_G)] = -m[\omega(\omega \cdot r_G) - r_G\omega^2] \quad (1.1)$$

где r_G, ω_G — соответственно радиус-вектор центра масс тела G и его ускорение [3].



Фиг. 1.

Радиус-вектор r_G лежит в плоскости $\eta'\zeta'$, а вектор ω постоянен и направлен вдоль вертикальной оси ζ' (ζ). Учитывая это, а также равенство (1.1), определим проекции главного вектора даламберовых сил инерции $F^{(i)}$ на оси системы координат $\xi'\eta'\zeta'$.

Имеем

$$F_{\xi'}^{(i)} = 0, \quad F_{\eta'}^{(i)} = m\omega^2\eta_G', \quad F_{\zeta'}^{(i)} = 0 \quad (1.2)$$

Выберем в качестве полюса неподвижную точку O_1 . Для проекций главного момента элементарных даламберовых сил инерции тела согласно известным формулам динамики [3], получим в этом случае выражения

$$M_{\xi'}^{(i)} = I_{\eta'\zeta'}\omega^2, \quad M_{\eta'}^{(i)} = I_{\xi'\zeta'}\omega^2, \quad M_{\zeta'}^{(i)} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $I_{\eta'\zeta'}, I_{\xi'\zeta'}$ — центробежные моменты инерции тела в системе координат $\xi'\eta'\zeta'$.

Имеем далее [3]

$$I_{\eta'\zeta'} = I_{\eta_1\zeta_1} + m\eta_G'\zeta_G', \quad I_{\xi'\zeta'} = I_{\xi_1\zeta_1} + m\xi_G'\zeta_G' \quad (1.4)$$

где $I_{\eta_1\zeta_1}, I_{\xi_1\zeta_1}$ — центробежные моменты инерции тела уже в системе $\xi_1\eta_1\zeta_1$ с началом в центре масс тела.

Обозначим через A, B, C главные центральные моменты инерции тела, т. е. его моменты инерции относительно осей x^*, y^*, z^* . Запишем соответственно центробежные моменты инерции $I_{\eta'\zeta'}, I_{\xi'\zeta'}$.

Получим [3]

$$I_{\eta_1 \zeta_1} = A \cos(x^*, \eta_1) \cos(x^*, \zeta_1) + B \cos(y^*, \eta_1) \cos(y^*, \zeta_1) + C \cos(z^*, \eta_1) \cos(z^*, \zeta_1) \quad (1.5)$$

$$I_{\xi_1 \zeta_1} = A \cos(x^*, \xi_1) \cos(x^*, \zeta_1) + B \cos(y^*, \xi_1) \cos(y^*, \zeta_1) + C \cos(z^*, \xi_1) \cos(z^*, \zeta_1)$$

Выражения (1.5) преобразуем к виду, более удобному для дальнейших исследований. Согласно известным соотношениям аналитической геометрии, имеем

$$\cos(\eta_1, \zeta_1) = \cos(x^*, \eta_1) \cos(x^*, \zeta_1) + \cos(y^*, \eta_1) \cos(y^*, \zeta_1) + \cos(z^*, \eta_1) \cos(z^*, \zeta_1) = 0 \quad (1.6)$$

$$\cos(\xi_1, \zeta_1) = \cos(x^*, \xi_1) \cos(x^*, \zeta_1) + \cos(y^*, \xi_1) \cos(y^*, \zeta_1) + \cos(z^*, \xi_1) \cos(z^*, \zeta_1) = 0$$

Поэтому

$$I_{\eta_1 \zeta_1} = (A - B) \cos(x^*, \eta_1) \cos(x^*, \zeta_1) + (C - B) \cos(z^*, \eta_1) \cos(z^*, \zeta_1) \quad (1.7)$$

$$I_{\xi_1 \zeta_1} = (A - B) \cos(x^*, \xi_1) \cos(x^*, \zeta_1) + (C - B) \cos(z^*, \xi_1) \cos(z^*, \zeta_1)$$

Из равенства (1.1) следует, что главный вектор даламберовых сил инерции $F^{(3)}$ находится в плоскости, содержащей векторы ω и r_G , т. е. в вертикальной плоскости $\eta'\zeta'$ (фиг. 1, а). Очевидно, что в этой же плоскости расположен и вектор силы тяжести P .

В соответствии с принципом Даламбера сумма векторов $F^{(3)}$, P , T равна нулю. Следовательно, вектор силы T — воздействия на тело струны, также расположен в плоскости $\eta'\zeta'$. Таким образом, при стационарном движении тела неподвижная точка O_1 и точки O и O_2 крепления соответственно струны к штанге и тела к струне, а также и центр масс G должны постоянно находиться в одной и той же плоскости $\eta'\zeta'$. Принимая во внимание это обстоятельство, можно проекции на оси системы $\xi'\zeta'$ главного вектора и главного момента сил, действующих на тело, представить в виде

$$R_{\xi} = 0, \quad R_{\eta} = -T \sin \alpha, \quad R_z = T \cos \alpha - mg \quad (1.8)$$

$$M_{\xi}^{O_1} = -mg\eta_G' + cT \cos \alpha, \quad M_{\eta}^{O_1} = mg\xi_G', \quad M_z^{O_1} = 0$$

где α — угол отклонения струны от вертикали (фиг. 1, а).

Учитывая формулы (1.2) — (1.5), (1.7) и (1.8), в силу принципа Даламбера приходим к уравнениям

$$-T \sin \alpha + m\omega^2 \eta_G' = 0, \quad T \cos \alpha - mg = 0 \quad (1.9)$$

$$-[(A - B) \cos(x^*, \eta_1) \cos(x^*, \zeta_1) + (C - B) \cos(z^*, \eta_1) \cos(z^*, \zeta_1)] \omega^2 - m\omega^2 \eta_G' \zeta_G' - mg\eta_G' + cT \cos \alpha = 0$$

$$[(A - B) \cos(x^*, \xi_1) \cos(x^*, \zeta_1) + (C - B) \cos(z^*, \xi_1) \cos(z^*, \zeta_1)] \omega^2 + m\omega^2 \xi_G' \zeta_G' + mg\xi_G' = 0$$

2. Как следует из изложенного выше, ось z , жестко связанная с телом, лежит в плоскости $\eta'\zeta'$. Поэтому ориентацию тела по отношению к системе $\xi'\eta'\zeta'$ (или, что то же, к системе $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$) можно определить двумя углами, именно углом θ между осью z и вертикалью ζ_1 (ζ_1') и углом φ между осью ξ_1 (x_1) и осью x .

В соответствии с фиг. 1, а имеем

$$\xi_G' = 0, \quad \eta_G' = c + l \sin \alpha + a \sin \theta, \quad \zeta_G' = -l \cos \alpha - a \cos \theta \quad (2.1)$$

где a — расстояние от центра масс G до точки O_2 — крепления тела к струне.

Исключим из равенств (1.9) силу T . Теперь после использования выражений (2.1) получим соотношения

$$\begin{aligned} & (\rho + \sin \alpha + \kappa \sin \theta) \cos \alpha - \nu \sin \alpha = 0 \\ & (A - B) \cos(x^*, \eta_1) \cos(x^*, \zeta_1) + (C - B) \cos(z^*, \eta_1) \cos(z^*, \zeta_1) - \\ & \quad - m l^2 (\rho + \sin \alpha + \kappa \sin \theta) \kappa \cos \theta + m l^2 \nu \kappa \sin \theta = 0 \\ & (A - B) \cos(x^*, \xi_1) \cos(x^*, \zeta_1) + (C - B) \cos(z^*, \xi_1) \cos(z^*, \zeta_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

в которых безразмерные параметры ν , ρ и κ выражаются формулами: $\nu = g/\omega^2 l$, $\rho = c/l$, $\kappa = a/l$.

Введем два угла σ и τ (фиг. 1, б), характеризующие взаимное расположение связанных с телом систем координат $x^*y^*z^*$ и xuz . Через σ и τ , а также θ и φ можно выразить косинусы углов между осями систем координат ξ_1, η_1, ζ_1 и $x^*y^*z^*$. В результате в соответствии с фиг. 1 получим следующую таблицу:

(2.3)

	ξ_1	η_1	ζ_1
x^*	$\cos \varphi \cos \sigma - \sin \varphi \sin \sigma \cos \tau$	$\sin \varphi \cos \theta \cos \sigma + \cos \varphi \cos \theta \sin \sigma \cos \tau + \sin \theta \sin \sigma \sin \tau$	$\sin \theta \sin \varphi \cos \sigma + \sin \theta \cos \varphi \sin \sigma \cos \tau + \cos \theta \sin \sigma \sin \tau$
y^*	$-\cos \varphi \sin \sigma - \sin \varphi \cos \sigma \cos \tau$	$-\sin \varphi \cos \theta \sin \sigma + \cos \varphi \cos \theta \cos \sigma \cos \tau - \sin \theta \cos \sigma \sin \tau$	$-\sin \theta \sin \varphi \sin \sigma + \sin \theta \cos \varphi \cos \sigma \cos \tau + \cos \theta \cos \sigma \sin \tau$
z^*	$\sin \varphi \sin \tau$	$-\cos \varphi \cos \theta \sin \tau + \sin \theta \cos \tau$	$-\sin \theta \cos \varphi \sin \tau + \cos \theta \cos \tau$

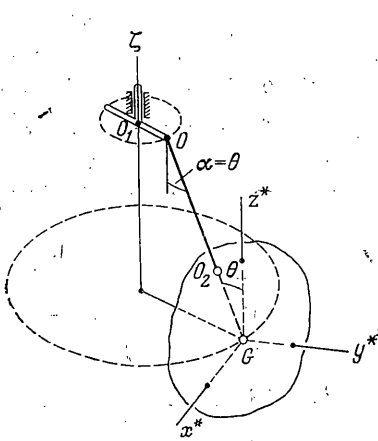
Подставим значения соответствующих косинусов углов из таблицы (2.3) в соотношения (2.2)

$$\begin{aligned} & (\rho + \sin \alpha + \kappa \sin \theta) \cos \alpha - \nu \sin \alpha = 0 \\ & (A - B) [\sin \sigma (\cos \varphi \cos \theta \cos \tau - \sin \theta \sin \tau) + \sin \varphi \sin \theta \cos \sigma] \times \\ & \quad \times [\sin \sigma (\sin \theta \cos \varphi \cos \tau + \cos \theta \sin \tau) + \sin \theta \sin \varphi \cos \sigma] + \\ & \quad + (C - B) [\cos \varphi \cos \theta \sin \tau + \sin \theta \cos \tau] [\sin \theta \cos \varphi \sin \tau - \cos \theta \cos \tau] - \\ & \quad - m l^2 (\rho + \sin \alpha + \kappa \sin \theta) \kappa \cos \theta + m l^2 \nu \kappa \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

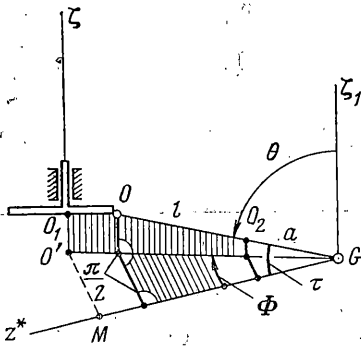
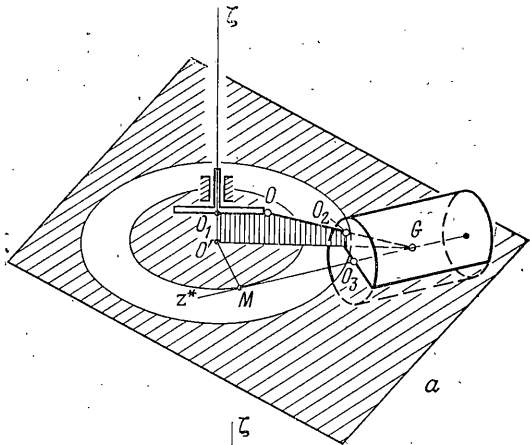
$$(A - B) [\cos \varphi \cos \sigma - \sin \varphi \sin \sigma \cos \tau] [\sin \sigma (\sin \theta \cos \varphi \cos \tau + \cos \theta \sin \tau) + \sin \theta \sin \varphi \cos \sigma] + (C - B) \sin \varphi \sin \tau [-\sin \theta \cos \varphi \sin \tau + \cos \theta \cos \tau] = 0$$

Полученные уравнения позволяют по заданным значениям величин A , B , C , ρ , ν , κ , m , l , σ и τ определять искомые углы α , θ , φ , характеризующие положения тела в его стационарном движении.

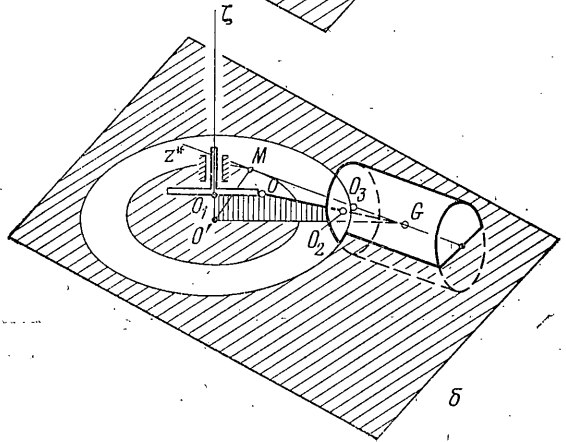
3. Рассмотрим частный случай стационарного движения тела, при котором одна из его главных центральных осей инерции оказывается вер-



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

тикальной. Пусть, например, $z^* \parallel \zeta_1$. В данном случае

$$\cos(z^*, \zeta_1) = 1, \cos(z^*, \xi_1) = 0, \cos(z^*, \eta_1) = 0, \cos(x^*, \xi_1) = 0, \quad (3.1)$$

$$\cos(y^*, \xi_1) = 0$$

В результате система уравнений (2.2) преобразуется к виду

$$(\rho + \sin \alpha + \kappa \sin \theta) \cos \alpha = v \sin \alpha \quad (3.2)$$

$$(\rho + \sin \alpha + \kappa \sin \theta) \cos \theta = v \sin \theta$$

Отсюда следует

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \theta, \text{ т. е. } \alpha = \theta \quad (3.3)$$

и далее

$$\omega^2 = g/vl = g/[c \operatorname{ctg} \theta + (l+a) \cos \theta] \quad (3.4)$$

Для определения угла θ воспользуемся таблицей (2.3) и равенствами (3.1). Получим

$$\sin \varphi \sin \tau = 0$$

$$-\cos \varphi \cos \theta \sin \tau - \sin \theta \cos \tau = 0 \quad (3.5)$$

$$-\sin \theta \cos \varphi \sin \tau + \cos \theta \cos \tau = 1$$

Нетрудно убедиться, что при $\tau \neq 0$ соотношения (3.5) удовлетворяются, если $\varphi = \pi, \theta = \tau$.

Воспользуемся теперь равенством (3.4) и найдем значение угловой скорости ω , соответствующее данному стационарному движению. Имеем

$$\omega^2 = g / [c \operatorname{ctg} \tau + (l+a) \cos \tau] \quad (3.6)$$

Нетрудно получить аналогичные формулы для случаев $x^* \parallel \xi_1$ и $y^* \parallel \xi_1$.

Следует обратить внимание на то, что при стационарном движении тела с вертикальной главной центральной осью инерции выполняется равенство (3.3). Это означает, что точки O и O_2 , определяющие места крепления соответственно струны к штанге и тела к струне (фиг. 1, а), а также центр масс тела, постоянно находятся на одной прямой. Последняя в процессе движения описывает прямую круговой конус (фиг. 2). Отмеченная особенность дает возможность найти среди множества стационарных движений такие, при осуществлении которых одна из главных центральных осей инерции тела вертикальна.

4. Рассмотрим случай, когда твердое тело имеет ось симметрии. Пусть такой осью будет ось z^* . Тогда, очевидно, $A=B$ и любая центральная ось, лежащая в плоскости x^*y^* , будет главной осью инерции. Такая ось будет параллельна вертикальной оси ξ , если $\cos(z^*, \xi_1) = 0$. В этом случае ось симметрии тела z^* расположена в горизонтальной плоскости (фиг. 3). Используя таблицу (2.3), равенство $\cos(z^*, \xi_1) = 0$ и считая угол τ отличным от нуля, получим

$$\cos \varphi = \operatorname{ctg} \tau \operatorname{ctg} \theta \quad (4.1)$$

Обратимся теперь к уравнениям (2.2). Учитывая во втором и третьем из них, что $A=B$ и $\cos(z^*, \xi_1) = 0$, вновь приходим к двум уравнениям (3.2) для определения углов α , θ и соотношению (3.3). Однако в данном случае имеется целый диапазон значений угловой скорости ω , в котором возможно стационарное движение рассматриваемого тела. Из условия (4.1) следует, что

$$\operatorname{ctg} \tau \operatorname{ctg} \theta \leq 1, \text{ откуда } \theta \geq \frac{1}{2}\pi - \tau \quad (4.2)$$

Учитывая только что полученное выражение для угла θ в равенстве (3.4), приходим к условию

$$\omega^2 = \frac{g}{c \operatorname{ctg} \theta + (l+a) \cos \theta} \geq \frac{g}{c \operatorname{ctg} \tau + (l+a) \sin \tau} = \omega_*^2 \quad (4.3)$$

Форма стационарного движения тела в рассматриваемом случае схематически изображена на фиг. 3, а.

При $\omega < \omega_*$ стационарное движение тела, при котором справедливо равенство $\alpha = \theta$, невозможно. Если же $\omega > \omega_*$, то ось симметрии тела z^* выйдет из вертикальной плоскости $\xi O_1 O_2$ и, двигаясь в горизонтальной плоскости, будет постоянно касаться окружности, центр которой O' лежит на неподвижной вертикали ξ (фиг. 3, а).

Обозначим угол отклонения оси симметрии тела z^* от плоскости $\xi O_1 O_2$ буквой Φ . Используя фиг. 4, нетрудно убедиться, что его величина определяется из равенства

$$\cos \Phi \sin \theta = \cos \tau \quad (4.4)$$

При изменении угла θ в интервале $(\frac{1}{2}\pi - \tau, \frac{1}{2}\pi)$ уравнение (4.1) имеет два решения

$$\varphi = \arccos(\operatorname{ctg} \tau \operatorname{ctg} \theta), \quad \varphi = 2\pi - \arccos(\operatorname{ctg} \tau \operatorname{ctg} \theta) \quad (4.5)$$

Этим двум решениям соответствуют два стационарных движения, при которых ось тела z^* занимает положения, симметричные относительно плоскости $O_1 O' G$. На фиг. 3, а, б показаны положения тела при этих стационарных движениях.

5. Для экспериментального исследования рассмотренных выше стационарных движений твердого тела была собрана установка, принципиальная схема которой представлена на фиг. 5.

Тело 1, шарнирно прикрепленное к струне в точке O_2 , приводится во вращение вокруг вертикальной оси привода ζ . Для уменьшения его перегрузки на такой же струне подвешен контргруз 2.

В месте крепления струны к приводу установлен шарикоподшипник 3, позволяющий телу свободно вращаться вокруг оси струны. Приведение рассматриваемой механической системы во вращение осуществляется электродвигателем 4 с регулируемой скоростью вращения через ременную передачу со шкивами 5. Специальной стабилизации скорости вращения не проводилось.

Период обращения тела определялся при помощи цифрового миллисекундомера 6, получающего сигнал от фотодатчика, работающего с лампочкой накаливания 7, которая освещала зеркало 8, отражающее свет на фотодиод 9.

Мгновенное положение тела фотографировалось с использованием искрового (импульсного) освещения, возникающего в момент замыкания синхроконтакта 10 посредством установленного на шкиве привода кулачка 11. Фотоаппарат 12 располагается так, чтобы оптическая ось его объектива была параллельна оси вращения привода ζ , либо находилась в горизонтальной плоскости (см. положение 13 на фиг. 5).

Фотографирование тела при стационарном движении проводилось посредством сравнительно длиннофокусного объектива, что уменьшало перспективные его искажения на полученных фотографиях.

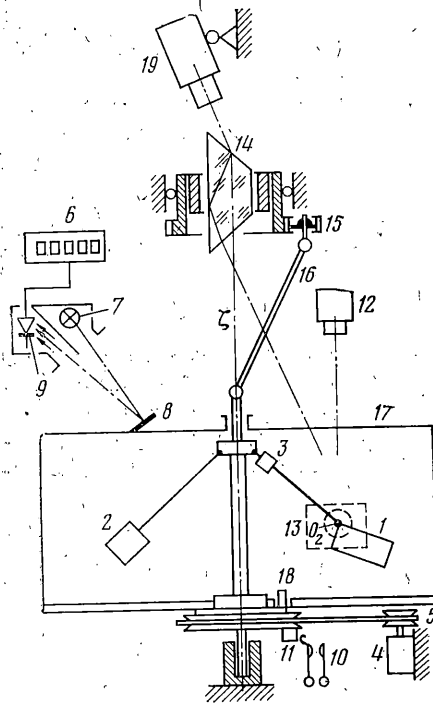
Для удобства наблюдения за движением тела был применен метод так называемой оптической синхронизации. Сущность этого метода такова. Призмная оптическая система, создающая зеркальное изображение, вращается вокруг оптической оси, совпадающей с осью вращения привода ζ . Если установка неподвижная, то наблюдатель через эту вращающуюся систему видит изображение тела (зеркальное), как бы вращающееся в ту же сторону, что и призмная система, но с угловой скоростью, в два раза большей. Рассматривая тело, вращающееся с угловой скоростью ω , через призмную систему, угловая скорость которой в два раза меньше, наблюдатель увидит изображение неподвижным.

На установке призма 14 приводилась во вращение посредством шестеренчатой передачи 15, получающей вращение от привода через карданный вал 16. Наличие вращающейся призмы давало возможность проводить визуальные наблюдения за ориентацией тела в его стационарном движении, обнаруживать возможные его колебания относительно этого стационарного движения, осуществлять киносъемку и т. п.

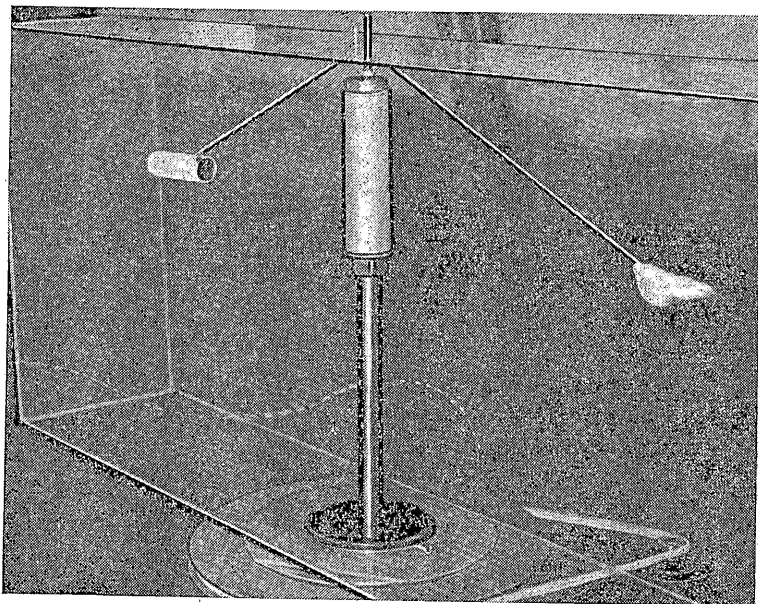
Влияние сопротивления воздушной среды на поведение тела устранялось посредством использования в установке закрытого прозрачного кожуха 17, вращающегося вместе с исследуемым телом с той же угловой скоростью (герметичность кожуха при этом не требовалась). При стационарном вращательном движении тела без перемещения его относительно кожуха (и, следовательно, относительно воздуха внутри кожуха) устранялась причина возникновения сопротивления движению тела со стороны воздушной среды.

Кожух 17 соединен штифтом 18 с ведомым шкивом привода и при необходимости может легко сниматься. Его прозрачность обеспечивала возможность фотографирования, киносъемки тела (положение киноаппарата 19) и визуального наблюдения.

На фиг. 6 представлена фотография тела в его стационарном движении, сделанная при использовании искрового освещения. Одновременно с телом вокруг



Фиг. 5



Фиг. 6

оси ζ вращается кусок ваты, наглядно демонстрирующий отсутствие воздействия воздуха на его движение.

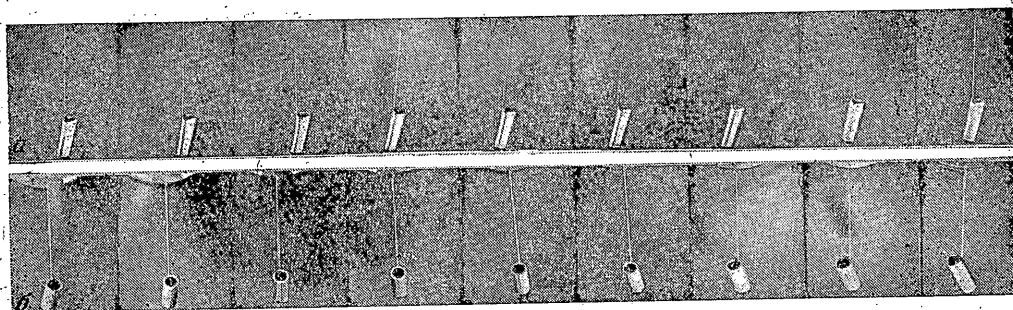
6. Согласно постановке задачи, струна должна быть нерастяжимой и абсолютно податливой при изгибе и кручении, т. е. рассматриваться как геометрическая связь. В первой серии опытов в качестве такой связи была выбрана нить из некрученых капроновых волокон. Такая нить, весьма гибкая на изгиб и кручение и достаточно жесткая в продольном направлении, все же давала возможность за счет своего закручивания передавать телу вращающий момент.

При стационарном движении тела нить, раскрутившись, не должна была оказывать влияние на движение тела. Однако при проведении экспериментов осуществить стационарное движение тела, подвешенного на такой нити, было трудно, так как оно совершало почти незатухающие колебания вокруг оси нити (кинограмма части такого движения приведена на фиг. 7, б). По-видимому, причиной таких колебаний являлось наличие крутильной жесткости нити. Для ее устранения в схему подвеса тела был введен шарикоподшипник 3 (фиг. 5). Колебания тела прекратились (см. кинограмму, представленную на фиг. 7, а), что дало основание заменить неудобную при исследованиях капроновую нить тонкой стальной струной. В результате такой замены при наличии шарикоподшипника 3 колебания тела вокруг оси струны, даже созданные искусственно, быстро затухали и его движение становилось стационарным.

Экспериментальные исследования проводились с осесимметричным твердым телом в форме прямого кругового цилиндра. На его поверхности вдоль образующих были нанесены линии, способствующие определению его ориентации в пространстве. Для удобства исследования точка O_2 — крепления цилиндра к струне, располагалась в плоскости его торца; расстояние от точки O_2 до оси симметрии цилиндра несколько превышало его радиус.

7. На описанной выше установке при различных значениях периода $T=2\pi/\omega$ измерялся угол Φ , определяющий отклонение в горизонтальной плоскости оси симметрии цилиндра z^* от плоскости, содержащей неподвижную вертикаль ζ и ось струны, проходящую через его центр масс. Кроме того, экспериментальным путем вычислялось критическое значение периода $T_*=2\pi/\omega_*$, при котором ось z^* становилась перпендикулярной неподвижной вертикали ζ . Параметры соответственно цилиндра, струны и штанги (фиг. 1) были выбраны следующими: $a=4.43$ см, $\tau=24^\circ$, $l=23.4$ см, $c=2.8$ см.

Регистрация положения цилиндра в пространстве осуществлялась методом искровой фотосъемки при длительности освещения порядка 0,0015 с. Фотографирование проводилось фотоаппаратом, установленным в положении $I2$ (фиг. 5). В момент замыкания синхроконтакта (вспышки освещения) оптическая ось объектива фото-



Фиг. 7

аппарата находилась в плоскости, содержащей соответственно ось струны и неподвижную вертикаль ζ .

Определение угла Φ осуществлялось следующим образом. На фотографии, полученной при фиксированном значении периода T , определялась ось симметрии цилиндра z^* , параллельная крайним образующим цилиндра и делившая расстояние между ними пополам. Угол между осью z^* и линией струны на фотографии и принимался равным Φ (фиг. 8). Измерение этого угла по описанной методике проводилось при различных значениях периода T для двух стационарных движений цилиндра, схематически представленных на фиг. 3, а, б.

Для сопоставления полученных данных с теоретическими угол Φ был вычислен посредством формул, полученных в п. 4. С этой целью при помощи соотношений (4.3) и (4.4) были построены графики угловой скорости ω и угла Φ как функций угла θ . При использовании этих графиков была получена зависимость $\Phi(T)$, представленная на фиг. 9 для двух упомянутых выше стационарных движений. График этой зависимости состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси абсцисс, по которой отложены значения T в секундах. Верхняя ветвь соответствует стационарному движению, показанному на фиг. 3, а, нижняя — стационарному движению, показанному на фиг. 3, б.

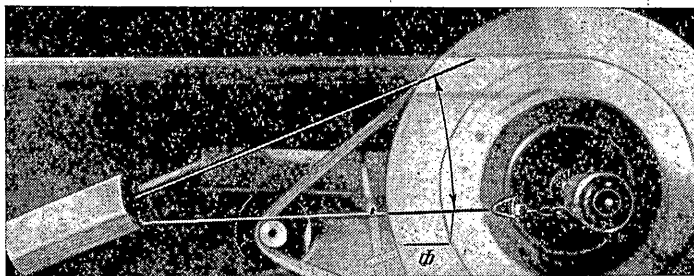
На фиг. 9 соответственно светлыми точками и темными точками нанесены значения угла Φ , полученные для упомянутых стационарных движений экспериментальным путем. Видно, что они удовлетворительно согласуются с соответствующими теоретическими значениями этого угла, представленными непрерывной кривой.

На фиг. 10 приведена фотография цилиндра в его стационарном движении при $\Phi=0$. Значение периода T в этом случае и принималось в качестве критического. Для данного цилиндра оно оказалось равным $T_* = 2\pi/\omega_* = 0.695$ с. Сопоставляя его со значением, полученным теоретически в п. 4, находим, что относительная погрешность в экспериментальном определении искомого периода T_* составляет величину, не превышающую 2.2%.

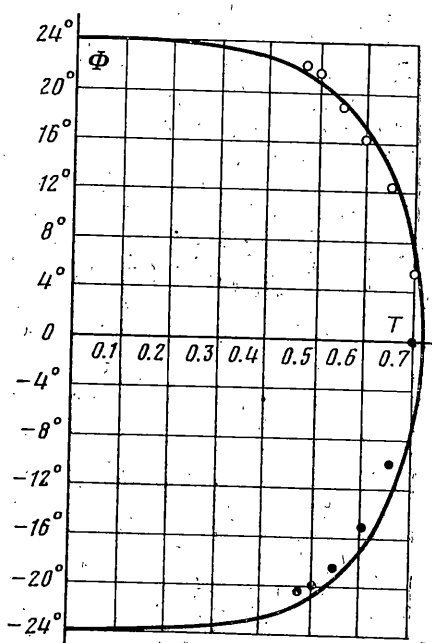
8. Приведем простое объяснение тем случаям стационарного движения твердого тела, подвешенного на идеальной струне, при которых отрезок GO_2 между центром масс тела G и точкой O_2 его крепления к струне является как бы продолжением последней (фиг. 2). Выше было показано, что одна из главных осей инерции тела становится при этом вертикальной и соответственно две другие располагаются в горизонтальной плоскости.

Рассмотрим движение идентичного тела, однако подвешенного на другой струне и за его центр масс. Второй конец новой струны прикрепим к неподвижной точке D (фиг. 11). Движение такого тела можно рассматривать как состоящее из его вращения вокруг центра масс по законам Эйлера — Пуансо и движения самого центра масс по законам сферического маятника. Оба эти движения совершенно независимы, если, разумеется, струна абсолютно гибкая и сопротивление среды, как и другие сторонние силы, отсутствуют.

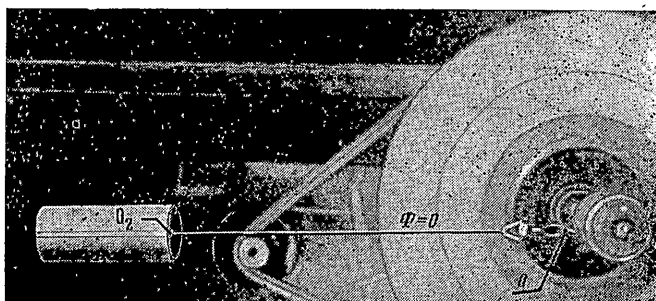
Стационарным движениям твердого тела вокруг его центра масс соответствуют вращения вокруг главных центральных осей инерции, в частности при вертикальном направлении последних. Стационарным же движением самого центра масс будет движение по горизонтальной окружности, центр которой расположен на вертикали, проходящей через верхнюю точ-



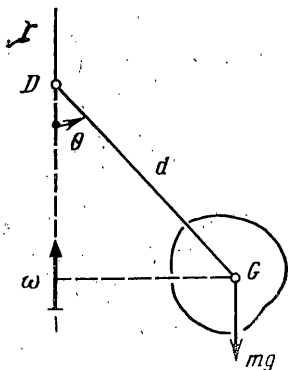
Фиг. 8



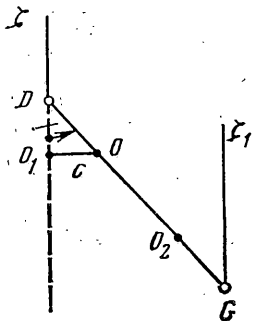
Фиг. 9



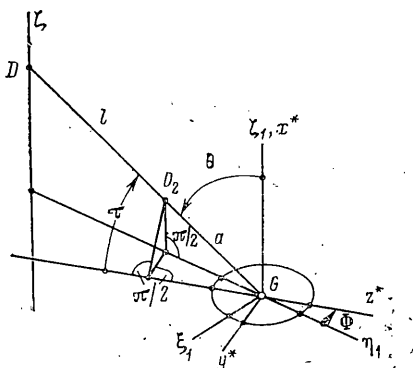
Фиг. 10



Фиг. 11



Фиг. 12



Фиг. 13

ку крепления струны \bar{D} . Очевидно, что

$$m\omega^2 d^2 \cos \theta \sin \theta = mgd \sin \theta \tag{8.1}$$

где ω — угловая скорость обращения маятника, θ — угол между струной и вертикалью, d — длина новой струны.

Считая угол θ отличным от нуля, имеем, согласно равенству (8.1), соотношение, определяющее угловую скорость

$$\omega^2 = g/d \cos \theta \tag{8.2}$$

Сообщим телу ту же угловую скорость ω вокруг вертикально направленной главной оси инерции, проходящей через его центр масс. В результате придем к стационарному вращению системы «тело+струна» как единого целого вокруг вертикальной оси ζ , содержащей точку крепления новой струны.

Стационарные движения тела на прежней и новой струне будут совпадать, если угол θ отклонения струн от вертикали окажется одним и тем же, а их длины l и d связаны соотношением (см. фиг. 12)

$$d = l + a + c/\sin \theta \tag{8.3}$$

Угол α при описанном стационарном движении тела на прежней струне не может быть произвольным. Он является одновременно углом θ между отрезком GO_2 , соединяющим центр масс тела G с точкой O_2 — крепле-

ния прежней струны к телу, и его главной центральной осью инерции, которая при рассматриваемом движении вертикальна (фиг. 13). Если главные моменты инерции различны, то существуют в общем случае лишь три угла θ , соответствующие трем возможным стационарным движениям с вертикальным расположением одной из трех главных осей инерции тела. Соответственно имеются три угловые скорости ω вращения тела, подвешенного на прежней струне. Каждая из них определяется, согласно формулам (8.2) и (8.3), соотношением

$$\omega^2 = g / [(l+a) \cos \theta + c \operatorname{ctg} \theta] \quad (8.4)$$

В зависимости от расположения точки крепления струны к телу два угла θ и даже все три могут оказаться равными.

Если же два главных момента инерции тела равны по величине как, например, у однородного тела цилиндрической формы, то наряду с вращением вокруг вертикально расположенной динамической оси симметрии z^* возможно также стационарное вращение вокруг любой вертикальной прямой, перпендикулярной оси z^* . Сама же ось z^* окажется в этом случае в горизонтальном положении.

Нетрудно убедиться, что острый угол между отрезком GO_2 и одной из бесчисленных главных центральных осей инерции, перпендикулярных оси симметрии тела (фиг. 13), находится в пределах

$$^{1/2}\pi - \tau \leq \theta \leq ^{1/2}\pi \quad (8.5)$$

Здесь τ — острый угол между отрезком GO_2 и осью симметрии тела z^* . В случае $\theta = ^{1/2}\pi - \tau$ ось симметрии находится в плоскости, содержащей струну и вертикальную прямую x^* , вокруг которой происходит стационарное вращение системы «струна+тело». В другом предельном случае $\theta = ^{1/2}\pi$ ось симметрии образует с этой плоскостью угол τ . Однако угловая скорость ω в соответствии с формулой (8.4) должна быть при этом бесконечно большой. В промежуточных случаях ось симметрии тела, оставаясь в горизонтальной плоскости, образует с упомянутой плоскостью некоторый угол Φ , меньший угла τ . Достаточно провести через точку O_2 вертикальную плоскость (фиг. 13), перпендикулярную оси z^* , чтобы, рассматривая, как и выше (см. п. 4), образующийся при этом прямоугольный треугольник, вывести то же соотношение

$$\cos \Phi \sin \theta = \cos \tau \quad (8.6)$$

Оно также следует из формул сферической тригонометрии.

Далее с учетом неравенств (8.5) уже нетрудно получить границы возможных значений угла Φ .

Описанные стационарные движения представляются несколько неожиданными. Однако, как следует из изложенного выше, они не только динамически возможны, но наблюдаются экспериментально и оказываются устойчивыми.

Поступила 21 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Малашенко С. В., Стороженко В. А., Темченко М. Е., Шишкин П. Г. Метод балансировки вращающихся тел на струнном приводе. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 5.
2. Ишлинский А. Ю., Стороженко В. А., Темченко М. Е. О движении осесимметричного твердого тела, подвешенного на струне. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
3. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики, т. 2, М., «Наука», 1977.