МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1980

УДК 531.383

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. Г. МАРТЫНЕНКО

(Москва)

Анализ устойчивости стационарных вращений динамически симметричного твердого тела в магнитном поле был проведен в [1].

В данной статье результаты [1] обобщаются на случай твердого тела с произвольным эллипсоидом инерции. Из анализа линеаризованных уравнений движения определяются устойчивые вращения тела. Построены осредненные уравнения, позволяющие получить количественное описание всего переходного процесса, приводящего к устойчивому движению.

1. Рассмотрим твердое тело, имеющее неподвижную точку O, которая совпадает с центром масс тела.

Пусть $\xi_1\xi_2\xi_3$, $x_1x_2x_3$ — правые ортогональные трехгранники с началом в точке O. Оси ξ_i неизменно ориентированы в пространстве, оси x_i направлены по главным осям инерции тела.

Предположим, что магнитное поле, в котором находится тело, является однородным и проекции вектора напряженности этого поля $\mathbf{H}=\mathbf{H}(t)$ на оси ξ_i имеют вид

$$H_{\xi_1}=H\sin\beta\cos\omega t,\qquad H_{\xi_2}=H\sin\beta\sin\omega t,\qquad H_{\xi_3}=H\cos\beta \tag{1.1}$$

Здесь $H=\mathrm{const}$ — модуль вектора напряженности, ω — угловая скорость вращения поля вокруг оси ξ_3, β — угол между вектором $\mathbf{H}$ и осью вращения поля.

Предположим, что рассматриваемое твердое тело имеет область, занятую проводящим материалом и обладающую сферической симметрией. Кроме того, предположим, что «глубина проникновения» магнитного поля в проводящий материал много больше размеров тела. Тогда, используя результаты [2–4], запишем выражение для момента сил, действующих на проводящее твердое тело в однородном магнитном поле

$$\mathbf{M}_\xi=k_f\{\mathbf{H}_\xi\times[\mathbf{H}_\xi\times\boldsymbol{\Omega}_\xi+\dot{\mathbf{H}}_\xi]\}$$

$$\mathbf{H}_\xi=\|H_{\xi_1},H_{\xi_2},H_{\xi_3}\|^*,\qquad \boldsymbol{\Omega}_\xi=\|\Omega_{\xi_1},\Omega_{\xi_2},\Omega_{\xi_3}\|^* \tag{1.2}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t, k_f — коэффициент пропорциональности, определяемый физическими характеристиками проводящей области тела и ее размерами, $\Omega_{\xi i}$ — проекция угловой скорости тела на ось ξ_i, звездочка означает транспонирование.

Цель данной работы — исследование движения твердого тела около неподвижной точки под действием момента (1.2).

Для матричной записи векторного произведения вектору $\mathbf{a}=\|a_1,a_2,a_3\|^*$ ставится в соответствие кососимметричная матрица

$$a^+=\begin{Vmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{Vmatrix}$$

Перейдем в формуле (1.2) к матричной форме записи

$$\mathbf{M}_\xi = M_0 B^* h^+ h^+ (B\Omega_\xi - \omega\xi_3), \qquad M_0 = k_f H^2 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{h} = \begin{Vmatrix} \sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{Vmatrix}; \quad \xi_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Обозначим через A матрицу ориентации подвижного трехгранника x относительно неподвижного ξ ($\xi = Ax$) и запишем уравнения движения твердого тела около неподвижной точки

$$\begin{gathered} I\Omega^{\cdot} + \Omega^+ I\Omega = M_0 A^* B^* \boldsymbol{h}^+ h^+ (BA\Omega - \omega\xi_3) \\ A^{\cdot} = A\Omega^+, \; I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3), \; \boldsymbol{\Omega} = \| \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \|^* \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь I_i — момент инерции тела относительно оси x_i, Ω_i — проекции угловой скорости на оси x_i, связанные с твердым телом.

Для того чтобы исключить время t в правых частях уравнений (1.4), сделаем замену $A = B^*\Gamma$. При этом одновременно перейдем к безразмерным переменным $z_i = \Omega_i/\omega$. Тогда

$$\begin{gathered} I\mathbf{z}' + z^+ I\mathbf{z} = \varepsilon\Gamma^* h^+ h^+ (\Gamma\mathbf{z} - \xi_3), \qquad \Gamma' = \Gamma z^+ - \xi_3^+ \Gamma \\ \varepsilon = M_0/\omega, \; \mathbf{z} = \| z_1, z_2, z_3 \|^* \end{gathered} \tag{1.5}$$

штрихом обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = \omega t$.

2. Система уравнений (1.5) имеет частное решение

$$\mathbf{z} = \xi_3, \qquad \Gamma = E \tag{2.1}$$

где E — единичная матрица третьего порядка.

Частное решение (2.1) отвечает случаю, когда ось тела x_3 совпадает с осью вращения магнитного поля ξ_3, а угловая скорость тела $\mathbf{\Omega}$ равна угловой скорости вращения поля $\omega\xi_3$.

Положим

$$\mathbf{z} = \xi_3 + \mathbf{x}, \qquad \Gamma = E + \gamma^+ \tag{2.2}$$

Здесь $\gamma = \|\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\|^*$ — вектор малого поворота.

Подставляя (2.2) в (1.5) и пренебрегая членами выше первого порядка малости по переменным x_i, γ_i, получаем систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{gathered} I\mathbf{x}' + \xi_3^+ I\mathbf{x} + x^+ I\xi_3 = \varepsilon h^+ h^+ (\mathbf{x} + \gamma^+ \xi_3) \\ (\gamma^+)' = x^+ + \gamma^+ \xi_3^+ - \xi_3^+ \gamma^+ \end{gathered} \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) в скалярной форме имеют вид

$$\begin{gathered} I_1 x_1' = -\varepsilon\cos^2\beta x_1 - (I_3 - I_2) x_2 + {}^1/_2 \varepsilon \sin 2\beta x_3 - \varepsilon\cos^2\beta\gamma_2 \\ I_2 x_2' = (I_3 - I_1) x_1 - \varepsilon x_2 + \varepsilon\gamma_1, \qquad I_3 x_3' = {}^1/_2 \varepsilon \sin 2\beta (x_1 + \gamma_2) - \varepsilon \sin^2\beta x_3 \\ \gamma_1' = x_1 + \gamma_2, \qquad \gamma_2' = x_2 - \gamma_1, \qquad \gamma_3' = x_3 \end{gathered} \tag{2.4}$$

Таким образом, уравнение для γ_3 отделяется от подсистемы, образованной первыми пятью уравнениями в (2.4). Характеристическое уравнение для указанной подсистемы имеет вид

$$a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 = 0$$

$$a_0=I_1I_2I_3, \quad a_1=\varepsilon(I_1I_3+I_1I_2\sin^2\beta+I_2I_3\cos^2\beta) \tag{2.5}$$
$$a_2=I_1I_2I_3+(I_3-I_2)(I_3-I_1)I_3+\varepsilon^2(I_1\sin^2\beta+I_3\cos^2\beta)$$
$$a_3=\varepsilon I_3(I_3-I_2)+\varepsilon[(I_3-I_2)(I_3-I_1)+I_1I_2]\sin^2\beta+\varepsilon I_3(I_3-I_1)\cos^2\beta$$
$$a_4=(I_3-I_2)(I_3-I_1)I_3+\varepsilon^2(I_3-I_2)\sin^2\beta, \quad a_5=\varepsilon(I_3-I_2)(I_3-I_1)\sin^2\beta$$

С точностью до величин порядка ε^2 корни уравнения (2.5) равны

$$\lambda_1=-\frac{\varepsilon\sin^2\beta}{I_3}, \quad \lambda_{2,3}=\pm i\omega_0-\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{I_3-I_2}{I_2I_3}+\frac{I_3-I_1}{I_1I_3}\cos^2\beta\right]$$
$$\lambda_{4,5}=\pm i-\varepsilon\frac{1+\cos^2\beta}{2I_3}, \quad \omega_0^2=(I_3-I_2)(I_3-I_1)I_1^{-1}I_2^{-1} \tag{2.6}$$

Из формул (2.6) вытекает, что вращения твердого тела в магнитном поле (1.1) вокруг оси среднего момента инерции, а также вокруг оси наименьшего момента инерции будут неустойчивы[1].

Вращение твердого тела вокруг оси наибольшего момента инерции ($I_3>I_1$, $I_3>I_2$) для реальных тел устойчиво по первому приближению[2].

3. Для оценки количественных параметров нелинейного переходного процесса, приводящего к устойчивому движению, построим осредненные уравнения.

Будем считать, что параметр $\varepsilon\ll 1$, и рассмотрим задачу отыскания асимптотического решения системы (1.5) при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для определенности $I_1<I_2<I_3$. Будем рассматривать движение при условии $2TI_2\leqslant L^2\leqslant 2TI_3$, что соответствует траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось x_3. (В случае $2TI_1\leqslant L^2\leqslant 2TI_2$ во всех следующих ниже формулах следует переставить индексы 1 и 3.) При $\varepsilon=0$ решение первых трех уравнений (1.5) представляет известное решение Эйлера — Пуансо

$$z_1=Lk\left(\frac{I_3-I_2}{I_1I_0}\right)^{1/2}\operatorname{cn}u, \quad z_2=Lk\left(\frac{I_3-I_1}{I_2I_0}\right)^{1/2}\operatorname{sn}u$$
$$z_3=L\left(\frac{I_2-I_1}{I_3I_0}\right)^{1/2}\operatorname{dn}u, \quad k^2=\frac{(I_2-I_1)(2TI_3-L^2)}{(I_3-I_2)(L^2-2TI_1)}$$
$$u=(L^2-2TI_1)^{1/2}(I_3-I_2)^{1/2}(I_1I_2I_3)^{-1/2}(\tau-\tau_0), \quad L^2=I_1^2z_1^2+I_2^2z_2^2+I_3^2z_3^2$$
$$I_0=I_3(I_2-I_1)+I_1(I_3-I_2)k^2, \quad 2T=I_1z_1^2+I_2z_2^2+I_3z_3^2 \tag{3.1}$$

где $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{dn}u$ — эллиптические функции Якоби.

Для записи уравнений в оскулирующих элементах [2] введем трехгранник $\zeta_1\zeta_2\zeta_3$ с осью ζ_3, направленной по вектору кинетического момента твердого тела. Трехгранник ζ получается из трехгранника ξ двумя последовательными поворотами: поворотом на угол σ вокруг оси ξ_3 и поворотом на угол ρ вокруг второй оси промежуточного трехгранника

$$\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{Vmatrix}=C\begin{Vmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

[1] Этот результат свидетельствует об ошибочности утверждения статьи [5] о том, что «вращение, когда наибольшая или наименьшая ось тензора инерции твердого тела совпадает с осью вращения магнитного поля, асимптотически устойчиво».

[2] Для пластины бесконечно малой толщины ($I_3=I_1+I_2$) в случае, когда угол $\beta=\pi/2$, в задаче возникает критический случай пары чисто мнимых корней.

$$C=\begin{Vmatrix}\cos\sigma\cos\rho & -\sin\sigma & \cos\sigma\sin\rho\\ \sin\sigma\cos\rho & \cos\sigma & \sin\sigma\sin\rho\\ -\sin\rho & 0 & \cos\rho\end{Vmatrix}$$

Перепроектируем вектор момента сил (1.3) в трехгранник ζ

$$\mathbf{M}_\zeta=M_0C^*B^*h^+h^+(BC\Omega_\zeta-\omega\xi_3)$$
$$\Omega_\zeta=\|\Omega_{\zeta_1},\Omega_{\zeta_2},\Omega_{\zeta_3}\|^* \tag{3.3}$$

Здесь Ω_{ζ_i} — проекции угловой скорости тела на оси трехгранника ζ. При $\varepsilon=0$ будем иметь

$$\langle\Omega_{\zeta_1}\rangle=\langle\Omega_{\zeta_2}\rangle=0,\qquad \Omega_{\zeta_3}=2\omega TL^{-1} \tag{3.4}$$

где $\langle\Omega_{\zeta_i}\rangle$ — результат осреднения функций Ω_{ζ_i} по движению Эйлера — Пуансо.

Ограничиваясь исследованием нерезонансного случая, проведем независимое осреднение соотношения (3.3) по явно входящему в матрицу $B^*h^+h^+B$ времени, а функции Ω_{ζ_i} заменим их средними значениями (3.4). При проведении процедуры осреднения величины L, σ, ρ, T считаются постоянными. Тогда

$$L\rho'=\varepsilon[(1-3\cos^2\beta)\sin\rho\cos\rho TL^{-1}-\sin^2\beta\sin\rho],\qquad \sigma'=0$$
$$L'=\varepsilon\{-[1+\cos^2\beta+(1-3\cos^2\beta)\cos^2\rho]TL^{-1}+\sin^2\beta\cos\rho\} \tag{3.5}$$

Для замыкания системы дифференциальных уравнений (3.5) выпишем уравнение для изменения кинетической энергии тела T. Подсчитывая среднее значение мощности момента (3.3) на движении (3.1), получаем

$$T'=\varepsilon\{-{}^1/_4[2(1+\cos^2\beta)+(1-3\cos^2\beta)\sin^2\rho]\langle z^2\rangle+$$
$$+(1-3\cos^2\beta)(1-3\sin^2\rho)T^2L^{-2}+2\sin^2\beta\cos\rho TL^{-1}\} \tag{3.6}$$

$$\langle z^2\rangle=\frac{L^2}{I_0}\left\{\frac{I_3-I_2}{I_1}k^2+\frac{(I_2-I_1)(I_1+I_2-I_3)}{I_1I_2}+\frac{(I_2-I_1)(I_3-I_2)(I_3-I_1)E(k)}{I_1I_2I_3K(k)}\right\}$$

Здесь $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Используя формулы (3.5), (3.6), можно составить дифференциальное уравнение для функции k^2, введенной в (3.1)

$$\frac{dk^2}{d\tau}=\varepsilon\frac{I_3-I_1}{4I_1I_3}[2(1+\cos^2\beta)+(1-3\cos^2\beta)\sin^2\rho]\left\{(1-\varkappa)(1-k^2)-\right.$$
$$\left.-[(1-\varkappa)+(1+\varkappa)k^2]\frac{E(k)}{K(k)}\right\} \tag{3.7}$$
$$\varkappa=(2I_1I_3-I_1I_2-I_2I_3)[I_2(I_3-I_1)]^{-1},\qquad |\varkappa|\leqslant1$$

Уравнение (3.7) и система (3.5), в которой сделана подстановка

$$T={}^1/_2L^2[(I_2-I_1)+k^2(I_3-I_2)]I_0^{-1}$$

образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию медленных переменных L, σ, ρ, k задачи о движении твердого тела в магнитном поле.

Несмотря на нелинейную и неинтегрируемую структуру уравнений (3.5), (3.7), они довольно легко поддаются анализу. Действительно, так как $\sigma=\text{const}$, то во все время движения вектор кинетического момента остается в плоскости, проходящей через ось вращения поля ξ_3 и начальное положение вектора кинетического момента. Из уравнений (3.5) следует, что движение стремится к стационарному вращению, при котором вектор кинетического момента совпадает с осью ξ_3 ($\rho \to 0$).

При совпадении вектора кинетического момента с осью ξ_3, т. е. при $\rho=0$, уравнение (3.7) переходит в уравнение, полученное в задаче о свободном пространственном движении твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью (уравнение (7.14) первой главы монографии [6]). Указанное уравнение возникает в задаче о движении тяжелого твердого тела в слабо сопротивляющейся среде [7]. При этом следует отметить, что выражение для параметра $\varkappa$, полученное в (3.7), совпадает с соответствующим выражением из [7] в случае, когда матрица, составленная из коэффициентов аэродинамического момента, подобна единичной матрице.

Таким образом, при $\rho=0$, а также в случае, когда $\cos^2\beta={}^1/_3$, можно использовать результаты [6] численного интегрирования уравнения (3.7) при начальном условии $k^2(0)=1$ и различных значениях безразмерного параметра $\varkappa$. При этом, как показано в [6], при всех допустимых $\varkappa$ функция k^2 монотонно убывает от 1 до 0 при росте τ от 0 до ∞, т. е. тело стремится к единственному устойчивому стационарному движению — вращению вокруг оси наибольшего момента инерции I_3.

Поступила 8 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартыненко Ю. Г.* Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом ротора. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
3. *Голубков В. В.* Момент сил в магнитном поле. Космические исследования, 1972, т. 10, вып. 1.
4. *Мартыненко Ю. Г.* Движение проводящего твердого тела около неподвижной точки в магнитном поле. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 4.
5. *Ханукаев Ю. И.* К динамике твердого тела сферической формы в электромагнитном поле. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 3.
6. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
7. *Лещенко Д. Д.* О движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в слабо сопротивляющейся среде. Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 3.