

Таким образом, влияние мертвой нагрузки не сказывается на устойчивости стержня. В случае следящей нагрузки в  $s_2$  (1.5) следует положить  $q=0$ . Тогда

$$EJv^{IV} + (p-q)Fv'' = 0 \quad (1.6)$$

Если  $p_0F$  — критическая нагрузка в отсутствие поперечной нагрузки, то из (1.6) следует

$$p/p_0 - q/p_0 = 1 \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) было получено Петерсенем [5]. Прямая (7) делит плоскостное ( $p/p_0, q/q_0$ ) на две части. Нижняя часть (включающая прямую гидростатического давления  $p=q$ ) соответствует устойчивым, а верхняя — неустойчивым состояниям стержня.

В качестве примера рассмотрим упругий стержень с закрепленными концами, испытывающий поперечное давление  $q$ . Так как концы стержня не смещаются в осевом направлении, то возникает осевое сжимающее усилие  $P$ , равное  $2\nu qF$ , где  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Ввиду того, что  $p=2\nu q \leq q$ , в случае следящей нагрузки  $q$  будем находиться в области устойчивых состояний стержня. В случае мертвой нагрузки, если значение  $P=2\nu qF$  превысит величину эйлеровой критической силы, стержень потеряет устойчивость.

Результаты п. 2 переносятся на случай изгиба стержня за пределами упругости, если предположить, что равномерное всестороннее давление не оказывает влияния на поведение материала. При этом нужно считать, что  $E$  — касательный или приведенный модуль упругости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1951.
2. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 2.
3. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6.
4. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 12.
5. Peterson J. P. Axially loaded column subjected to lateral pressure. AIAA J., 1963, vol. 1, No. 6, p. 1458-1459.

УДК 539.375

### К ТЕОРИИ РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКИХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗРЫВА

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ

(Москва)

Рассматриваются некоторые наиболее принципиальные вопросы математической теории динамического разрушения хрупких тел под действием взрыва (или высоких начальных напряжений). Дается краткий критический анализ последних достижений в этой области. Сопоставляются основные общие подходы к теоретическому изучению этого явления. Предложена структурная модель фронта разрушения и дается строгий анализ в рамках модели, который позволяет выяснить преимущества и недостатки различных подходов.

На простой модели рассмотрено стационарное самоподдерживающееся разрушение; показано, что скорость фронта разрушения равна скорости распространения продольных волн. Решена нестационарная задача о движении фронта разрушения от свободной границы тела.

Существует много математических континуальных теорий разрушения твердых тел под действием взрыва, отличающихся различной схематизацией этого явления. Каждая из них имеет свои преимущества и недостатки. Большинство исследователей полагает, что разрушенный континуум можно считать некоторым пластическим состоянием материала (идеальная жидкость, пластический газ, идеально пластические тела и т. п.).

Границу раздела разрушенной и неразрушенной зон можно считать поверхностью разрыва или же просто границей различных зон, на которой все напряжения и деформации непрерывны. Последняя точка зрения, не требующая дополнительных условий на границе раздела, принята в работах [1, 2], дающих наиболее детальное описание напряжений и скоростей в ближней зоне взрыва для случая сферической симметрии.

В [3, 4] для этого случая впервые введено представление о границе раздела как о поверхности разрыва, причем в качестве необходимо требуемого дополнительного условия на этой поверхности было принято, что со стороны неразрушенного материала на ней выполняется критерий разрушения (т. е. некоторая заданная комбинация напряжений достигает критического значения).

В работе [5] теория Х. М. Алиева была рассмотрена в более общей и подробной постановке, однако без ссылки на ее автора. Отметим, что математическая часть построений этой работы С. С. Григоряна в разрушенной зоне следует упомянутым выше работам В. П. Корявова [1, 2].

В [6] изложена, в частности, теория действия взрыва в хрупких телах, которая в принципиальном отношении отличается от теории Алиева — Григоряна формулировкой дополнительного условия на поверхности разрыва — границе разрушения<sup>1</sup> (кроме того, состояние разрушенной среды описывалось другой более общей и полной моделью). В качестве дополнительного условия предполагалось, что величина диссипации энергии на поверхности разрушения, приходящаяся на единицу массы, есть некоторая постоянная материала, если скорость распространения поверхности разрушения меньше скорости переднего фронта возмущения. Эту постоянную предлагалось определять в экспериментах по взрыву. В [6, 7] указан также путь дальнейшего физически и логически обоснованного усовершенствования этой теории.

Теория Алиева — Григоряна принципиально непригодна для описания разрушения хрупких тел (см. п. 1—4).

В п. 2 предлагается структурная модель фронта разрушения, которая позволяет строго вывести дополнительное соотношение при помощи аппарата механики хрупкого разрушения. Полученное условие идентично совпадает с указанным выше условием, предложенным в [6, 7]. Эта модель позволяет также дополнительно осветить вопрос о причинах непригодности теории Алиева — Григоряна для описания разрушения хрупких тел.

В работах [8, 9] было рассмотрено явление самоподдерживающегося разрушения, которое наблюдается в материалах при напряжениях порядка теоретической прочности. Это явление представляет собой распад твердого тела на отдельные мельчайшие частицы.

Напомним, что разрушение твердого тела идеальной структуры происходит в форме диссоциации на атомы, аналогичной разложению ВВ при химической реакции. Распад происходит со взрывом аналогично взрыву ВВ. В [9] описаны результаты наблюдения за взрывом образцов из высокопрочного стекла, а в [8] на простейшей модели впервые дано объяснение этого замечательного явления<sup>2</sup>.

Этот тип разрушения характерен для всех твердых тел при аномально высоких напряжениях, точно так же как свойство линейной упругости — при достаточно малых напряжениях. В п. 3 на простой модели показано, что скорость движения фронта стационарного самоподдерживающегося разрушения равна скорости распространения возмущений в целом материале.

В работах [10—12] были рассмотрены одномерные автомоделльные задачи о развитии зоны разрушения от свободной границы при разгрузке. Критика модели [8], содержащаяся в [10—12], основана на недоразумении (см. ниже п. 3).

В [10] было использовано уравнение сохранения энергии на скачке разрушения, причем диссипация энергии на скачке (приходящаяся на единицу объема) была взята равной  $U_* = 2/3\mu\epsilon_*^2$ , где  $\mu$  — модуль сдвига целого материала,  $\epsilon_*$  — деформация, при которой тело хрупко разрушается в условиях специфического (мысленного) опыта. Этот опыт заключается в том, что цилиндрическое хрупкое тело единичной длины плотно вкладывается в абсолютно жесткий сосуд и затем равномерно сжимается до разрушения вдоль торцов плоским поршнем.

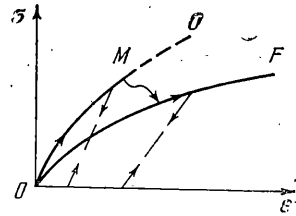
<sup>1</sup> Основная часть книги (и в том числе теория действия взрыва) была написана в течение 1967—1969 гг.; книга была сдана в печать в издательство «Наука» в 1971 г., а вышла в свет в 1974 г. Книга посвящена механике хрупкого разрушения. Общей теории действия взрыва уделено в ней 6 страниц из 640 (в соответствии с удельным весом этой проблемы среди других проблем механики разрушения). Упомянутая теория была опубликована также в [7].

<sup>2</sup> Отметим, что в работе [8] и в § 3 гл. 8 кн. [6] дана также постановка задачи о развитии зоны разрушения от свободной границы тела при разгрузке; решение этой задачи с разных точек зрения предлагается в [10—12].

Нигде в [10, 11] нет никаких указаний или хотя бы замечаний о том, что величина  $U_*$  или  $\varepsilon_*$  считается постоянной материала. Более того, авторы [11] пишут, что «без привлечения некоторых данных о структуре фронта разрушения нельзя обосновать дополнительное условие, которое позволило бы замкнуть систему уравнений». Далее, в п. 1 этой статьи они пытаются вычислить величину  $U_*$  на основе некоторых континуальных структурных соображений и приходят к выводу, что величина  $U_*$  существенно переменна.

Следует подчеркнуть, что из принимаемой в [10] формулы для  $U_*$  сразу вытекает, что величина  $U_*$  не является постоянной хрупкого материала, так как величина  $\varepsilon_*$  для хрупкого образца может изменяться на несколько порядков в зависимости от его размеров и внутренней структуры, прежде всего наличия прослоек и трещин.

В [12] автомодельная задача о разрушении при разгрузке решается<sup>1</sup> в рамках модели Алиева — Григоряна (формулы (11) — (18)). В связи с интересом, проявляемым к этой задаче, ниже в п. 4 дается ее решение и исследование на основе теории действия взрыва в хрупких телах [6, 7]; решение оказывается единственным<sup>2</sup>. Заметим, что соответствующее решение (11) — (18) С. С. Григоряна [12] не согласуется даже с самыми первоначальными сведениями о поведении хрупких тел (см. ниже п. 4).



Фиг. 1

В газированных пористых телах волны разрушения рассматривались в [15—19]. При описании поведения разрушенного материала за фронтом разрушения в теории действия взрыва [6, 7] вместо неполной модели [13] используется более полная и общая теория сыпучих тел и грунтов, развитая в [14].

**1. Теория действия взрыва в хрупких телах.** Наиболее рациональной представляется теоретическая схема [6], основанная на следующих представлениях.

1. Элементарный объем хрупкого материала может находиться только в двух состояниях: разрушенном и неразрушенном (в дальнейшем неразрушенное состояние будем называть  $O$ -состоянием, а разрушенное —  $F$ -состоянием).

2. В каждом из этих состояний материал ведет себя как некоторое (в общем случае упрочняющееся) упругопластическое тело, причем свойства этих упругопластических тел, вообще говоря, различны. Характерная одномерная диаграмма  $\sigma$ - $\varepsilon$  предлагаемой модели изображена на фиг. 1 вместе с правилами перехода, указанными стрелками.

3. Возможны лишь переходы из  $O$ -состояния в  $F$ -состояние, обратные переходы невозможны.

4. Переход из  $O$ -состояния в  $F$ -состояние происходит на некоторой поверхности разрушения в физическом пространстве, которая является поверхностью сильного разрыва для напряжений и деформаций (поверхность разрушения перемещается в пространстве, разделяя  $O$ - и  $F$ -состояния).

5. В каждой точке поверхности разрушения выполняются следующие соотношения:

уравнение сохранения массы

$$\rho_0 (V_n - v_{n0}) = \rho_F (V_n - v_{nF}) \quad (1.1)$$

три скалярных уравнения сохранения импульса

$$\sigma_{n0} - \sigma_{nF} = \rho_0 (v_{n0} - V_n) (v_{n0} - v_{nF}) \quad (1.2)$$

$$\tau_{i0} - \tau_{iF} = \rho_0 (v_{n0} - V_n) (v_{i0} - v_{iF}) \quad (i=1, 2)$$

уравнение сохранения энергии

$$D = U_0 - U_F + 1/2 (V_n - v_{n0})^2 - 1/2 (V_n - v_{nF})^2 + 1/2 (v_{10}^2 + v_{20}^2 - v_{1F}^2 - v_{2F}^2) +$$

<sup>1</sup> Значительная часть [12] (см. (4) — (5)) посвящена решению и анализу задачи о распространении фронта разрушения с дозвуковой скоростью без упругого предвестника (в этом случае фронт разрушения является передним фронтом возмущения). Совершенно очевидно, что это невозможно (на основании принципа Гюйгенса, известного с XVII в.; см., например, Г. Я. Мякишев, Б. В. Буховцев «Физика», М., «Просвещение», 1974, стр. 108).

<sup>2</sup> Решение (6) — (10), данное в [12] и построенное якобы на основе теории [6], содержит арифметические ошибки и несуразицу в постановке задачи. Именно последними обстоятельствами объясняется парадокс, обнаруженный в этой статье (подробнее см. ниже, п. 4).

(1.3)

$$+ \frac{\sigma_{nF}}{\rho_F} - \frac{\sigma_{n0}}{\rho_0} + \frac{\tau_{iF}v_{iF}}{\rho_F(v_{nF}-V_n)} - \frac{\tau_{i0}v_{i0}}{\rho_0(v_{n0}-V_n)}$$

Здесь  $x_1, x_2, n$  — локальная система прямоугольных декартовых координат в рассматриваемой точке поверхности разрушения ( $n$  — внешняя нормаль к этой поверхности); нижние индексы  $O$  и  $F$  относятся к  $O$ - и  $F$ -состояниям соответствующих величин;  $\rho$  — плотность,  $\sigma_n, \tau_1, \tau_2, v_n, v_1, v_2$  — компоненты вектора напряжения и скорости на рассматриваемой площадке поверхности;  $V_n$  — скорость распространения поверхности разрушения;  $U$  — упругий потенциал единицы массы,  $D$  — диссипация энергии на поверхности разрушения, приходящаяся на единицу массы (тепло, энергия остаточных микронапряжений, поверхностная энергия трещин и т. д.). В [6] уравнение сохранения энергии приведено только для наиболее интересного случая, когда  $v_{i0} = v_{iF}, v_{20} = v_{2F}$ .

Исключая из (2.3) при помощи (2.1) и (2.2) скорости  $V_n$  и  $v_n$ , нетрудно получить также соотношение<sup>1</sup>

$$D = U_0 - U_F - \frac{1}{2} (\sigma_{n0} + \sigma_{nF}) \left( \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_F} \right) + \frac{1}{2Q^2} (\tau_{1F}^2 - \tau_{10}^2 + \tau_{2F}^2 - \tau_{20}^2) \quad (1.4)$$

$$Q = \rho_0(V_n - v_{n0}) = \rho_F(V_n - v_{nF})$$

6. Величина  $D$  представляет собой некоторую постоянную материала, если скорость распространения поверхности разрушения меньше скорости переднего фронта возмущения. Это условие по аналогии с критерием Гриффитса можно сформулировать так: минимально необходимое количество энергии, высвобождающейся вследствие хрупкого разрушения (и приходящейся на единицу массы), есть постоянная материала. Для определения этой постоянной, аналогичной по физическому смыслу величине эффективной поверхностной энергии в теории трещин, необходимо специально поставленные эксперименты со взрывом.

Эти представления позволяют указать общую замкнутую систему уравнений для описания процесса разрушения под действием взрыва.

Выражение в правой части формулы (1.3) или (1.4) представляет плотность энергостока на движущейся поверхности разрушения; его можно записать также в виде инвариантного Г-интеграла (см. стр. 230 [6]). В том случае, когда область, занятая разрушенным веществом, имеет сплюснутую трещиноподобную форму в любой момент своего развития, из развитой  $D$ -концепции вытекает известная концепция механики разрушения об эффективной поверхностной энергии. Поэтому развитая теория является обобщением традиционной механики разрушения, изучающей движение линейных энергосток в твердом теле (трещин и т. п.).

В качестве конкретных и более простых моделей  $O$ - и  $F$ -состояний материала можно принять: тело линейно-упругое в  $O$ -состоянии; в  $F$ -состоянии тело идеально пластическое, причем поверхность текучести является границей следующей области в пространстве напряжений:

$$\sigma_1 \leq 0, \quad \sigma_2 \leq 0, \quad \sigma_3 \leq 0; \quad \max(|\tau_n| - |\sigma_n| \operatorname{tg} \delta) \leq k \quad (1.5)$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные напряжения;  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  — соответственно нормальное и тангенциальное напряжения на площадке с вектором нормали  $\mathbf{n}$ ;  $k$  и  $\delta$  — коэффициент сцепления и угол внутреннего трения (в законе Кулона).

Сингулярность поверхности текучести (1.5) приводит к различной аналитической записи уравнений в  $F$ -состоянии (ассоциированного закона пластичности). Физически это означает возможность существования различных зон в  $F$ -состоянии (и их различного сопряжения в физическом пространстве).

На основе приведенной теории в рамках конкретной модели (2.5) в [6] была решена и проанализирована задача о сферически-симметричном разрушении хрупкого тела под действием высокого давления газа в начальной сферической полости (камуфлетный взрыв). Естественно, что никаких случаев неединственности решения не оказалось.

Аналогичная задача рассмотрена в [5], где принято условие Треска для  $F$ -состояния (это условие получается из (1.5) при  $\delta=0$ ) и на фронте разрушения вместо (1.4) принято другое замыкающее условие. Величину  $\delta$  можно считать равной нулю только для металлов; для горных пород она существенно отлична от нуля. Как видно, решение в [6] существенно отличается от аналогичного решения в [5].

В теории Алиева — Григоряна вместо  $D$ -концепции считается, что на поверхности разрушения со стороны неразрушенного материала выполняется условие

<sup>1</sup> Это уравнение при  $[v_1] = [v_2] = 0$  и  $D=0$  называют ударной адиабатой или адиабатой Гюгонио.

типа критериев прочности, т. е. существует некоторая заданная функциональная зависимость между напряжениями

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.6)$$

Эта зависимость считается известной из обычных испытаний образцов данного материала.

Условие вида (1.6), взятое из сопротивления материалов, принципиально непригодно [6] для описания разрушения хрупких материалов. В частности, если для хрупкого материала формально использовать условие типа (1.6), например, в виде  $\sigma_{\max} = \sigma_b$  ( $\sigma_{\max}$  — максимальное главное напряжение), то на основании теории и наименьшего числа опытных данных оказывается, что величина  $\sigma_b$  существенно зависит, например, от размера образца испытываемого материала. Так, для стеклянных образцов с характерным размером порядка  $10^{-6}$  м (стеклянные усы) прочность в 1000 раз больше, чем у образцов обычного размера порядка 1 м.

То же самое имеет место для хрупких горных пород; например, в микрообъемах некоторых горных пород точными физическими методами измерений (рентгеноструктурный анализ) были обнаружены внутренние растягивающие напряжения, которые во много раз превышают величину  $\sigma_b$ , определенную по испытаниям макрообразцов.

В то же время условие типа (1.6) можно использовать для пластических тел. Например, величина  $\sigma_b$  для образца из пластического материала не зависит от его размеров.

Для упругопластических материалов также можно использовать условие типа (1.6), если характерные размеры образца гораздо меньше величины  $K_{Ic}^2 \sigma_s^{-2}$ , где  $K_{Ic}$  — вязкость разрушения материала, а  $\sigma_s$  — его предел текучести. Если же характерные размеры образца гораздо больше величины  $K_{Ic}^2 \sigma_s^{-2}$ , то такой образец в смысле разрушения эквивалентен некоторому идеально хрупкому телу.

Конечно, для каждого материала при определенных условиях взрыва существует какая-то своя функциональная зависимость между шестью неизвестными  $\sigma_{ij}$  на фронте разрушения, однако дело в том, что эту зависимость нельзя заранее угадать или же определить из обычных испытаний образцов. В лучшем случае зависимость (1.6) можно определить из какой-либо структурной модели фронта разрушения (см. ниже п. 2, где для одной точно анализируемой модели определена зависимость (2.6), которая, конечно же, оказалась не такой, какие предлагал С. С. Григорян в [5]).

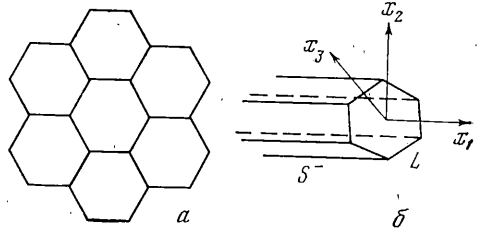
Следовательно, теория Алиева — Григоряна принципиально непригодна для описания действия взрыва в хрупких телах.

Другим принципиальным недостатком работ С. С. Григоряна по теории действия взрыва является использование неполной и весьма частной модели [13] при описании поведения разрушенного материала (сыпучего грунта) за фронтом разрушения. Эта модель не позволяет даже грубо приближенно представить основные состояния таких тел. Поэтому при решении задачи о сферически-симметричном взрыве в [5] вводятся дополнительные представления об упругих стержнях в разрушенной зоне, никак не связанные с моделью [13]. В теории действия взрыва [7, 6] используется более полная и общая теория сыпучих тел и грунтов, развитая в [14].

**2. Структурная модель фронта разрушения.** В качестве локальной структурной модели фронта разрушения рассмотрим следующую картину развития разрушения бесконечного упругохрупкого однородного и изотропного пространства.

Пусть все пространство разбито на две области: полупространство  $x_1 > 0$ , где нет трещин, и полупространство  $x_1 < 0$ , все разделенное пространственной трещиной на бесконечное число одинаковых полубесконечных призматических стержней, поперечное сечение каждого из которых имеет форму правильного шестиугольника (фиг. 2, а). Оси всех стержней параллельны оси  $x_1$ . Фронт пространственной трещины полностью расположен в плоскости  $x_1 = 0$ , образуя бесконечную периодическую систему одинаковых правильных шестиугольников, заполняющих целиком всю плоскость.

Фронт трещины движется в направлении оси  $x_1$  со скоростью  $V$ , которая является некоторой функцией времени. Система прямоугольных декартовых координат  $x_1 x_2 x_3$  связана с фронтом трещины. Ось  $x_1$  расположена вдоль оси одной из бесконечных призм  $P$  (фиг. 2, б). Обозначим через  $L$  пересечение фронта трещины



Фиг. 2

с этой призмой  $P$ ; боковую поверхность призмы  $P$  при  $x_1 < 0$  обозначим через  $S^-$ , а при  $x_1 > 0$  — через  $S^+$ . Поверхность  $S^-$  совпадает с одним из бесконечного числа берегов трещины, поверхность  $S^+$  проходит в неразрушенном пространстве. Скорость  $V$  предполагается меньшей скорости волны Рэлея.

Условия нагружения предполагаются следующими: при  $x_1 \rightarrow \infty$  действуют постоянные напряжения ( $p > 0$ ):

$$\sigma_{11} = q, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = p, \quad \sigma_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k \quad (2.1)$$

а берега трещины свободны от внешних нагрузок

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

где  $(n_1, n_2, n_3)$  — вектор внешней нормали к берегам трещины. Материал считаем линейно-упругим.

Поставленная пространственная задача динамической теории упругости очень сложна и точное ее решение не представляется возможным. Для решения вопроса о развитии фронта трещины на основании механики хрупкого разрушения необходимо и достаточно знать не все решение, а лишь его асимптотику при приближении к фронту трещины. В рассматриваемой задаче эту асимптотику оказывается возможным определить, используя метод сингулярных решений и инвариантные  $\Gamma$ -интервалы [6].

Рассмотрим следующую замкнутую поверхность  $\Sigma$  в пространстве  $x_1x_2x_3$ :

$$\Sigma = S_e^- + S_e^+ + S_e + B^- + B^+ \quad (2.3)$$

Здесь  $B^-$  и  $B^+$  — поперечные сечения бесконечной призмы  $P$  при  $x_1 \rightarrow -\infty$  и при  $x_1 \rightarrow +\infty$  соответственно;  $S_e^-$  — погруженный в призму  $P$  сегмент поверхности, получающейся в пространстве как след окружности радиуса  $\varepsilon$  при движении ее центра вдоль контура  $L$  (так что плоскость, в которой лежит эта окружность, в каждый момент движения перпендикулярна контуру  $L$ );  $S_e^-$  и  $S_e^+$  — поверхность  $S^-$  и  $S^+$  соответственно, за исключением той ее части, которая отсекается поверхностью  $S_e$ .

Величина  $\varepsilon$  считается малой по сравнению с радиусом  $r$  окружности, описанной около правильного шестиугольника  $L$ .

Имеет место следующее уравнение [6]:

$$\int_{\Sigma} \left[ \rho \dot{U} n_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^* - V)^2 n_1 + \frac{1}{2} \rho (u_2^{*2} + u_3^{*2}) n_1 - \sigma_{1j} n_j (1 - u_{1,1}) - \sigma_{2j} n_j u_{2,1} - \sigma_{3j} n_j u_{3,1} \right] d\Sigma = 0 \quad (2.4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность материала;  $U$  — упругий потенциал, приходящийся на единицу массы;  $u_1, u_2, u_3$  — компоненты вектора смещения в системе координат  $x_1x_2x_3$ , связанной с движущимся фронтом разрушения;  $u_1^*, u_2^*, u_3^*$  — компоненты вектора скорости в той же системе координат;  $n_1, n_2, n_3$  — компоненты внешней нормали к поверхности  $\Sigma$ .

Уравнение (2.4) легко выводится при помощи теории инвариантных  $\Gamma$ -интегралов механики сплошной среды [6]; оно является следствием уравнений теории упругости.

Вычислим последовательно все интегралы уравнения (2.4). Прежде всего покажем, что соответствующие интегралы по поверхности  $S_e^-$  и  $S_e^+$  исчезают

$$\int_{S_e^-} [\dots] d\Sigma = \int_{S_e^+} [\dots] d\Sigma = 0 \quad (2.5)$$

Действительно, очевидно, имеем

$$n_1 = 0 \quad \text{на } S_e^- \text{ и } S_e^+, \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{на } S_e^- \quad (2.6)$$

Кроме того, вследствие условий симметрии

$$\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 = 0 \quad \text{на } S_e^+ \quad (2.7)$$

$$u_{2,1} = u_{3,1} = 0 \quad \text{на } S_e^+ \quad (2.8)$$

Из вида подынтегрального выражения в формуле (2.4) и соотношений (2.6)–(2.8) непосредственно вытекают равенства (2.5).

Обозначим, следуя [6], через  $\Gamma_1$  составляющую на ось  $x_1$  вектора плотности потока энергии на контуре  $L$  (фронте трещины). Методом сингулярных решений

и инвариантных  $\Gamma$ -интегралов можно показать [6], что справедливо следующее уравнение:

$$-\frac{1}{2} \oint_L \Gamma_1 dl = \int_{S_z} \left[ \rho U n_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^* - V)^2 n_1 + \frac{1}{2} \rho (u_2^{*2} + u_3^{*2}) n_1 - \right. \\ \left. - \sigma_{1j} n_j (1 - u_{1,1}) - \sigma_{2j} n_j u_{2,1} - \sigma_{3j} n_j u_{3,1} \right] d\Sigma \quad (2.9)$$

По физическому смыслу этой задачи можно положить

$$U_0 - U_F = \frac{1}{S} \int_{B^- + B^+} U n_1 d\Sigma \quad \left( S = \frac{3}{2} \sqrt{3} r^2 \right) \\ (V_n - v_{n0})^2 - (V_n - v_{nF})^2 = \frac{1}{S} \int_{B^- + B^+} (u_1^* - V)^2 n_1 d\Sigma \quad (2.10) \\ v_{10}^2 + v_{20}^2 - v_{1F}^2 - v_{2F}^2 = \frac{1}{S} \int_{B^- + B^+} (u_2^{*2} + u_3^{*2}) n_1 d\Sigma \\ \frac{\sigma_{n0}}{\rho_0} - \frac{\sigma_{nF}}{\rho_F} = \frac{1}{S} \int_{B^- + B^+} \frac{1}{\rho} \sigma_{11} n_1 d\Sigma$$

где  $S$  — площадь правильного шестиугольника.

В левой части уравнений (2.10) фигурируют те же величины, что и в выражении (1.3) для диссипации энергии на поверхности разрушения. Действительно, фронт разрушения, имеющий нулевую толщину в феноменологической теории, в данной структурной модели имеет бесконечную толщину, причем  $O$ -состояние реализуется при  $x_1 \rightarrow +\infty$ , а  $F$ -состояние — при  $x_1 \rightarrow -\infty$ . Такая ситуация встречается и в других структурных теориях (например, в теории фронта пламени диффузионного горения, в теории пограничного слоя в гидродинамике, в структурной теории двойного слоя в электрохимии и т. д.).

Можно показать, что величины  $u_{i,1}$  в данной задаче стремятся к нулю при  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  по экспоненциальному закону. Отсюда при помощи формул (1.3), (2.5), (2.9) и (2.10) исходное уравнение (2.4) можно записать в следующем виде:

$$\rho DS = \frac{1}{2} \oint_L \Gamma_1 dl \quad (2.11)$$

В данной задаче рассматриваемая трещина, очевидно, будет трещиной нормального разрыва, так что другие составляющие вектора плотности потока энергии на фронте трещины равны нулю ( $\Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$ ).

Величина  $\Gamma_1$  при развитии трещины нормального разрыва в хрупком теле равна постоянной  $2\gamma$ , где  $\gamma$  — эффективная поверхностная энергия единицы площади свободной поверхности. Отсюда при помощи (2.11) находим следующее выражение для диссипации энергии на фронте разрушения:

$$D = 4\gamma / (\sqrt{3}\rho r) \quad (2.12)$$

Данная модель позволяет также определить величину  $D$  непосредственно при помощи соотношений (1.3) и (2.10). Действительно, при малых деформациях все слагаемые в (2.10) будут гораздо меньше члена

$$\frac{1}{S} \int_{B^- + B^+} U n_1 d\Sigma = U \Big|_{x_1 = -\infty}^{x_1 = +\infty} \quad (2.13)$$

Отсюда получаем следующую формулу:

$$D = \frac{1}{2E\rho} \left( \frac{2-3\nu^2}{1+\nu} p^2 - 4\nu pq \right) \quad (2.14)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

При помощи (2.12) и (2.14) находим

$$\frac{2-3\nu^2}{1+\nu} p^2 - 4\nu p q = \frac{8E\gamma}{\sqrt{3}r}. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) представляет функциональную зависимость (1.6) для данной конкретной структурной модели. Естественно, она оказалась совершенно отличной от тех зависимостей, которые предлагаются в [5]. Уравнение (2.15), очевидно, нельзя считать универсальным, как и всякое другое типа (1.6). При изменении стереотипа разрушения на поверхности разрушения (т. е. структурной модели фронта) будет изменяться и функция шести переменных в выражении (1.6). Конечно, можно попытаться построить эту функцию при помощи какой-то достаточно общей структурной модели фронта разрушения (в которой должны фигурировать уже все шесть переменных  $\sigma_i$  перед фронтом), однако это чрезвычайно трудная задача.

Вид зависимости (2.12) подсказывает следующий способ ее обобщения. Пусть некоторая структурная модель фронта разрушения включает в себя любое число  $k$  структурных геометрических параметров размерности длины:  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$ . Пусть в результате точного решения задачи удалось найти величину  $D$ , которая, очевидно, будет зависеть лишь от внутренних параметров  $r_1, r_2, \dots, r_k, \gamma$ , а также от  $E$  и  $\nu$ . Используя анализ размерностей, эту зависимость можно записать так:

$$D = \frac{\gamma}{\rho r_1} f \left( \nu, \frac{Er_1}{\gamma}, \frac{r_2}{r_1}, \frac{r_3}{r_1}, \dots, \frac{r_k}{r_1} \right) \quad (2.16)$$

Следовательно, величина  $D$  будет постоянной, если постоянны структурные параметры  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$  и величины  $E, \gamma, \nu$ .

Будем предполагать<sup>1</sup>, что каждый материал при определенных внешних условиях характеризуется определенным стереотипом разрушения (т. е. какой-то определенной структурой фронта разрушения). Тогда из формулы (2.16) вытекает, что величина  $D$  будет некоторой постоянной хрупкого материала. Решение внешней задачи в принципе позволяет также получить критериальную зависимость типа (2.15) или (1.6) для заданной структуры фронта. Однако практически невозможно изучить структуру фронта разрушения даже для одного материала. Гораздо легче определять одну константу  $D$  в специально поставленных экспериментах со взрывом (например, сравнивая результат измерения какой-либо величины с теоретическим решением в условиях опыта).

Формулу (2.12) можно использовать для приближенной оценки величины  $D$ , взяв в качестве  $r$  средний размер кусков разрушенного материала, а величину  $\gamma$  — из испытаний образцов с фиксированными трещинами.

Величина  $\gamma$  для твердых тел (природных и искусственных материалов) меняется в пределах ( $10^{-1} \div 10^6$ ) Н/м.

Например, для стекла, приняв  $\gamma = 2$  Н/м,  $r = 10^{-6}$  м,  $\rho = 2.5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; по формуле (2.12) находим  $D = 1.85 \cdot 10^3$  Н·м/кг.

Константа  $D$  в теории действия взрыва играет роль, аналогичную той, которую играет вязкость разрушения  $K_{IC}$  (или поверхностная энергия  $\gamma$ ) в механике разрушения хрупких материалов. Поток энергии на фронт разрушения, определяемый при помощи инвариантных  $\Gamma$ -интегралов (или локально при помощи формул (1.3) или (1.4)), в теории действия взрыва играет роль, аналогичную той, которую играет поток энергии на фронт трещины (или коэффициент интенсивности напряжений) в механике хрупкого разрушения.

Расхождения в подходах к изучению разрушения хрупких материалов под действием взрывных волн с точки зрения  $D$ -концепции и с точки зрения Алиева — Григоряна еще большие, чем расхождения в подходе Гриффитса и Мора к изучению статического разрушения хрупких материалов.

Теорию действия взрыва, основанную на  $D$ -концепции, следует считать лишь первым, наиболее простым, приближением к действительности (аналогично механике разрушения, основанной на концепции  $K_{IC}$ ). Дальнейшее развитие и усовершенствование этой теории будет связано с изучением зависимости  $D$  от скорости распространения фронта разрушения  $V_n$ :

$$D = D(V_n) \quad (2.17)$$

Видимо, как и аналогичную зависимость  $l' = l'(K_I)$  в теории трещин, ее придется изучать как экспериментально, так и теоретически (при помощи модельных теорий, охватывающих определенный тип физических явлений).

<sup>1</sup> По существу это единственное допущение принципиальной физической природы, лежащее в основе теории действия взрыва в хрупких материалах [6].

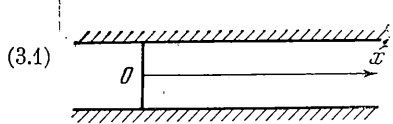


**3. Самоподдерживающееся разрушение.** Представим себе, что между двумя идеально гладкими абсолютно жесткими параллельными плоскими плитами находится идеальное сыпучее тело, состоящее из мельчайших твердых частиц, совершенно не связанных друг с другом (фиг. 3). В таком идеально сыпучем теле растягивающие напряжения невозможны. Предположим также, что все частицы совершенно одинаковы (причем каждая имеет форму куба или правильного тетраэдра) и плотно упакованы в пространстве. Все частицы — из одного и того же линейно-упругого материала, поэтому гипотетическое сыпучее тело при сжимающих напряжениях будет вести себя, как линейно-упругое (если при сжатии напряжения в сыпучем теле находятся внутри призмы Кулона). Ось  $x$  направим параллельно поверхности плит и будем считать, что сыпучее тело занимает область  $x > 0$ . Начальные напряжения нулевые, а граничная поверхность  $x=0$  свободна от внешних нагрузок.

Предположим теперь, что из бесконечности к свободной границе тела движется импульс постоянного сжимающего напряжения  $\sigma_x$  (как следствие какого-то удара)

$$\sigma_x = -p\delta_0(-x-ct) \quad (p > 0)$$

$$\delta_0(\xi) = 0 \text{ при } \xi < 0, \quad \delta_0(\xi) = 1 \text{ при } \xi > 0$$



Фиг. 3

Здесь  $c$  — скорость распространения продольных упругих волн. Предполагается, что напряжения в сыпучем теле находятся внутри призмы Кулона. В момент  $t=0$  импульс достигает свободной границы и от нее в направлении оси  $x$  отходит отраженный импульс возмущения

$$\sigma_x = -p\delta_0(x-ct) \text{ при } t > 0 \quad (3.2)$$

Согласно (1.1) и (1.2), частицы позади отраженного импульса получают скорость  $v_x$ :

$$v_x = -2p/(\rho_0 c) \text{ при } x < ct \quad (3.3)$$

а средняя плотность  $\rho_F$  будет равной

$$\rho_F = \rho_0 [1 + 2p/(\rho_0 c^2)]^{-1} \text{ при } x < ct \quad (3.4)$$

Здесь  $\rho_0$  — начальная плотность плотноупакованного вещества.

Плотность вещества  $\rho_F$  позади отраженного импульса меньше начальной плотности  $\rho_0$  согласно (3.4). Для рассматриваемой гипотетической структуры сыпучего тела это может быть связано только с тем, что частицы теряют все взаимные контакты и становятся изолированными (свободно двигаясь с одной и той же скоростью  $v_x$ ). Следовательно, в данной идеализированной модели вещество позади отраженного импульса можно трактовать как разрушенное, а скачок  $x=ct$  — как волну разрушения. Совершенно очевидно, что в данной задаче скорость волны разрушения не может быть ни больше, ни меньше величины  $c$ . Для данной модели это не является гипотезой, это — совершенно строгий результат.

Теперь предположим, что до момента времени  $t < 0$  сыпучее тело находилось в состоянии сжатия с напряжением  $\sigma_x = -p$ , а в момент  $t=0$  граница тела при  $x=0$  мгновенно освободилась от внешних нагрузок. Тогда при  $t > 0$  от свободной границы пойдет импульс возмущения (3.2), скачок разрежения при  $x=ct$  можно трактовать как волну разрушения, а скорость и средняя плотность разрушенного вещества за скачком определяется формулами (3.3) и (3.4), в которых величину  $2p$  нужно заменить на  $p$ .

Поставим теперь вопрос: существует ли стационарный режим разрушения рассматриваемой модели тела? (Стационарность, как известно, означает, что решение зависит лишь от переменной  $x-Vt$ , где  $V$  — некоторая постоянная скорость.) Ответ на этот вопрос совершенно очевиден: да, существует и полностью совпадает с только что построенным решением. Также очевидно, что невозможно существование стационарных режимов разрушения при разгрузке данной модели сыпучего тела со скоростью  $V$ , отличной от скорости звука  $c$ .

Эта простая стационарная модель была применена [3] для качественного объяснения самоподдерживающегося разрушения — явления, представляющего собой взрывообразный распад всего твердого тела на мелкие частицы при напряжениях, близких к теоретической прочности. Отметим, что только существование стационарного режима разрушения, очевидно, может объяснить это таинственное явление. Действительно, предположим, что твердое тело сжато в камере всесторонним давлением порядка  $10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> (порядка теоретической прочности). Близкое состояние практически реализуется, например, в микрообъеме под наконечником бура с алмазным индентором, вдавливаемым в стекло или прочную горную породу [6]. Если теперь мгновенно освободить от напряжений некоторую плоскость  $x=0$ , то начнется диссоциация тела на атомы (разрушение при теоретической прочности) и тело

разрушится стационарной волной разрушения, подобно разрушению ВВ в стационарной детонационной волне, причем, очевидно, запасенная телом упругая энергия аналогична химической энергии ВВ.

В [9] были описаны некоторые результаты наблюдений такого типа разрушения высокопрочного стекла при изгибе образцов в форме толстых пластин. При огромных напряжениях (порядка теоретической прочности) сопротивление частиц тела взаимному разъединению пренебрежимо мало; поэтому при таких напряжениях правильность применения простой сформулированной выше модели со стационарной волной разрушения не вызывает сомнения. При меньших напряжениях, когда связи между частицами становятся существенными, стационарных режимов разрушения, по-видимому, не существует (а указанную выше модель, естественно, использовать нельзя).

Может возникнуть вопрос: в какой связи находится эта модель разрушения с общей моделью п. 2? Ответ очевиден: эта частная модель является предельным случаем общей модели при следующих условиях:

$$U_0 \gg D, \quad U_0 \gg U_F, \quad \sigma_{n0} \gg \sigma_{nF} \quad (3.5)$$

а касательные напряжения и скорости на фронте волны пренебрежимо малы.

При нарушении условий (3.5) стационарное решение, вообще говоря, будет невозможным, причем скорость распространения поверхности разрушения может быть существенно меньше  $c$ , вообще говоря, будет переменной.

Работы [10–12] посвящены одной конкретной нестационарной краевой задаче о движении волны разрушения от свободной поверхности в сжатом хрупком теле. Отметим, что эта краевая задача вообще не рассматривалась ни в [8], ни в [6], поэтому соответствующие замечания авторов [10–12] представляются совершенно неуместными.

Однако невозможно не отметить, что в статье С. С. Григоряна [12] на нескольких страницах (см. формулы (1) — (5)) решается и анализируется указанная задача в предположении, что фронт разрушения является передним фронтом возмущения и движется с дозвуковой скоростью! Очевидно, это невозможно (на основании принципа Гюйгенса).

В связи с проявляемым интересом к указанной нестационарной задаче она решается ниже в п. 4 в рамках теории действия взрыва в хрупких телах (п. 1).

**4. Нестационарная задача о движении фронта разрушения от свободной границы тела.** Пусть полупространство  $x > 0$  в начальный момент времени  $t=0$  находится в состоянии покоя и всестороннего сжатия напряжениями  $\sigma_{ih} = -p\delta_{ih}$ , где  $p > 0$ . В начальный момент времени  $t=0$  и далее граница  $x=0$  становится свободной от напряжений

$$\sigma_x = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

При достаточно большом давлении  $p$  и надлежащих свойствах материала за передней волной возмущения от границы пойдет также волна разрушения. Скорость  $V$  движения фронта разрушения требуется найти из решения задачи. Деформации тела предполагаются малыми.

Постановка данной задачи копирует постановку задачи [12], решаемой в рамках модели Алиева — Григоряна (см. формулы (14) — (18) [12]). Относительно решения (6) — (10) этой статьи, построенного якобы на основе теории [6], следует заметить следующее. Состояние разрушенного вещества характеризуется разными моделями: при решении (6) — (10) предполагается, что в разрушенной зоне все напряжения равны нулю, а при решении (11) — (18) считается, что материал в разрушенной зоне — упругоэластический (см. ниже формулы (4.4)).

Однако равенство нулю напряжений в  $F$ -состоянии, согласно (3.5), характерно лишь для самоподдерживающегося разрушения, в общем случае оно неверно (см. § 1 и 2 гл. 8 кн. [6]). Именно этим тривиальным обстоятельством объясняется «парадокс неединственности» решения (6) — (10). При нулевых напряжениях в  $F$ -зоне этот парадокс имеет место также для модели Алиева — Григоряна. Кроме того, при выводе формул (7) была допущена ошибка, поэтому все формулы (7) — (10) работы [12] неверны. Приведем правильные формулы (в обозначениях С. С. Григоряна):

$$v_x = v_* + \frac{\sigma_*}{\rho_*(V-v_*)}, \quad \frac{1}{\rho_*} - \frac{1}{\rho_F} = \frac{\sigma_*}{\rho_*^2(V-v_*)^2}$$

Формулы С. С. Григоряна (7) получаются из последних лишь при  $\rho_* \sim \rho_0$ ,  $V \gg v_*$ . Для рассматриваемой одномерной задачи имеют место следующие уравнения: уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \quad \left( v = \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (4.2)$$

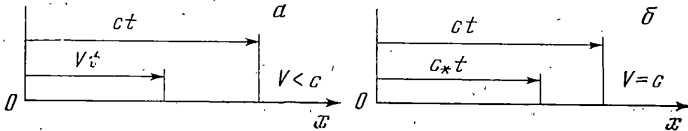
уравнения физического состояния в  $O$ -зоне

$$\sigma_x = -p + 3 \frac{1-\nu}{1+\nu} k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \sigma_z = -p + \frac{3\nu k}{1+\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.3)$$

уравнения физического состояния в  $F$ -зоне)

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_s, \quad \sigma_y = \sigma_z, \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -3p + 3k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.4)$$

Здесь  $u$ ,  $v$ ,  $\rho$  — смещение, скорость и плотность соответственно;  $k$ ,  $\nu$ ,  $k_s$  — постоянные материала,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  — напряжения. Смещение и деформация отсчитываются от



Фиг. 4

начального состояния при  $t=0$ . В  $O$ -состоянии материал считается линейно-упругим, а в  $F$ -состоянии — пластическим на сдвиг и упругим по объемной деформации (в соответствии с допущениями [12]).

В зависимости от значений параметров  $p$ ,  $k$ ,  $\nu$ ,  $\tau_s$ ,  $\rho$  возможны два различных режима разрушения<sup>1</sup>.

Режим с двумя скачками при  $x=ct$  и  $x=Vt$ , когда  $V < c$  (фиг. 4, а).

Режим с двумя скачками при  $x=ct$  и  $x=c_*t$ , когда  $V=c$  (фиг. 4, б).

Здесь обозначено

$$c^2 = \frac{3k(1+\nu)}{\rho(1+\nu)}, \quad c_*^2 = \frac{k}{\rho} \quad (c \geq c_*) \quad (4.5)$$

Подставляя  $\sigma_x$  из (4.3) и (4.4) в (4.2), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{для } O\text{-состояния} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_*^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{для } F\text{-состояния} \quad (4.7)$$

Решение краевой задачи для обоих режимов имеет вид  $u=tf(x/t)$  (автомодельное решение). Его можно записать в следующем виде:

первый режим,  $V < c$  (фиг. 4, а)

$$u = \begin{cases} A_1 x + A_2 t & \text{при } ct > x > Vt \\ A_3 x + A_4 t & \text{при } Vt > x > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

второй режим,  $V=c$  (фиг. 4, б)

$$u = \begin{cases} B_1 x + B_2 t & \text{при } ct > x > c_* t \\ B_3 x + B_4 t & \text{при } c_* t > x > 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

где постоянные  $A_i$  и  $B_i$  подлежат определению из следующих условий: непрерывность смещения на скачках; уравнение сохранения импульса на скачках; граничное условие (4.1); для режима на фронте разрушения должно выполняться соотношение (1.4), которое в данном случае можно привести к виду

$$U_0 - U_F - \frac{v_F - v_0}{2\rho V} (\sigma_{x0} + \sigma_{xF}) = D \quad (4.10)$$

Здесь были использованы формула (2.1) и условия

$$v_0 \ll V, \quad v_F \ll V, \quad \rho \approx \rho_0 \approx \rho_F \quad (4.11)$$

вытекающие из условия малости деформаций (индекс  $n$  в формулах (1.1) и (1.4) опущен или заменен на  $x$ ):

<sup>1</sup> Еще большее разнообразие возможных режимов имеет место в сферически-симметричной задаче (камуфлетный взрыв, § 2, гл. 8 кн. [6]). Автор работы [12] неправильно полагает, что это свидетельствует о «неоднозначности» решения.

Используя уравнения (4.3) и (4.4), найдем величины  $U_0$  и  $U_F$ :

$$U_0 = \frac{3k}{2\rho} \left[ \frac{p^2}{3k^2} - \frac{2p}{3k} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.12)$$

$$U_F = \frac{1}{6\rho k} \left( -p + k \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{4\tau_s^2(1+\nu)}{9k\rho(1-2\nu)} \quad (4.13)$$

Опуская выкладки, приведем результат вычислений в виде окончательного решения, удовлетворяющего всем четырем условиям.

*Первый режим*

$$u = \begin{cases} A_1(x-ct) & \text{при } ct > x > Vt \\ \left( \frac{p}{k} - \frac{4\tau_s}{3k} \right) (x-Vt) - A_1 t(c-V) & \text{при } Vt > x > 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$A_1 = \frac{(1+\nu)(3\rho kD - 2p\tau_s + 4\kappa_1\tau_s^2)}{3k[(1-2\nu)p - 2(1-\nu)\tau_s]}, \quad \kappa_1 = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$$

$$\frac{V}{c_*} = \left[ \frac{p^2 - \kappa_1(3\rho kD + 4\kappa_1\tau_s^2)}{p^2 - 8/3 p\tau_s - \kappa_2\rho kD + 16/9\tau_s^2 - 4/9\tau_s\kappa_2^2} \right]^{1/2}, \quad \kappa_2 = \frac{1+\nu}{1-2\nu}$$

Можно показать, что этот режим имеет физический смысл при условии  $D > 0$ . В этом случае при  $p < p_0$  волна разрушения не возникает; при  $p > p_0$  существует волна разрушения, причем скорость ее распространения  $V$  монотонно возрастает с увеличением  $p$ , стремясь к  $c_*$  при  $p \rightarrow \infty$  (см. схематическую фиг. 5). Величина  $p_0$  равна

$$p_0 = [\kappa_1(3\rho kD + 4\kappa_1\tau_s^2)]^{1/2} \quad (4.15)$$

*Второй режим*

$$u = \begin{cases} \kappa_2\tau_s(x-ct)/k & \text{при } ct > x > c_*t \\ \left( \frac{p}{k} - \frac{4\tau_s}{3k} \right) x + \left[ \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \frac{\tau_s}{k} \left( 1 - \sqrt{\frac{1+\nu}{3-3\nu}} \right) - \frac{p}{k} \right] c_*t & \text{при } c_*t > x > 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Диссипация энергии на фронте разрушения для данного режима равна

$$U_0 - U_F - \frac{v_F}{2\rho c} (-p + \sigma_{xF}) = 0 \quad (4.17)$$

Согласно шестому условию общей теории (см. п. 1), этот режим реализуется в том случае, если константа материала  $D$  равна нулю. При этом условии второй режим реализуется для любого начального давления  $p$ . Величину  $D$  можно считать равной нулю, например, для сыпучих тел. Как видно, существуют нестационарные волны разрушения, распространяющиеся со скоростью звука.

Заметим, что одно условие сохранения импульса (при  $x = c_*t$  для второго режима и при  $x = ct$  для первого режима) оказывается следствием условия непрерывности смещения на соответствующем скачке.

Таким образом, если константа  $D$  равна нулю, то волна разрушения возникает при любом давлении  $p$ , причем скорость ее распространения равна  $c$ . Если же  $D > 0$ , то волна разрушения возникает только при  $p > p_0$ , причем скорость ее распространения всегда меньше  $c_*$ .

В заключение уточним условия существования стационарного самоподдерживающегося разрушения. В соответствии с определением самоподдерживающегося разрушения начальное давление должно быть достаточно велико, так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$U_0 \gg U_F, \quad p \gg \sigma_{nF} \quad (4.18)$$

При этом волна разрушения должна распространяться со скоростью  $c$ , так, чтобы частицы за фронтом будут иметь скорость  $v = -p/\rho c$ .

Диссипация энергии на фронте самоподдерживающегося разрушения равна

$$U_0 - U_F + \frac{pv}{2\rho c} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{p^2}{3\rho k} \quad (4.19)$$

Согласно шестому условию общей теории, режим самоподдерживающегося разрушения реализуется в том случае, если правая часть уравнения (4.19) больше константы  $D$ , т. е. при выполнении следующего неравенства:

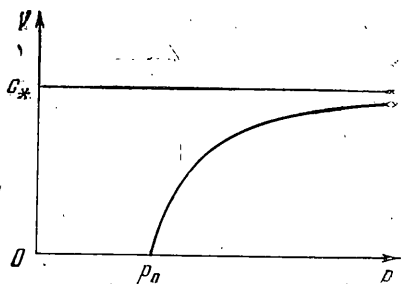
$$3\rho kD < p^2(1-2\nu)/(1-\nu) \quad (4.20)$$

Условия (4.18) и (4.20) представляют уточнение общих условий (3.5) самоподдерживающегося разрушения.

При модельных предположениях С. С. Григоряна (4.4) на основании формул (4.12) и (4.13) условия (4.18) не могут быть удовлетворены при любых давлениях  $p$ . Следовательно, самоподдерживающееся разрушение нельзя объяснить в рамках модели С. С. Григоряна.

Как видно, решение данной задачи, построенное при помощи теории действия взрыва в хрупких телах, существует и единственно, а также вполне согласуется со свойствами хрупких тел. Последнего нельзя сказать о соответствующем решении С. С. Григоряна (формулы (11)–(18) [12]). Действительно, согласно формулам (12) и (16) из [12], напряжения в упругой зоне  $ct > x > Vt$  постоянны и таковы, что в каждой точке зоны выполняется условие хрупкого разрушения. Тем не менее разрушения не происходит нигде в этой зоне, хотя размеры ее неограниченно возрастают с течением времени! Этот парадокс объясняется непригодностью модели Алиева – Григоряна для описания волн разрушения в хрупких материалах.

Вопросы, аналогичные изложенным в данной статье, для газированных пористых тел более подробно проанализированы в недавно выпущенной книге [20].



Фиг. 5

Поступила 16 V 1979

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коряков В. П. Некоторые представления о зоне и фронте трещин. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 6.
2. Коряков В. П. О зоне и фронте трещин в упругом теле под действием давления. ПМТФ, 1965, № 6.
3. Алиев Х. М. Ударная волна разрушения в хрупких средах. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 1.
4. Алиев Х. М. О распространении волны разрушения. Материалы Всес. симп. по распространению упругопластических волн в сплошных средах. Баку, Изд-во АН АзССР, 1966.
5. Григорян С. С. Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
7. Черепанов Г. П. On the theory of fracture of a brittle body by explosion. Proceed. of Intern. Conference on Dynamic Crack Propagation, Leyden, Noordhoff Intern. Publishing, 1972.
8. Галин Л. А., Черепанов Г. П. О самоподдерживающемся разрушении напряженного хрупкого тела. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 3.
9. Галин Л. А., Рябов Д. А., Федосеев Д. В., Черепанов Г. П. О разрушении высокопрочного стекла. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 5.
10. Слепян Л. И. О волне хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. МТТ, 1968, № 4.
11. Слепян Л. И., Троянкина Л. В. Разрушение хрупкого стержня при продольном ударе. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2.
12. Григорян С. С. О некоторых работах по разрушению хрупких тел в динамических условиях. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
13. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
14. Черепанов Г. П. On the theory of fluidization. Pt 1. General model. IECF, 1972, vol. 11, No. 1.
15. Никольский А. А. О волнах внезапного выброса газированных пород. Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 4, с. 623–626.
16. Никольский А. А. О волнах разрушения газированных пород. Докл. АН СССР, 1953, т. 91, № 5, с. 1035–1038.
17. Никольский А. А. Волны разрушения газированных углей. Докл. АН СССР, 1954, т. 96, № 1, с. 25–28.
18. Христианович С. А. О волне выброса. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и математика, 1953, № 12, с. 1679–1688.
19. Христианович С. А. О волне дробления. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и математика, 1953, № 12, с. 1689–1699.
20. Черепанов Г. П. Mechanics of Brittle Tracture. McGraw — Hill Intern. Book Co., New York, 1979, p. 976.