УДК 624.07 : 543.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТРЕЖНЕЙ, ПОДВЕРГАЮЩИХСЯ ДЕЙСТВИЮ ОСЕВОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗОК

Г. С. ШАПИРО

(Москва)

Вопрос об устойчивости стержней, подвергающихся совместному действию осевой и поперечной нагрузок, привлекает, особенно в последнее время, широкий интерес. Первые исследования на основе плоской задачи теории упругости выполнены Л. С. Лейбензоном [1] и А. Ю. Ишлинским [2]. Новые результаты, основанные на различных нелинейных теориях упругости, получены в [3, 4], где содержится также обзор опубликованных статей в данной области.

В предлагаемой заметке в рамках плоской задачи теории упругости, используя результаты [2], выведены заключения об устойчивости полосы под действием «мертвой» или следящей поперечной нагрузки. Из этих заключений, при стремлении толщины полосы к нулю, следуют соответствующие выводы для устойчивости стержня. Те же выводы получены непосредственно из элементарного решения задачи об устойчивости стержня. Для иллюстрации рассмотрена задача об устойчивости стержня с закрепленными концами.

Отмечено, что результаты, относящиеся к устойчивости упругого стержня, могут быть перенесены на случай устойчивости стержня за пределами упругости.

1. Рассмотрим устойчивость полосы $-l\leqslant x\leqslant l$, $-h\leqslant y\leqslant h$ под действием осевых напряжений $\sigma_x=-p$, приложенных на торцах полосы $x=\pm l$ и поперечного давления q на кромках $y=\pm h$. Как и в [1, 2], будем считать, что внутри полосы справедливы уравнения линейной теории упругости, а на ее границах $y=\pm h$ учитываются возмущения. Легко убедиться, что если нагрузка q является мертвой, то на границах $y=\pm h$, как и в рассмотренном в [2] случае отсутствия поперечной нагрузки q, для напряжений получатся условия

$$\tau_{xy}=-p\partial v/\partial x,\qquad \sigma_y=0 \tag{1.1}$$

Отсюда, повторяя выкладки [2], можно видеть, что наличие мертвой нагрузки не сказывается на величине критического давления p_*. В случае следящей нагрузки q, вместо (1) получим

$$\tau_{xy}=-(p-q)\partial v/\partial x,\qquad \sigma_y=0 \tag{1.2}$$

Аналогичным образом можно убедиться, что в этом случае при определении критического давления полученное в [2] значение p следует заменить на $(p-q)$. При $h\to 0$ получаются соответствующие результаты для устойчивости стержня.

2. Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения площадью F. Начнем со случая мертвой нагрузки. Разлагая ее на нормальную и касательную к деформированной оси стержня составляющие, с точностью до малых величин второго порядка получим нормальную составляющую, равную q, и касательную составляющую, равную qdv/dx, где v — прогибы стержня. Очевидно, что действие касательной составляющей сводится к изгибу стержня равномерно-распределенными по его длине изгибающими моментами интенсивности $\mu=qFdv/dx$. Связь между изгибающими моментами M и поперечными силами Q в поперечных сечениях стержня будет

$$dM/dx=Q+\mu \tag{1.3}$$

Уравнение изгиба стержня имеет вид

$$EJv^{\mathrm{IV}}=s,\qquad s=\sum_{i=1}^{3}s_i \tag{1.4}$$

где s — некоторая фиктивная нагрузка.

Слагаемое $s_1=-pF$ обусловлено действием продольной силы $P=pF$; слагаемое $s_2=qFd^2v/dx^2$ — действием распределенных изгибающих моментов μ, а слагаемое $s_3=-qFd^2v/dx^2$ — действием поперечного давления q. Формулу для s_3 можно получить, рассматривая действие на элемент стержня dx всестороннего давления q (не влияющего на поведение стержня), на которое по торцам элемента наложим осевые растягивающие напряжения q.

В результате, при действии мертвой нагрузки приходим к обычному уравнению

$$EJv^{\mathrm{IV}}+Pv''=0 \tag{1.5}$$

Таким образом, влияние мертвой нагрузки не сказывается на устойчивости стержня. В случае следящей нагрузки в s_2 (1.5) следует положить $q=0$. Тогда

$$EJv^{\mathrm{IV}}+(p-q)Fv''=0 \tag{1.6}$$

Если p_0F — критическая нагрузка в отсутствие поперечной нагрузки, то из (1.6) следует

$$p / p_0 - q / p_0 = 1 \tag{1.7}$$

Соотношение (1.7) было получено Петерсеном [5]. Прямая (7) делит плоскость $(p / p_0,\ q / q_0)$ на две части. Нижняя часть (включающая прямую гидростатического давления $p=q$) соответствует устойчивым, а верхняя — неустойчивым состояниям стержня.

В качестве примера рассмотрим упругий стержень с закрепленными концами, испытывающий поперечное давление q. Так как концы стержня не смещаются в осевом направлении, то возникает осевое сжимающее усилие P, равное $2\nu qF$, где ν — коэффициент Пуассона. Ввиду того, что $p=2\nu q\leqslant q$, в случае следящей нагрузки q будем находиться в области устойчивых состояний стержня. В случае мертвой нагрузки, если значение $P=2\nu qF$ превысит величину эйлеровой критической силы, стержень потеряет устойчивость.

Результаты п. 2 переносятся на случай изгиба стержня за пределами упругости, если предположить, что равномерное всестороннее давление не оказывает влияния на поведение материала. При этом нужно считать, что E — касательный или приведенный модуль упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1951.
2. *Ишлинский А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. ж., 1954, т. 6, № 2.
3. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6.
4. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии «мертвой» нагрузкой. Прикл. механика, 1976, т. 12, № 12.
5. *Peterson J. P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure. AIAA J., 1963, vol. 1, No. 6, p. 1458–1459.

УДК 539.375

К ТЕОРИИ РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКИХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗРЫВА

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ

(Москва)

Рассматриваются некоторые наиболее принципиальные вопросы математической теории динамического разрушения хрупких тел под действием взрыва (или высоких начальных напряжений). Дается краткий критический анализ последних достижений в этой области. Сопоставляются основные общие подходы к теоретическому изучению этого явления. Предложена структурная модель фронта разрушения и дается строгий анализ в рамках модели, который позволяет выяснить преимущества и недостатки различных подходов.

На простой модели рассмотрено стационарное самоподдерживающееся разрушение; показано, что скорость фронта разрушения равна скорости распространения продольных волн. Решена нестационарная задача о движении фронта разрушения от свободной границы тела.

Существует много математических континуальных теорий разрушения твердых тел под действием взрыва, отличающихся различной схематизацией этого явления. Каждая из них имеет свои преимущества и недостатки. Большинство исследователей полагает, что разрушенный континуум можно считать некоторым пластическим состоянием материала (идеальная жидкость, пластический газ, идеально пластические тела и т. п.).