

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В. Г. ЛИТВИНОВ, А. Д. ПАНТЕЛЕЕВ

(Киев)

Решается задача о выборе формы поверхности пластины, обеспечивающей минимальный вес при ограничениях по прочности и геометрическим размерам. Исследуется вопрос существования оптимального управления, реализующего минимум соответствующего функционала на допустимом множестве управлений. Установлена возможность аппроксимации бесконечномерной задачи оптимального управления последовательностью задач нелинейного программирования.

1. Постановка задачи, теорема существования. Следуя [1, 2], назовем обобщенным решением задачи об изгибе пластины переменной толщины функцию $w(x, y) \in V$, для которой

$$a_h(w, u) = \iint_{\Omega} g u dx dy, \quad \forall u \in V \quad (1.1)$$

$$a_h(w, u) = \iint_{\Omega} D(h) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \right. \\ \left. - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy$$

$$D(h) = E h^3(x, y) / 12(1-\nu^2)$$

Здесь g — интенсивность внешней нагрузки; Ω — двумерная область, представляющая срединную плоскость пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $h = h(x, y)$ — толщина пластины; V — энергетическое пространство, полученное замыканием в норме соболевского пространства $W_2^2(\Omega)$ множества гладких функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям, при которых из соотношения $a_h(w, w) = 0$ следует $w = 0$.

Предполагаем, что $h(x, y)$ — измеримая по Ω функция, удовлетворяющая почти всюду в Ω условиям

$$h_1 \leq h(x, y) \leq h_2 \quad (h_1, h_2 > 0) \quad (1.2)$$

Тогда билинейная форма $a_h(w, u)$ порождает в пространстве V норму, эквивалентную основной норме пространства $W_2^2(\Omega)$, и все нормы $a_h(w, w)$, соответствующие функциям $h(x, y)$, удовлетворяющим (1.2), эквивалентны между собой, т. е.

$$c_2 \|w\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq a_h(w, w) \leq c_1 \|w\|_{W_2^2(\Omega)}^2, \quad (c_1, c_2 > 0) \quad (1.3)$$

При этом $\forall g \in V^*$ (V^* — пространство, сопряженное к V) в V существует единственное решение задачи (1.1).

Считая функцию $h(x, y)$ управлением, определим допустимое множество управлений C_g в виде

$$C_g = \{h \mid h \in W_{p^1}(\Omega), p \geq 2, h_1 \leq h(x, y) \leq h_2, \\ \|h\|_{W_{p^1}(\Omega)} \leq h_3, \Psi_k(h, w(h)) - c_k \leq 0\} \quad (k=1, 2, \dots, t) \quad (1.4)$$

Здесь h_1, h_2, h_3, c_k — положительные константы; $\Psi_k(h, w(h))$ — функционалы, определяемые на функциях h из $W_{p^1}(\Omega)$, для которых $h_1 \leq h \leq h_2$, и на соответствующих решениях $w(h)$ задачи (1.1) при фиксированной внешней нагрузке g . При этом $\Psi_k(h, w(h))$ характеризует напряженное состояние в пластине, форма которой определяется функцией h , в окрестности точки (x_k, y_k) .

Предполагаем, что для функционалов Ψ_k выполняется следующее условие:

если $\{h_m\}_{m=1}^\infty \subset C_g$, $h_m \rightarrow h_0$ слабо в $W_{p^1}(\Omega)$, $w_m(h_m) \rightarrow w_0$ слабо в $W_2^2(\Omega)$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_k(h_m, w_m(h_m)) \geq \Psi_k(h_0, w_0) \quad (k=1, 2, \dots, t) \quad (1.5)$$

Введем функцию цели

$$f(h) = \iint_{\Omega} h(x, y) dx dy \quad (1.6)$$

Задаче о выборе формы пластины минимального веса при геометрических и прочностных ограничениях ставится в соответствие следующая бесконечномерная задача оптимального управления.

Найти функцию $h^*(x, y)$, для которой

$$h^* \in C_g, \quad f(h^*) = \inf_{h \in C_g} f(h) \quad (1.7)$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1.5), множество C_g не пустое и задается соотношением (1.4). Тогда существует решение задачи (1.7).

Доказательство. Пусть $\{h_n\}$ — последовательность элементов из C_g , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(h_n) = \inf_{h \in C_g} f(h) \quad (1.8)$$

По определению C_g последовательность $\{h_n\}$ ограничена в $W_{p^1}(\Omega)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{h_m\}$, такую, что

$$h_m \rightarrow h^* \quad \text{слабо в } W_{p^1}(\Omega) \quad (1.9)$$

$$h_m \rightarrow h^* \quad \text{сильно в } L_2(\Omega) \quad \text{и почти всюду в } \Omega \quad (1.10)$$

Последовательности управлений $\{h_m\}$ соответствует последовательность $\{w_m(h_m)\}$ решений задачи (1.1) для заданного $g \in V^*$.

В силу (1.4) для любого t имеем $h_1 \leq h_m \leq h_2$.

Для соответствующих элементов w_m справедливы неравенства (1.3), из которых с учетом (1.1) получим

$$c_2 \|w_m\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq a_{h_m}(w_m, w_m) = (g, w_m) \leq \|g\|_{V^*} \|w_m\|_{W_2^2(\Omega)}$$

Отсюда будем иметь

$$\|w_m\|_{W_2^2(\Omega)} \leq \|g\|_{V^*} / c_2 \quad (1.11)$$

Следовательно, из последовательности $\{w_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{w_k\}$, такую, что

$$w_k \rightarrow w^* \text{ слабо в } W_2^2(\Omega) \quad (1.12)$$

При этом для соответствующей подпоследовательности $\{h_k\}$ справедливы соотношения (1.9) и (1.10).

Покажем, что $w^* = w(h^*)$. Для $\forall u \in V$ представим форму $a_{h_k}(w_k, u)$ в виде алгебраической суммы семи интегралов

$$\begin{aligned} a_{h_k}(w_k, u) &= \sum_{i=1}^7 a_{h_k}^i(w_k, u), \quad a_{h_k}^1(w_k, u) = \iint_{\Omega} D(h_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy = \\ &= \left(D(h_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Аналогично можно выписать остальные шесть интегралов. Рассмотрим выражение

$$\left(D(h_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}, D(h_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

С учетом (1.10), используя теорему Лебега [3], нетрудно убедиться, что $D(h_k) \partial^2 u / \partial x^2 \rightarrow D(h^*) \partial^2 u / \partial x^2$ сильно в $L_2(\Omega)$; а так как $\partial^2 w_k / \partial x^2 \rightarrow \partial^2 w^* / \partial x^2$ слабо в $L_2(\Omega)$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}, D(h_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}, D(h_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{h_k}^1(w_k, u) = a_{h^*}^1(w^*, u)$. Аналогично устанавливается, что

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{h_k}^i(w_k, u) = a_{h^*}^i(w^*, u)$ для $i=2, 3, \dots, 7$. Из последних соотношений

следует, что $|a_{h_k}(w_k, u) - a_{h^*}(w^*, u)| \rightarrow 0, \forall u \in V$, но, согласно (1.1), $a_{h_k}(w_k, u) = (g, u), \forall u \in V$ и, значит, $a_{h^*}(w^*, u) = (g, u), \forall u \in V$. Таким образом, $w^* = w(h^*)$.

Из (1.8), (1.10) с учетом теоремы Лебега получим

$$f(h^*) = \inf_{h \in C_g} f(h) \quad (1.14)$$

Остается показать, что $h^* \in C_g$. Так как $h_k \rightarrow h^*$ почти всюду в Ω , то на основании первого неравенства (1.4) найдем $h_1 \leq h^*(x, y) \leq h_2$.

Из условия (1.9) по теореме [4] о слабой полунепрерывности нормы имеем $\|h^*\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|h_k\|_{W_p^1(\Omega)}$.

Сравнивая второе неравенство из (1.4) с последним, найдем $\|h^*\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \|h_2\|$. Из условия (1.5) с учетом (1.9), (1.12) получим

$$\Psi_k(h^*, w^*) - c_k \leq 0 \quad (k=1, 2, \dots, t)$$

Таким образом, $h^* \in C_g$ и теорема доказана. Отметим, что из теоремы 1 следует существование решения задачи (1.7); но решение этой задачи, вообще говоря, может быть не единственным.

В связи с численным решением рассматриваемой задачи оптимального управления возникает вопрос об аппроксимации бесконечномерной задачи (1.7) последовательностью задач нелинейного программирования.

Пусть h_N — элемент конечномерного пространства $H_N \subset W_p^1(\Omega)$ и $C_g^N = C_g \cap H_N$. Задача об отыскании функции h_N^* , для которой

$$h_N^* \in C_g^N, \quad f(h_N^*) = \int_{\Omega} h_N^* d\Omega = \min_{h_N \in C_g^N} f(h_N) \quad (1.15)$$

является конечномерным аналогом задачи (1.7).

Теорема 2. Пусть $\{H_N\}$ — последовательность пространств, принадлежащих $W_p^1(\Omega)$, $p > 2$ и удовлетворяющих условию полноты

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{h_N \in H_N} \|h_N - h\|_{W_p^1(\Omega)} \right\} = 0, \quad \forall h \in W_p^1(\Omega) \quad (1.16)$$

Если существует последовательность $\{h_k\} \subset C_g^\circ$ (C_g° — внутренность C_g), такая, что $h_k \rightarrow h^*$ в $W_p^1(\Omega)$, то для последовательности $\{h_N\}$ справедливо соотношение $\lim_{N \rightarrow \infty} f(h_N^*) = f(h^*) = \inf_{h \in C_g} f(h)$. При этом из последовательности $\{h_N^*\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h_k^*\}$, для которой $h_k^* \rightarrow h^{0*}$ слабо в $W_p^1(\Omega)$ и $f(h^{0*}) = \inf_{h \in C_g} f(h)$.

Доказательство. По условию теоремы для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует элемент $h_m \in C_g^\circ$, для которого

$$\|h_m - h^*\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \varepsilon_1$$

Так как $h_m \in C_g^\circ$, то найдется шар радиуса ε_2 с центром в точке h_m , все точки которого лежат в C_g° . В силу условия (1.16) для достаточно большого N существует элемент $h_N^\vee \in H_N(\Omega)$, такой, что $\|h_N^\vee - h_m\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \varepsilon_3 < \varepsilon_2$. Следовательно, $h_N^\vee \in C_g \cap H_N(\Omega)$. При этом $\|h^* - h_N^\vee\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \|h^* - h_m\|_{W_p^1(\Omega)} + \|h_m - h_N^\vee\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon$. Таким образом, можно построить последовательность $\{h_N^\vee\}$, для которой $h_N^\vee \in C_g^N$ и $\lim_{N \rightarrow \infty} \|h_N^\vee - h^*\|_{W_p^1(\Omega)} = 0$.

Так как $f(h)$ — линейный непрерывный в $W_p^1(\Omega)$ функционал, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(h_N^\vee) = f(h^*) = \inf_{h \in C_g} f(h) \quad (1.17)$$

Очевидно, что для последовательности функций $\{h_N^*\}$, решающих задачу (1.15), справедливо неравенство $f(h_N^\vee) \geq f(h_N^*)$. Сравнивая (1.17) с данным неравенством, получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(h_N^*) = \inf_{h \in C_g} f(h) \quad (1.18)$$

т. е. $\{h_N^*\}$ — минимизирующая последовательность элементов из C_g .

Далее, аналогично тому, как делалось при доказательстве теоремы 1, устанавливается, что из последовательности $\{h_N^*\}$ можно выделить подпоследовательность $\{h_k^*\}$, слабо сходящуюся к h^{0*} в $W_p^1(\Omega)$. При этом $f(h^{0*}) = \inf_{h \in C_g} f(h)$.

Если задача (1.7) имеет единственное решение, то $h^{0*} = h^*$, и в этом случае $h_N^* \rightarrow h^*$ слабо в $W_p^1(\Omega)$.

2. Метод штрафных функций и численная реализация задачи оптимизации. Заклучим область Ω в прямоугольник Π со сторонами $2a$ и $2b$. Начало координат поместим в центр прямоугольника. Если Ω — прямоугольная область, то примем $\Omega = \Pi$.

Обозначим через Δx и Δy одномерные сетки

$$\Delta x = \{x_i = ih_x = ia/m\}_{i=-m}^m, \quad \Delta y = \{y_j = jh_y = jb/n\}_{j=-n}^n \quad (2.1)$$

порождающие в области Π двумерную сетку Δ с узлами (x_i, y_j) .

На сетке Δ зададим фундаментальные сплайны

$$B_{ij} = \begin{cases} \left(1 - \left| i - \frac{x}{h_x} \right| \right) \left(1 - \left| j - \frac{y}{h_y} \right| \right) & \text{при } (x, y) \in R_{ij} \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin R_{ij} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$R_{ij} = \{ (x, y) \mid (i-1)h_x \leq x \leq (i+1)h_x, \quad (j-1)h_y \leq y \leq (j+1)h_y \}$$

Пусть $H_N(\Pi)$ — N -мерное пространство управлений

$$H_N(\Pi) = \left\{ h_N(x, y) \mid h_N(x, y) = \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-n}^n h_{ij} B_{ij}(x, y), \quad N = (2m+1)(2n+1) \right\}$$

При этом последовательность $\{H_N(\Pi)\}$ удовлетворяет условию полноты в $W_p^1(\Pi)$, если $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N = 0$, где $\rho_N = \max(h_x, h_y)$.

Обозначим через $H_N(\Omega)$ пространство управлений, полученное сужением элементов из $H_N(\Pi)$ на Ω . Коэффициенты вектора толщины $\mathbf{h} = \{h_{ij}\}$, входящие в (2.3), рассматриваем как компоненты вектора толщины \mathbf{h} . Функция $\mathbf{h} \rightarrow h_N(x, y)$ является отображением R^N на $H_N(\Omega)$. Обозначим ее через Q , т. е. $h_N = Q(\mathbf{h})$, где h_N определяется выражением (2.3). Пусть далее $f_1(\mathbf{h}) = f(Q(\mathbf{h}))$.

С учетом последнего замечания задачу (1.15) можно формулировать как задачу нелинейного программирования. Требуется найти вектор \mathbf{h}^* , для которого

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^* \in R_g^N, \quad f_1(\mathbf{h}^*) &= \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-n}^n h_{ij}^* \iint_{\Omega} B_{ij}(x, y) dx dy = \\ &= \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-n}^n h_{ij}^* c_{ij} = \inf_{\mathbf{h} \in R_g^N} f_1(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

При этом допустимое множество R_g^N задается в виде

$$R_g^N = \{ \mathbf{h} \mid \mathbf{h} = \{h_{ij}\} \in R^N, \quad h_1 \leq h_{ij} \leq h_2, \quad N = (2m+1)(2n+1), \quad (2.5) \}$$

$$\Psi_k[Q(\mathbf{h}), w(Q(\mathbf{h}))] = \sigma_x^2(\mathbf{h}, z_k) + \sigma_y^2(\mathbf{h}, z_k) + \frac{\sigma_b^2}{\tau^2} \sigma_{xy}^2(\mathbf{h}, z_k) \leq \sigma_b^2 \quad (k=1, 2, \dots, p)$$

Здесь $z_k = (x_k, y_k)$ — некоторые точки из Ω ; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ — средние значения напряжений по области Δ_k , включающей точку z_k и имеющей положительную меру; σ_b и τ — пределы прочности материала пластинки при растяжении и сдвиге

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(\mathbf{h}, z_k) &= \frac{1}{S(\Delta_k)} \iint_{\Delta_k} \left[\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w(\mathbf{h})}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(\mathbf{h})}{\partial y^2} \right) \right]^2 dx dy \\ \sigma_y^2(\mathbf{h}, z_k) &= \frac{1}{S(\Delta_k)} \iint_{\Delta_k} \left[\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w(\mathbf{h})}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(\mathbf{h})}{\partial x^2} \right) \right]^2 dx dy \\ \sigma_{xy}^2(\mathbf{h}, z_k) &= \frac{1}{S(\Delta_k)} \iint_{\Delta_k} \left[\frac{Eh}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 w(\mathbf{h})}{\partial x \partial y} \right]^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Можно показать, что для функционалов $\Psi_k(\mathbf{h}, w(\mathbf{h}))$, входящих в (2.5), выполняется условие (1.5).

Хотя по физическому смыслу все $h_{ij} > 0$, формально придется рассматривать случай, когда $h_{ij} < 0$. В связи с этим введем функцию

$$f^\circ(\mathbf{h}) = \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-n}^n h_{ij} c_{ij}^\circ, \quad c_{ij}^\circ = c_{ij}, \text{ если } h_{ij} \geq 0, \quad c_{ij}^\circ = -c_{ij}, \text{ если } h_{ij} < 0 \quad (2.7)$$

Функция $f^\circ(\mathbf{h})$ является продолжением $f_1(\mathbf{h})$ на всю область R^N и удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_{R^N} \rightarrow \infty} f^\circ(\mathbf{h}) = \infty \quad (2.8)$$

Задача (2.4) с помощью метода функций штрафа [5] сводится к задаче безусловной минимизации во всей области R^N .

Последовательность штрафных функций $\{P_i(\mathbf{h})\}_{i=0}^\infty$ строится по закону

$$p_i(\mathbf{h}) = \frac{1}{r_i} \left(\sum_{k=1}^p \eta_k(\mathbf{h}) + \sum_{l=-m}^m \sum_{j=-n}^n q_{lj}(\mathbf{h}) \right) \quad (2.9)$$

$$\eta_k(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Psi_k[Q(\mathbf{h}), w(Q(\mathbf{h}))] \leq \sigma_b^2 \\ [\Psi_k[Q(\mathbf{h}), w(Q(\mathbf{h}))] - \sigma_b^2]^2, & \text{если } \Psi_k > \sigma_b^2 \end{cases} \quad (k=1, 2, \dots, l)$$

$$q_{lj}(\mathbf{h}) = 0, \text{ если } h_l < h_{lj} < h_2; \quad q_{lj}(\mathbf{h}) = (h_{lj} - h_2)^2, \text{ если } h_{lj} \geq h_2 \quad (2.10)$$

$$q_{lj}(\mathbf{h}) = (h_{lj} - h_l)^2, \text{ если } h_{lj} \leq h_l; \quad -m \leq l \leq m, \quad -n \leq j \leq n$$

При построении $p_i(\mathbf{h})$ используется числовая последовательность $\{r_i\}_{i=0}^\infty$, для которой $r_i > 0$, $r_i > r_{i+1}$ для всех $0 \leq i < \infty$, $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Структура функций $\eta_k(\mathbf{h})$ и $q_{lj}(\mathbf{h})$, а также соотношение (2.5) обеспечивает выполнение для функций $p_i(\mathbf{h})$ условий

$$p_i(\mathbf{h}) = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in R_g^N, \quad p_i(\mathbf{h}) > 0, \quad \forall \mathbf{h} \notin R_g^N \quad (2.11)$$

$$p_{i+1}(\mathbf{h}) > p_i(\mathbf{h}), \text{ если } \mathbf{h} \notin R_g^N, \quad p_i(\mathbf{h}) \rightarrow \infty \text{ при } i \rightarrow \infty, \quad \forall \mathbf{h} \notin R_g^N$$

Можно показать, что функция $\mathbf{h} \rightarrow p_i(\mathbf{h})$ — непрерывное отображение R^N в R .

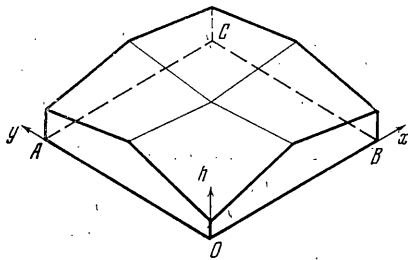
С учетом последнего замечания, на основании соотношений (2.8), (2.11) следует, что последовательность решений безусловных задач минимизации

$$F_i(\mathbf{h}^*) = \min \{f^\circ(\mathbf{h}) + p_i(\mathbf{h})\} \quad (2.12)$$

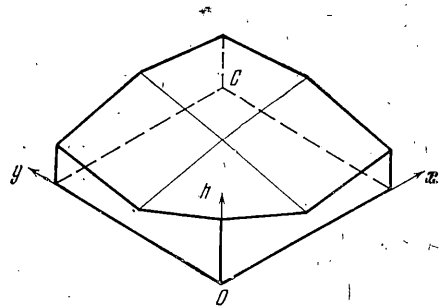
сходится к решению задачи (2.4) [5]. Последняя решалась методом сопряженных градиентов [5].

При реализации итерационной схемы решения задачи (2.12), варьируя толщину \mathbf{h} , приходится многократно решать прямую (неоптимальную) задачу изгиба пластины переменной толщины (задачу (1.1)). Приближенное решение задачи (1.1) строится в конечномерном пространстве двумерных кубических полиномиальных сплайнов по методике, изложенной в [2].

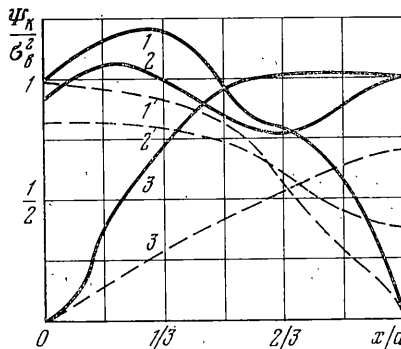
В качестве примера рассматривались задачи о нахождении оптимальных форм квадратных в плане пластин переменной толщины под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности g . При этом рассматривались два вида граничных условий: жесткозашемленный (задача А) и шарнирно-опертый контур (задача В). При построении функции $h_N(x, y)$ использовались сетки $\Delta x, \Delta y$ с параметрами $m=n=2$.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Кроме того, предполагалось, что в компонентах вектора \mathbf{h} имеет место диагональная симметрия, т. е. $h_{13} = h_{31}$.

На основании проведенного численного анализа установлено, что целевая функция $F(\mathbf{h})$ (задача 2.12) является невыпуклой. Это приводит к существованию множества локальных минимумов и соответственно оптимальных форм пластины.

Ниже в безразмерном виде приведены компоненты вектора толщины для двух существенно различных оптимальных форм пластины с заземленным и шарнирно-опертым контурами, где $\xi_{ij} = h_{ij}/h_0$; h_0 — толщина пластины постоянной толщины, у которой в наиболее напряженных точках z_k $\Psi_k = \sigma_b^2$; N_1 — тип задачи; N_2 — номер варианта; N_3 — весовая экономия в процентах.

N_1	N_2	ξ_{00}	ξ_{01}	ξ_{02}	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{22}	N_3
A	I	0.35	0.97	0.61	0.72	1.00	0.70	17
	II	0.35	0.35	0.35	1.24	1.24	1.34	12
B	I	1.35	0.49	0.78	0.95	1.25	1.06	27
	II	1.49	1.51	0.76	0.80	0.80	1.16	14

На фиг. 1, 2 показано распределение толщин в оптимальных пластинах, соответствующих первым вариантам задач A и B. При этом в силу симметрии на этих фигурах изображена четверть пластины.

Расчеты показывают, что в случае заземленного контура (фиг. 1) толщина оптимальной пластины в окрестности прямых, соединяющих точки A и B, O и C, сравнительно небольшая и минимум достигается в центре (в точке O). Материал пластины концентрируется вне этих зон. При этом максимум толщины достигается в точках, расположенных на середине сторон AC и CB.

В случае шарнирного опирания (фиг. 2) для полученной оптимальной формы центр пластины (окрестность точки O) является наиболее утолщенным местом. Материал концентрируется в окрестности диагонали OC.

На фиг. 3 сплошными линиями представлены эпюры распределения напряжений в оптимальной пластине, изображенной на фиг. 2. Для сравнения штриховыми линиями представлены напряжения в пластине постоянной толщины h_0 . Кривые 1, 2, 3 определяют распределение напряжений (Ψ_k/σ_b^2) вдоль прямых $y=0$, $y=a/2$ и $y=a$.

Из этих графиков видно, что пластины постоянной толщины с точки зрения предельно возможных напряжений недогружены. Это приводит к неоправданному утяжелению конструкции. В оптимальных пластинах этот вопрос решается более рационально, следствием чего является весовая экономия. Аналогичная картина наблюдается для пластины с защемленным контуром.

Следует отметить, что при решении оптимальной задачи проверка ограничений (2.5) по допустимым напряжениям проводится в конечном числе точек. Этим объясняется наблюдаемый на фиг. 3 незначительный выход напряжений за область ограничений. Как указано, для решения прямой задачи используются сплайны и в силу их экстремальных свойств указанное отклонение будет минимальным по сравнению с любой другой системой базисных функций. При увеличении числа проверяемых точек это превышение допустимых напряжений будет стремиться к нулю.

Авторы благодарят К. А. Лурье за высказанные замечания и полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 3 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
2. Литвинов В. Г. Задача изгиба пластин переменной толщины. Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 5.
3. Шварц Л. Анализ, т. 1. М., «Мир», 1972.
4. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., «Наука», 1972.
5. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М., «Мир», 1974.