МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1980

УДК 539.3:681.3.097

РАСЧЕТ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРУБЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Я. Г. САВУЛА, Г. А. ШИНКАРЕНКО

(Львов)

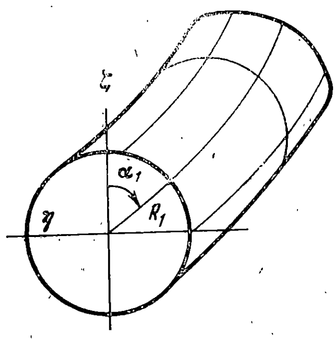
Рассматривается задача об упругом равновесии трубчатой оболочки с криволинейной плоской осью под воздействием внешней поверхностной нагрузки. Используются уравнения тонких упругих оболочек Кирхгофа – Лява, представленные в матричной записи.

Предлагается вариант метода конечных элементов, построенный на разложении искомых перемещений в виде отрезков рядов Фурье по одной переменной и аппроксимации кусочно-эрмитовыми полиномами по другой. Геометрические характеристики срединной поверхности оболочки заменяются в пределах каждого элемента первыми членами их разложений в ряды Тейлора.

Дан пример расчета трубы с эллиптической осью.

1. Пусть срединная поверхность криволинейной трубчатой оболочки (фиг. 1) – резная поверхность [1, 2] – образуется «движением» окружности радиуса R_1 $(\eta=-R_1\sin\alpha_1,\ \ \zeta=R_1\cos\alpha_1,\ \ 0\leqslant\alpha_1<2\pi)$ по произвольной плоской направляющей: $x=R_2\chi(\alpha_2)$, $y=R_2\xi(\alpha_2)$, $\alpha_2^{\circ}\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_2^{e}$.

Координатные линии $\alpha_1=\mathrm{const}$, $\alpha_2=\mathrm{const}$ образованной поверхности являются линиями главных кривизн. Для ее коэффициентов Ляме A_1, A_2 и радиусов главных кривизн r_1, r_2 получаем выражения



Фиг. 1

$$A_1=R_1,\quad A_2=R_2t(\alpha_1,\alpha_2),\quad r_1=R_1$$

$$r_2=R_2\frac{t(\alpha_1,\alpha_2)}{\tau_2(\alpha_2)\sin\alpha_1},\quad \tau_2(\alpha_2)=\frac{\xi''\chi'-\xi'\chi''}{(\chi')^2+(\xi')^2}$$

$$t(\alpha_1,\alpha_2)=[(\chi')^2+(\xi')^2]^{1/2}\left\{1+\right.$$

$$\left.+\sin\alpha_1\frac{R_1}{R_2}\frac{\xi''\chi'-\xi'\chi''}{[(\chi')^2+(\xi')^2]^{3/2}}\right\}$$

Соотношения Гаусса – Кодацци для рассматриваемой трубчатой поверхности приводятся к формуле $\partial t/\partial\alpha_1=(R_1/R_2)\tau_2\cos\alpha_1$.

Предположим, как обычно, что срединная поверхность оболочки не содержит особых точек, т. е.

$$t(\alpha_1,\alpha_2)\neq0,\qquad \alpha_1,\alpha_2\in\Omega,\qquad \Omega=\{0\leqslant\alpha_1<2\pi,\qquad \alpha_2^{\circ}\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_2^{e}\}$$

В вариационной постановке задача о линейной упругой деформации оболочки эквивалентна задаче о минимуме квадратичного функционала [3, 4]:

$$L(\mathbf{U})=\iint\limits_{\Omega}[(C\mathbf{U})^T BC\mathbf{U}-2\mathbf{U}^T\mathbf{P}]\,t\,d\alpha_1 d\alpha_2,\qquad \mathbf{P}=\left(\frac{p_1}{E},\frac{p_2}{E},\frac{p_n}{E}\right)^T \tag{1.1}$$

$$C=\delta\left\|\begin{matrix} \partial_1 & 0 & 1\\ bc\tau_2 & b\partial_2 & bs\tau_2\\ b\partial_2 & \partial_1-bc\tau_2 & 0\\ \partial_1 & 0 & -\partial_{11}\\ bc\tau_2 & bs\partial_2 b\tau_2 & -b(\partial_2 b\partial_2-c\tau_2\partial_1)\\ 2b\partial_2 & 2bs\tau_2(\partial_1-bc\tau_2) & -2b(\partial_{12}-bc\tau_2\partial_1)\end{matrix}\right\|$$

$$\delta=\frac{h}{R_1},\qquad \partial_i=\frac{\partial}{\partial\alpha_i},\qquad \partial_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_i\,\partial\alpha_j},\qquad b=\frac{R_1}{R_2 t},\qquad s=\sin\alpha_1,\ c=\cos\alpha_1;$$

$$B=\frac{1}{1+\nu}\left\|\begin{matrix} \frac{1}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{1}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^2}{12(1-\nu)} & \frac{\nu\delta^2}{12(1-\nu)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu\delta^2}{12(1-\nu)} & \frac{\delta^2}{12(1-\nu)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta^2}{24}\end{matrix}\right\|$$

на множестве вектор-функций $\mathbf{U}=(u/h,\ v/h,\ w/h)^T$, $u,\ v\in W_2^1(\Omega)$, $w\in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих на краях $\alpha_2=\text{const}$ геометрическим граничным условиям. Здесь h — толщина оболочки, C — матрица дифференциальных операторов, B — квадратная матрица с постоянными коэффициентами, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, $\mathbf{P}$ — вектор поверхностной нагрузки. Усилия $\boldsymbol{\sigma}=(Eh)^{-1}(T_1,\ T_2,\ S,\ M_1/\delta h,\ M_2/\delta h,\ H/\delta h)^T$, возникающие в оболочке, вычисляются по формуле $\sigma=B\varepsilon$, где вектор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \omega,\ R_1\varkappa_1,\ R_1\varkappa_2,\ 2R_1\tau)^T$ связан с перемещениями $\mathbf{U}$ соотношением $\boldsymbol{\varepsilon}=C\mathbf{U}$.

2. Разделим область Ω на полосы $\Omega_i=\{0\leqslant\alpha_1<2\pi,\ \alpha_2^{i-1}\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_2^i\}$ — конечные элементы. Считая ширину $h_{i,\,i-1}=\alpha_2^i-\alpha_2^{i-1}$ элемента малой, заменим на Ω_i функции $t(\alpha_1,\alpha_2)$, $\tau_2(\alpha_2)$, $\mathbf{P}(\alpha_1,\alpha_2)$ первыми членами их разложений в ряды Тейлора по переменной α_2, т. е.: $t(\alpha_1,\alpha_2)=t(\alpha_1,\alpha_2^*)$, $\tau_2(\alpha_2)=\tau_2(\alpha_2^*)$, $\mathbf{P}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{P}(\alpha_1,\alpha_2^*)$, $\alpha_1,\alpha_2\in\Omega_i$, $\alpha_2^*\in[\alpha_2^{i-1},\alpha_2^i]$.

В силу принятого допущения матрицу C на Ω_i можно записать в виде произведения матриц

$$C=AD_1D_2 \tag{2.1}$$

$$A=\delta\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ bc\tau_2 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & bs\tau_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b & 0 & -bc\tau_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ bc\tau_2 & 0 & 0 & 0 & b^2s\tau_2 & 0 & 0 & 0 & -b^2 & -bc\tau_2 & 0 & 0\\ 0 & 2b & 0 & -2b^2sc\tau_2^2 & 0 & 2bs\tau_2 & 0 & 2b^2c\tau_2 & 0 & 0 & 0 & -2b\end{matrix}\right\|$$

$$D_i=\begin{Vmatrix} d_i & 0 & 0\\ 0 & d_i & 0\\ 0 & 0 & d_{ii}\end{Vmatrix}\ (i=1,2),\quad d_1=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \partial_1 & 0\end{Vmatrix}$$

$$d_{11}{}^T=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & \partial_1 & \partial_{11} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \partial_1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad d_2=\begin{Vmatrix}1\\ \partial_2\end{Vmatrix},\quad d_{22}=\begin{Vmatrix}1\\ \partial_2\\ \partial_{22}\end{Vmatrix}$$

Решение задачи о минимуме квадратичного функционала (1.1) представим в виде

$$\mathbf{U}=\sum_{m=0}^{M}\varphi_m(\alpha_1)\psi_m(\alpha_2) \tag{2.2}$$

$\varphi_m(\alpha_1)=\cos{}^1/_2 m\alpha_1$ при $(-1)^m>0$; $\varphi_m(\alpha_1)=\sin{}^1/_2(m+1)\alpha_1$ при $(-1)^m<0$ где $\psi_m(\alpha_2)$ — вектор-функции, которые будут определены ниже. Подставляя (2.2) в функционал (1.1) и учитывая соотношение (2.1), получаем

$$L(\mathbf{U})=\sum_{i=1}^{e}\Bigl\{\sum_{m,\,n=0}^{M}\int_{\alpha_2^{i-1}}^{\alpha_2^i}(D_2\psi_m)^T B_2D_2\psi_n d\alpha_2-$$
$$-2\sum_{m=0}^{M}\int_{\alpha_2^{i-1}}^{\alpha_2^i}\psi_m^T\int_0^{2\pi}\varphi_m\mathbf{P}t\,d\alpha_1\,d\alpha_2\Bigr\} \tag{2.3}$$

$$B_2=\int_0^{2\pi}(D_1\varphi_m)^T A^T BAD_1\varphi_n t d\alpha_1$$

Таким образом, для решения задачи о минимуме квадратичного функционала (1.1) можно построить одномерные кусочно-полиномиальные аппроксимации функций $\psi_m(\alpha_2)$ на заданной совокупности узловых точек $\{\alpha_2{}^0, \alpha_2{}^1, \ldots, \alpha_2^{e-1}, \alpha_2{}^e\}$. В частности, следующая аппроксимация функции $\psi_m(\alpha_2)$ на $[\alpha_2^{i-1}, \alpha_2{}^i]$ не выводит из области определения функционала

$$\psi_m(\alpha_2)=N^i\mathbf{q}_m{}^i \tag{2.4}$$

$$N^i=(N_{i-1}, N_i),\ N_\lambda=\begin{Vmatrix}H_{\lambda0} & 0 & 0 & 0\\ 0 & H_{\lambda0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & H_{\lambda1} & H_{\lambda2}\end{Vmatrix}(\lambda=i-1,\,i),\quad H_{\lambda0}=\frac{1}{h_{\lambda\theta}}(\alpha_2-\alpha\theta_2),$$

$$H_{\lambda1}=H_{\lambda0}^2(1+2H_{\theta0}),\ H_{\lambda2}=H_{\lambda0}^2H_{\theta0}h_{\theta\lambda},$$

$$\mathbf{q}_m^i=(\mathbf{q}_{mi-1}^T, \mathbf{q}_{mi}^T)^T,\ \theta=i \text{ при } \lambda=i-1,\ \theta=i-1 \text{ при } \lambda=i$$

Здесь $\mathbf{q}_{m\lambda}$ — вектор неизвестных узловых коэффициентов в разложениях вида (2.2) функций u/h, v/h, w/h, $\partial_2 w/h$ при $\alpha_2=\alpha_2{}^\lambda$.

На множестве решений (2.2), (2.4) функционал (1.1) превращается в квадратичную форму

$$L=\sum_{i=1}^{e}\sum_{m,\,n=0}^{M}q_m^{iT}(K_{mn}^i\mathbf{q}_n^i-2\mathbf{F}_m^i),\quad K_{mn}^i=\int_{\alpha_2^{i-1}}^{\alpha_2^i}(D_2N^i)^T B_2D_2N^i\,d\alpha_2 \tag{2.5}$$

Отсюда находим, что значения параметров $\mathbf{q}_m{}^i$, доставляющих минимум квадратичной форме (2.5), являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{e}\sum_{n=0}^{M}(K_{mn}{}^{i}\mathbf{q}_{n}{}^{i}-\mathbf{F}_{m}{}^{i})=0 \qquad (m=0,1\ldots,M)$$

Учитывая блочную структуру матриц D_2, N^i, B_2 при их перемножении, получаем выражения для коэффициентов $k_{\alpha\beta}$, f_α $(\alpha,\ \beta=\overline{1,\ 4})$ блоков $K^{\lambda\theta}$, $\mathbf{F}^{\lambda}$ $(\lambda,\ \theta=i-1,\ i)$ матриц $K_{mn}{}^{i}$, $\mathbf{F}_{m}{}^{i}$ соответственно

$$k_{11}=\varkappa\left\{(g+f)\left[\tau_2{}^2S_{00}^{120}+\nu\tau_2(S_{10}^{010}+S_{01}^{010})+S_{11}^{-100}\right]J_{00}^{00}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\delta^2}{3}\right)S_{00}^{100}J_{11}^{00}\right\}$$

$$k_{12}=\varkappa\left\{\left[(\nu S_{10}^{000}+\tau_2S_{00}^{110})g+(\nu S_{10}^{101}+\tau_2S_{00}^{211})\tau_2f\right]J_{01}^{00}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left[S_{01}^{000}-\left(S_{00}^{110}-\frac{\delta^2}{3}S_{01}^{101}\right)\tau_2-\frac{\delta^2}{3}\tau_2{}^2S_{00}^{211}\right]J_{10}^{00}\right\}$$

$$k_{22}=\varkappa\left\{\frac{1}{2}\left[S_{11}^{-100}-\tau_2(S_{10}^{010}+S_{01}^{010})+\tau_2{}^2\left(S_{00}^{120}+\frac{\delta^2}{3}S_{11}^{120}\right)-\frac{\delta^2}{3}\tau_2{}^3(S_{01}^{212}+S_{10}^{212})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\delta^2}{3}\tau_2{}^4S_{00}^{322}\right]J_{00}^{00}+(gS_{00}^{100}+f\tau_2{}^2S_{00}^{302})J_{11}^{00}\right\}$$

$$k_{1,2+j}=\varkappa\left\{\left[(S_{10}^{-100}+\nu\tau_2(S_{00}^{010}+S_{10}^{001})+\tau_2{}^2S_{00}^{111})g-(S_{12}^{-100}+\nu\tau_2(S_{02}^{010}+S_{11}^{010})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\tau_2{}^2S_{01}^{120})f\right]J_{00}^{0j}-\frac{\delta^2}{6}(S_{01}^{100}-\tau_2S_{00}^{210})J_{11}^{0j}-f(\nu S_{10}^{100}+\tau_2S_{00}^{210})J_{02}^{0j}\right\}$$

$$k_{2,2+j}=\varkappa\left\{\left[(\nu S_{00}^{000}+\tau_2S_{00}^{101})g-(\nu S_{02}^{101}+\tau_2S_{01}^{211})f\tau_2\right]J_{10}^{0j}-\right.$$
$$\left.-\frac{\delta^2}{6}\tau_2\left[S_{11}^{101}-\tau_2(S_{10}^{211}+S_{01}^{211})+\tau_2{}^2S_{00}^{321}\right]J_{01}^{0j}-f\tau_2S_{00}^{301}J_{12}^{0j}\right\}$$

$$k_{2+l,2+j}=\varkappa\left\{\left[(S_{00}^{-100}+2\nu\tau_2S_{00}^{001}+\tau_2{}^2S_{00}^{102})g+(S_{22}^{-100}+\nu\tau_2(S_{21}^{010}+S_{12}^{010})+\tau_2{}^2S_{11}^{120})f\right]J_{00}^{lj}+\right.$$
$$+f(\nu S_{20}^{100}+\tau_2S_{10}^{210})J_{02}^{lj}+f(\nu S_{02}^{100}+\tau_2S_{01}^{210})J_{20}^{lj}+$$
$$\left.+\frac{\delta^2}{6}\left[S_{11}^{100}-\tau_2(S_{01}^{210}+S_{10}^{210})+\tau_2{}^2S_{00}^{320}\right]J_{11}^{lj}+fS_{00}^{300}J_{22}^{lj}\right\}$$

$$f_l=\int\limits_{\alpha_2^{i-1}}^{\alpha_2{}^i}H_{\lambda0}\,d\alpha_2\int\limits_0^{2\pi}\varphi_mp_l/Et\,d\alpha_1,\qquad f_{2+l}=\int\limits_{\alpha_2^{i-1}}^{\alpha_2{}^i}H_{\lambda l}\,d\alpha_2\int\limits_0^{2\pi}\varphi_mp_n/Et\,d\alpha_1$$

$$g=\frac{1}{1-\nu},\qquad f=\frac{\delta^2}{12(1-\nu)},\qquad \varkappa=\frac{R_1}{R_2}\frac{\delta^2}{1+\nu}\qquad (l=1,2)$$

$$J_{pq}^{\rho\mu}=\int\limits_{\alpha_2^{i-1}}^{\alpha_2{}^i}\frac{d^pH_{\lambda\rho}}{d\alpha_2{}^p}\frac{d^qH_{\theta\mu}}{d\alpha_2{}^q}\,d\alpha_2,\qquad S_{pq}^{\rho\mu\theta}=\int\limits_0^{2\pi}\cos^\mu\alpha_1\sin^\theta\alpha_1b^\rho\frac{d^p\varphi_m}{d\alpha_1{}^p}\frac{d^q\varphi_n}{d\alpha_1{}^q}\,d\alpha_1$$

Коэффициенты $k_{\beta\alpha}(\beta>\alpha)$ вычисляются по формулам для $k_{\alpha\beta}$, в которых произведены циклические замены λ, θ и m, n.

Интегралы $J_{pq}^{\rho\mu}$, входящие в формулы для коэффициентов $k_{\alpha\beta}$, можно вычислить, используя соотношение

$$\int\limits_{\alpha_2^{i-1}}^{\alpha_2^{i}} (\alpha_2-\alpha_2^{i-1})^{\rho}(\alpha_2-\alpha_2^{i})^{\mu}\,d\alpha_2=(-1)^{\mu}\frac{\rho!\,\mu!}{(\rho+\mu+1)!}h_{i,\,i-1}^{\rho+\mu+1}$$

Применяя формулы преобразования тригонометрических функций, выразим интегралы $S_{pq}^{\rho\mu\theta}$ через интегралы следующих двух типов:

$$S_1=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin a\alpha_1}{(1+\gamma\sin\alpha_1)^{\rho}}d\alpha_1,\qquad S_2=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos a\alpha_1}{(1+\gamma\sin\alpha_1)^{\rho}}d\alpha_1$$

$$\gamma=\frac{R_1}{R_2}\frac{\xi''\chi'-\xi'\chi''}{[(\chi')^2+(\xi')^2]^{3/2}}<1$$

Путем несложных преобразований находим

$$S_1=0,\quad (-1)^a\geqslant 0$$

$$S_1=(-1)^{(a-1)/2}2\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{(1+\gamma\cos\alpha)^{\rho}}-\frac{1}{(1-\gamma\cos\alpha)^{\rho}}\right]\cos a\alpha d\alpha,\qquad (-1)^a<0$$

$$S_2=0,\quad (-1)^a<0 \tag{2.6}$$

$$S_2(-1)^{a/2}2\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{(1+\gamma\cos\alpha)^{\rho}}+\frac{1}{(1-\gamma\cos\alpha)^{\rho}}\right]\cos a\alpha d\alpha,\qquad (-1)^a\geqslant 0$$

Интегралы в формулах (2.6), как показали численные эксперименты, с достаточной точностью можно вычислять по квадратурным формулам Гаусса, применяя их на промежутках между нулями подынтегральных функций.

3. По описанному методу была составлена программа на языке АЛГОЛ-60 для транслятора ТА2М ЭВМ М222.

Рассмотрим пример расчета напряженно-деформируемого состояния замкнутой трубчатой оболочки с эллиптической осью

$$\chi=(1+\varepsilon)\frac{\cos\alpha_2}{(\cos^2\alpha_2+\varepsilon_1^2\sin^2\alpha_2)^{1/2}},\qquad \xi=(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon_1\sin\alpha_2}{(\cos^2\alpha_2+\varepsilon_1^2\sin^2\alpha_2)^{1/2}}$$

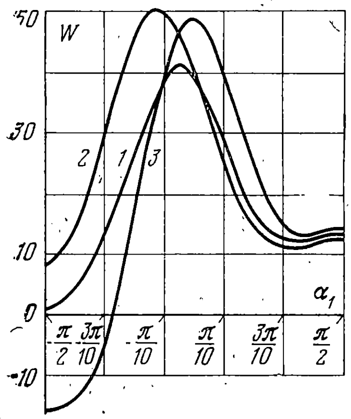
$$\varepsilon_1=(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$$

Оболочка предполагается нагруженной внутренним равномерно распределенным давлением $p_1=p_2=0$, $p_n=\text{const}$. Ввиду симметрии рассчитывалась только четверть трубы $0\leqslant\alpha_2\leqslant\pi/2$, симметричность геометрии оболочки и нагрузки по переменной α_1 позволяют сохранить в разложениях перемещений u, v, w соответственно функции: $\cos\alpha_1$, $\sin 2\alpha_1$, $\cos 3\alpha_1,\ldots$; 1, $\sin\alpha_1$, $\cos 2\alpha_1$, $\sin 3\alpha_1,\ldots$; 1, $\sin\alpha_1$, $\cos 2\alpha_1$, $\sin 3\alpha_1,\ldots$.

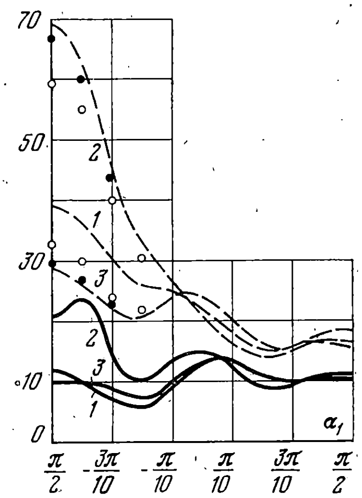
Выбраны следующие значения расчетных параметров $R_2/R_1=1.5$, $h/R_1=0.05$, $E/p_n=10^4$, $\nu=0.3$, $e=5$. Интегралы (2.6) вычислялись по формулам Гаусса шестого порядка; путем повторного пересчета обеспечивался контроль за точностью вычислений, которая не ниже 10^{-3}.

Расчеты показали, что исследование напряженно-деформированного состояния криволинейной трубы с точностью, достаточной для практики, можно производить при $M=9$.

На фиг. 2, 3 приведены графики прогибов $W=wE/(R_1, p_n)$ и полных напряжений σ_1/p_n, σ_2/p_n в торообразной оболочке (кривая *1*, $\varepsilon=0$) и в трубчатой оболочке ($\varepsilon=0.5$) в двух сечениях (кривая *2*, $\alpha_2=0$ и кривая *3*, $\alpha_2=\pi/2$). Сплошными линиями изображены графики прогибов W (фиг. 2)



Фиг. 2



Фиг. 3

и напряжений σ_2/p_n (фиг. 3), пунктирными — напряжения σ_1/p_n (фиг. 3). Расчет произведен при $M=9$. На фиг. 3 приведены также значения σ_1/p_n, соответствующие трем (светлые точки, $e=3$) и четырем (темные точки, $e=4$) элементам в точках, где они не совпадают с кривыми, соответствующими пяти элементам ($e=5$). Дальнейшее увеличение количества элементов не приводит по сравнению с $e=5$ к существенным изменениям результатов.

Эллиптичность направляющей кривой трубчатой оболочки приводит к значительному изменению напряженно-деформированного состояния по сравнению с торообразной оболочкой в зоне отрицательной гауссовой кривизны.

Авторы благодарят Н. П. Флейшмана за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 17 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей, ч. I. М.– Л., Гостехиздат, 1947.
2. *Флейшман Н. П., Савула Я. Г.* Приближенный метод решения уравнений безмоментной теории оболочек. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 3.
3. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек, ч. 1. Изд-во ЛГУ, 1962.
4. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек, ч. 2. Изд-во ЛГУ, 1964.