

ПРИЛОЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ КВАЗИИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ
К РАСЧЕТУ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. В. БУЛЫГИН

(Казань)

Решается ряд конкретных задач расчета оболочек в форме тора и кривой трубы. Отличительная особенность оболочек этого типа заключается в том, что их срединная поверхность, закрепленная жестко с точки зрения теории поверхностей, при определенных граничных условиях может быть геометрически изменяемой в классе квазиизгибаний. Квазиизгибанием в [1] названо такое бесконечно малое изгибание поверхности, которому соответствуют непрерывные тангенциальные смещения, но разрывная на полюсных линиях функция прогиба.

На примерах показывается, что квазиизгибание является естественным обобщением обычного понятия бесконечно малого изгибания поверхности, и теория, построенная на его основе, позволяет не только вскрыть качественные особенности механики тороидальных оболочек, но и дать простые решения ряда важных для практики задач.

1. Будем предполагать, что напряженное состояние тороидальной оболочки расчленяется на основное состояние и простые краевые эффекты. Внешняя нагрузка мыслится достаточно гладкой, и поэтому в области, содержащей одну полюсную линию, можно построить безмоментное решение и использовать в качестве частного интеграла разрешающих уравнений.

Основное однородное напряженное состояние описывается безмоментным и чисто моментными интегралами, а также введенными в [1] интегралами внутреннего краевого эффекта. В данной работе для удобства изложения безмоментный и чисто моментный интегралы включены в интегралы внутреннего краевого эффекта. Последние описываются комплексным вектором U^\sim с компонентами u^\sim, v^\sim, w^\sim , вещественные части которых отождествляются с действительными перемещениями, а мнимые — с функциями напряжений. Тогда, согласно [1], в области, содержащей только одну полюсную линию $\theta=0$, U^\sim может быть представлен в виде

$$U^\sim(\varphi, \theta) = \int_{-1}^1 U_0^\sim(\varphi, \theta + \xi) \psi(\mu \xi) d\xi \quad (1.1)$$

$$k = b/\rho, \quad b = R(0), \quad \psi(x) = (\mu/\pi) \operatorname{Re} e(x), \quad \mu^2 = 12(1-\nu^2)k^2 b^2/h^2$$

$$|z| - |\theta + \xi| = C > 0, \quad C = O(1), \quad e(x) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{3}p^3 + ipx\right) dp$$

где U_0^\sim — квазиизгибание ($\varepsilon_i(U_0^\sim) = 0$ ($i=1, 2, 3$)) с комплексными компонентами $u_0^\sim, v_0^\sim, w_0^\sim$, удовлетворяющее условию при $\theta \rightarrow 0$

$$w_0^\sim = \{(A_* + iB_*) (1/2\pi \operatorname{sign} \theta + i \ln \theta) + C_1 + iC_2\} \sin \alpha_m \varphi \quad (1.2)$$

Здесь A_*, B_*, C_1, C_2 — произвольные постоянные, из которых первая пара соответствует собственно интегралам внутреннего краевого эффекта, а вторая — чисто моментному и безмоментному интегралам; $e(x)$ — функ-

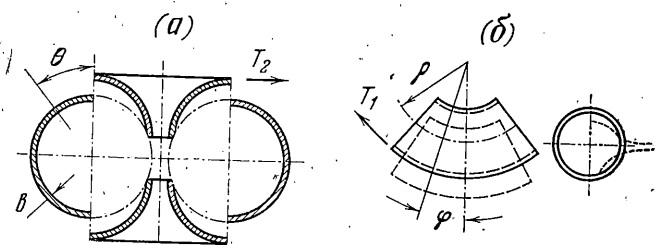
ция Эри; $R(\theta)$ — радиус кривизны меридиана; ρ — радиус геодезической кривизны поллюсной линии; θ, φ — угловые координаты в поперечном и продольных направлениях.

В точках, достаточно удаленных от полюса ($\theta \sim O(1)$), вектор U^\sim асимптотически совпадает с исходным квазиизгибанием

$$U^\sim = U_0^\sim + O(h^{2/3}) \tag{1.3}$$

а в окрестности полюса ему соответствуют интенсивные, но быстро затухающие деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{k}{b\mu} (A_* \operatorname{Re} e'(\mu\theta) + B_* \operatorname{Im} e'(\mu\theta)) \sin \alpha_m \varphi \\ \kappa_2 &= \frac{\mu^2}{b^3} (A_* \operatorname{Im} e'(\mu\theta) + B_* \operatorname{Re} e'(\mu\theta)) \sin \alpha_m \varphi \end{aligned} \tag{1.4}$$



Фиг. 1

2. Простейшими квазиизгибаниями (фиг. 1а, б), которые удовлетворяют условию (1.1) и могут быть использованы в качестве вещественной и мнимой части вектора U_0^\sim , являются следующие системы перемещений [1]:

$$u_1 = 0, \quad v_1 = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < \pi \\ \pi \sin \theta \operatorname{sign} \theta & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}, \quad w_1 = \begin{cases} 0 & 0 < \theta < \pi \\ |\cos \theta| & \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \tag{2.1}$$

$$u_2 = (1/k + \sin \theta) \varphi, \quad v_2 = -\cos \theta / k + \sin \theta \ln \operatorname{tg}^{1/2} \theta \tag{2.2}$$

$$w_2 = 1 + \sin \theta / k + \cos \theta \ln \operatorname{tg}^{1/2} \theta$$

Покажем, что интегралы внутреннего краевого эффекта, построенные на базе этих квазиизгибаний, описывают напряженное состояние, возникающее при растяжении трубчатого компенсатора и при чистом изгибе длинной кривой трубы. Выясним для этого, каким тангенциальным граничным условиям будут соответствовать эти интегралы. Предлагаемые ниже расчеты ведутся с точностью краевых эффектов. Поэтому вопрос о возможных невязках в нетангенциальных граничных условиях здесь не поднимается.

Пусть квазиизгибания (2.1) использованы для построения функций перемещений, а (2.2) — функций напряжений. Примем во внимание формулу (1.3). Тогда нетрудно видеть, что данное решение описывает деформации тороидальной оболочки, разрезанной по внутреннему экватору. Кромки разреза расходятся на величину, равную $v_1(-\pi/2+0) - v_1(-\pi/2, -0) = 2\pi$, под действием сил $T_2 = Ech \kappa_1(u_2, v_2, w_2) = Ech (1/k - 1) b^2$. Отсюда получается известная асимптотическая формула для расхождения кромок трубчатого компенсатора под действием осевой силы P :

$$\delta = Pb / (chE), \quad c = h / \sqrt{12(1 - \nu^2)} \tag{2.3}$$

Поменяем, далее, ролями выражения (2.1), (2.2). Тогда все усилия, моменты, а также перемещения, за исключением компоненты u , будут функциями, периодическими по координате θ и не зависящими от φ . Продольное перемещение $u \approx u_1 = (1/k + \sin \theta)\varphi$ будет линейно изменяться по длине трубы, следуя в поперечном сечении закону плоскости. Такой вид деформации можно отождествить с чистым изгибом кривой трубы. Можно показать, что величина момента внешних сил равна

$$M = \oint T_1 b^2 \sin \theta d\theta \approx 2b^2 \frac{k}{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \theta \operatorname{Re} e'(\mu\theta) d\theta = 2\pi k E b^2 \quad (2.4)$$

Если ввести в рассмотрение коэффициент снижения жесткости кривой трубы по сравнению с прямой K , то для него получится хорошо известная формула Бескина $K = \mu/2$ [2].

3. Рассмотрим отрезок кривой трубы, имеющий сечение, симметричное относительно плоскости экватора, и опирающийся на концевые диафрагмы $\varphi=0$, φ_0 , жесткие только в своей плоскости. Действующая на оболочку нагрузка предполагается разложенной в ряд Фурье на составляющие вида

$$qQ [q_1 \cos \alpha_m \varphi, q_2 \sin \alpha_m \varphi, q_n \sin \alpha_m \varphi], \quad \alpha_m = \pi m \varphi / \varphi_0 \quad (m=1, 2, \dots)$$

и расчет будет проводиться для одного из этих слагаемых.

Под Q понимается нагрузка, условно принятая за единичную, а под константой q — ее параметр. Ограничимся случаем, когда Q симметрична относительно плоскости экватора, так как обратнoсимметричное нагружение исследуется аналогично.

Предположим, что в области $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ в соответствии с граничными условиями на краях $\varphi=0$, φ_0 и числом m построены интегралы внутреннего краевого эффекта (1.1), характеризующиеся перемещениями u , v , w и усилиями S , T_1 , T_2 . Аналогичные компоненты частного безмоментного интеграла неоднородной задачи u° , v° , ... будем считать тоже известными.

Граничные условия на экваториальных линиях из-за симметрии задачи имеют вид

$$v^\circ + v = 0, \quad S^\circ + S = 0, \quad \theta = \pm \pi/2 \quad (3.1)$$

Каких-либо трудностей при удовлетворении этих уравнений не возникает. Однако, чтобы придать конечным результатам предельную простоту и наглядность, целесообразно пойти на некоторые упрощения.

Согласно [1], рассматриваемая оболочка является квазиизгибаемой и должна характеризоваться повышенной степенью деформативности, а именно $[u, v, w] \sim O(q/h^2)$. Исключения составляют случаи нагрузок, ортогональных ко всем возможным квазиизгибаниям, которые будем считать не характерными для таких оболочек и пока оставим их без внимания.

Безмоментному интегралу соответствуют значительно меньшие перемещения $[u^\circ, v^\circ, w^\circ] \sim O(q/h)$. Поэтому, допуская относительную погрешность $O(h)$, их можно вообще не учитывать, а граничные условия $v^\circ + v = 0$, $\theta = \pm \pi/2$ заменить условием $v = 0$. Это предположение позволяет с точностью до постоянного множителя указать форму равновесия оболочки, поскольку та теперь будет описываться перемещениями, относящимися только к интегралам внутреннего краевого эффекта, которые лишь косвенно (через число m и условие симметрии Q) связаны с внешней нагрузкой. Для того чтобы названная система перемещений обладала соответствующими свойствами периодичности и симметрии, необходимо, чтобы такие же свойства имела вещественная часть комплексного квазиизгибания U_0 ,

которую обозначим через $U_0^*[u_0^*, v_0^*, w_0^*]$. Квазиизгибание, удовлетворяющее поставленным требованиям, заведомо существует, и будем считать его построенным.

Для нахождения упоминавшегося неопределенного множителя необходимо рассмотреть статическое условие $S^\circ+S^*=0$, $\theta=\pm\pi/2$. Введем в рассмотрение вспомогательную систему тангенциальных усилий

$$[S^*, T_1^*, T_2^*]=ch[\tau(U_+), \kappa_2(U_+), \kappa_1(U_+)], U_+=\text{Im } U_0^* \quad (3.2)$$

Из соотношения (1.3) следует, что эти усилия при $|\theta|\sim\pi/2$ асимптотически совпадают с S, T_1, T_2 , которые определяются теми же формулами, но по вектору $\text{Im } U^*$. Поэтому граничное условие $S^\circ+S^*=0$ может быть заменено уравнением

$$S^\circ+S^*=0, \theta=\pm\pi/2 \quad (3.3)$$

С другой стороны, усилия S^*, T_1^*, T_2^* , согласно статико-геометрической аналогии, удовлетворяют однородным безмоментным уравнениям равновесия; на полюсной линии $\theta=0$ они претерпевают разрыв, обусловленный нерегулярностью квазиизгибания.

Воспользуемся тем, что для существования безмоментного решения $S^\circ+S^*, T_1^\circ+T_1^*, T_2^\circ+T_2^*$ необходимо, чтобы работа поверхностной и контурной внешней нагрузки на перемещениях возможного изгибания u_0^*, v_0^*, w_0^* была равной нулю [3]. Запишем это условие для области $\theta\in(-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi\in(0, \varphi_0)$, из которой во избежание осложнений, связанных с применением разрывных функций, удалена узкая полоса $\theta\in(-\varepsilon, \varepsilon)$. В силу граничных условий $S^\circ+S^*=0, v_0^*=0$ при $\theta=\pm\pi/2$ и $T_1^\circ+T_1^*=0, v_0^*=0$ при $\varphi=0, \varphi_0$ оно примет вид

$$\{A(S^\circ+S^*)u_0^*+A(T_2^\circ+T_2^*)v_0^*\}|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}+q\left(\int_{-\pi/2}^{-\varepsilon} QU_0^*ABd\theta+\int_{\varepsilon}^{\pi/2} QU_0^*ABd\theta\right)=0 \quad (3.4)$$

где A и B — коэффициенты первой квадратичной формы; вертикальная черта означает разность соответствующих выражений. Переменные здесь и ниже разделены, у функций S°, u_0^*, \dots опущены множители $\sin\alpha_m\varphi, \cos\alpha_m\varphi$.

Принимая во внимание формулы (1.2), (3.2) и осуществляя предельный переход $\varepsilon\rightarrow 0$, приходим к следующему соотношению:

$$\frac{\pi E ch}{R(0)}(A_*^2+B_*^2)-qH=0, \quad H=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} QU_0^*ABd\theta \quad (3.5)$$

Это уравнение решает задачу определения перемещений, например прогиба в точке $\theta_0=-\pi/2$. Учитывая, что, согласно (1.3), $w\approx w_0^*$ при $\theta\sim O(1)$, перепишем это соотношение в следующем виде:

$$w(\theta_0)=\frac{qR_*^3}{\pi Ech}K, \quad K=\frac{R(0)w_0^*(\theta_0)H}{R_*^3(A_*^2+B_*^2)} \quad (3.6)$$

где R_* — характерный (средний) радиус сечения.

Коэффициент K имеет смысл относительной жесткости оболочки и зависит только от ее геометрии.

По прогибу в характерной точке может быть построено все поле перемещений.

Соотношение (3.5) можно трактовать как уравнение баланса энергии. Его можно получить более простым, но менее строгим путем, если принять следующие предположения.

При вычислении деформации оболочки (т. е. первого члена (3.5)) следует считать, что основной вклад в нее вносит внутренний краевой эффект за счет компонент деформации ϵ_1, κ_2 , определяемых формулами (1.4). Заметим, что ϵ_1, κ_2 явно выражаются через постоянные A_*, B_* , характеризующие интенсивность нерегулярностей исходного квазиизгибания $[u_0^*, v_0^*, w_0^*]$.

При определении работы внешних сил заменить действительные перемещения на соответствующие им квазиизгибания, считая, что разница между ними в интегральном смысле невелика.

На основании этих соображений нетрудно показать, что расчет оболочки в такой постановке на нагрузку общего вида сводится к минимизации функционала $U - \Pi$, определенного на множестве допустимых квазиизгибаний, в котором U и Π представляют собой работу внешних сил и энергию деформации, поставленные в соответствие с допустимыми квазиизгибаниями. Такая вариационная формулировка наглядна и удобна для приложений.

В определенных случаях внешняя нагрузка может уравниваться безмоментным образом. Для этого необходимо, чтобы она не совершала работы на возможных квазиизгибаниях. Это утверждение вытекает из уравнений (3.3), (3.4), которые являются следствием безмоментных уравнений равновесия. Если потребовать, чтобы усилия S^*, T_1^*, T_2^* были непрерывными в точке $\theta=0$, то в уравнении (3.4) при $\epsilon \rightarrow 0$ обратится в нуль внеинтегральный член, и приходим к указанному условию безмоментности. Можно доказать, что теорема о возможных изгибаниях [3] будет верной и для рассмотренной оболочки, если ее формулировать через квазиизгибания поверхности.

В качестве примера рассмотрим трубу эллиптического сечения, нагруженную постоянным по контуру нормальным давлением, имеющую следующие геометрические параметры: $\varphi_0 = \pi/2$, $R_* = (a+b)/4$, $R_*/\rho = 0.4$ с относительной эллиптичностью $\Delta = (a-b)/(a+b)$, причем ось эллипса a параллельна оси тора.

На фиг. 2 приведены графики для коэффициента K и функции прогиба в среднем сечении круговой трубы ($k=0.4$, $\varphi_0 = \pi/2$). Для сравнения исходное квазиизгибание нанесено пунктиром. Видно, что разница между ним и действительным прогибом имеет место лишь в окрестности полюса и она уменьшается при уменьшении толщины оболочки. Обращает на себя внимание то, что K при $\Delta=0.71$ и вместе с ним все перемещения обращаются в нуль. Объяснение этого противоречия заключается в том, что здесь имеет место исключенный из рассмотрения случай мгновенно равновесной нагрузки, ортогональной к квазиизгибанию, которая может быть воспринята оболочкой безмоментным образом. Это приводит к уменьшению перемещений до величин $\sim O(g/h)$, которые были отброшены при выкладках.

Данный пример для относительно толстостенной оболочки (с точки зрения асимптотического метода) $R_*/h=30$ численным методом решен в [4]. Результаты данной статьи удовлетворительно ($\sim 10-15\%$) согласуются с результатами упомянутой работы, в которой также указывается на резкое уменьшение прогибов при $\Delta=0.78$.

4. Пусть теперь труба в сечениях $\varphi=0$, φ_0 нагружена торцевыми силами $T_1(\theta)$. Для этой задачи сохраняет силу сформулированный выше вариационный принцип, так как она путем введения новых неизвестных может быть сведена к предыдущей задаче с однородными граничными условиями.

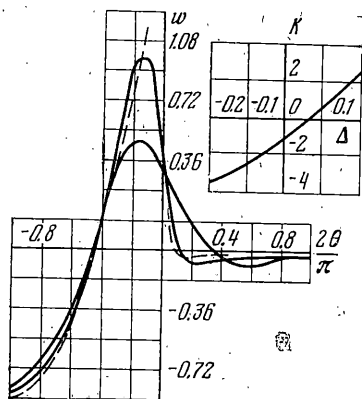
Для примера приведем результаты расчета коэффициента снижения жесткости кривой трубы с подкрепленными концами $\varphi=0, \varphi_0$, изгибаемой в плоскости ее кривизны моментом, приложенным в виде продольных сил, следующих закону плоскости. Беря за основу чистый изгиб кривой трубы, представим формулу для коэффициента снижения жесткости в виде $K = \frac{1}{2} \mu K_*$, где K_* учитывает влияние краевых усилий. Для трубы с углом изгиба $\varphi_0 = \pi/2$ получена следующая серия численных значений: $k=0.100, 0.200, 0.400, 0.600$; $K_*=0.770, 0.725, 0.490, 0.177$. В этих результатах изменение кривизны трубы определено по повороту концевых сечений.

При данном подходе как частные случаи могут быть получены решения задач Сен-Венана [5] изгиба кривых труб. Под этими задачами понимается такое нагружение труб краевыми силами, при котором все напряжения (но не перемещения) или остаются постоянными по длине трубы, или изменяются по закону $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$. Формально можно поставить

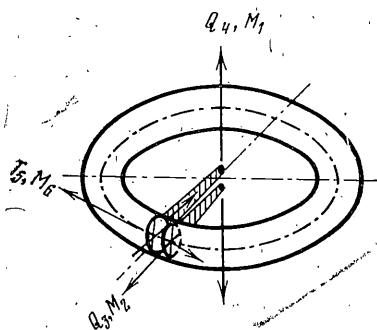
шесть таких задач. На фиг. 3 они пронумерованы индексами при соответствующих силовых факторах. Однако принципиальные различия имеют четыре первых задачи, причем одна из них (соответствующая моменту M_1) рассмотрена выше. Квазиизгибания для всех задач Сен-Венана имеют следующий вид:

$$U_0^* = U_1\varphi + U_2(\theta)\Gamma, \Gamma = 1, \sin \varphi \tag{4.1}$$

Здесь вектор $U_1[u_1, v_1, w]$ представляет собой некоторое перемещение оболочки как жесткого целого, а весь первый член имеет смысл деформации трубы с неизменяемым контуром поперечного сечения. Вектор $U_2[u_2,$



Фиг. 2



Фиг. 3

$v_2, w_2]$ является искомым и может быть найден точно. Исключая из уравнений изгибаний $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \omega = 0$ тангенциальные перемещения u_2 и v_2 , приходим к следующему уравнению:

$$\frac{d^2 w_2}{d\theta^2} + w_2 = \frac{2}{A} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_1}{\sin \theta} \right) \quad (v_1 \neq 0) \tag{4.2}$$

Это уравнение решается в явном виде. Не останавливаясь на дальнейших выкладках, сформулируем основные результаты. При четвертом нагружении имеет место безмоментное напряженное состояние

$$S = \text{const}/A^2, T_1 = T_2 = 0, U_2 = 0, U_1\varphi = [0, \varphi \sin \varphi, \varphi \cos \varphi] \tag{4.3}$$

Три первые задачи Сен-Венана характеризуются следующими значениями коэффициента снижения жесткости $K_i = 1/2 \eta_i$, где $\eta_1 = 1, \eta_2 = 1/2, \eta_3 = 1 + k^2 / (1 - k^2)$. Полученное значение η_3 в литературе, по-видимому, является новым. Известные автору исследования (например, [2]) относятся в основном к слабо изогнутым трубам ($1 \pm k \approx 1$), для которых естественно получалось $\eta_3 = 1$.

5. При помощи излагаемой теории легко решается поставленная в [6] задача о колебаниях замкнутой тороидальной оболочки с сверхнизкими частотами, обусловленными квазиизгибаемостью тора. Действительно, инерционный член $qQ = \omega^2 \rho h U^*$ представляет в среднем медленно изменяющуюся нагрузку и, согласно рассуждениям п. 3, ему должен отвечать вектор упругого смещения U^* . Частота колебаний ω^2 определяется из

уравнения (3.5). Введем обозначение

$$\oint U^* U_0^* A B d\theta = \oint [U_0^*]^2 A B d\theta + \varepsilon$$

Здесь $\varepsilon \sim O(h^{1/2})$ представляет асимптотически малый член. Однако его целесообразно сохранить для повышения точности расчета. Не останавливаясь на деталях вычисления этого члена, приведем окончательную формулу для частоты

$$\rho \omega^2 = \frac{E s k}{\pi b^3 (\gamma(k, m) - 0.29/\mu)}, \quad \gamma(k, m) = \oint [U_0^*]^2 A B d\theta / 2b^2 (A_*^2 + B_*^2) \quad (5.1)$$

где $\gamma(k, m)$ представляет характеристику квазиизгибания, зависящую от числа окружных волн m и от относительной кривизны k . Для осесимметричной формы она вычисляется точно и равна $\gamma = \pi/4 - k^2/\pi$. Сравнение данных исследований с результатами [7-9] при $m=0, 2$, полученными численными методами, показывает, что, во-первых, они удовлетворительно согласуются между собой и, во-вторых, что данные частоты резко выделяются из общего спектра своей относительной малостью.

Остановимся на вопросах численной реализации данного метода. При построении квазиизгибаний необходимо с надлежащей точностью выделить амплитуду логарифмической особенности в функции прогиба, а затем на ее фоне определить разрыв первого рода. Практика показала, что эта задача численно решается без труда путем введения переменной $x = -\ln \theta \operatorname{sign} \theta$ и последующего интегрирования уравнений изгибаний поверхности $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \omega = 0$ при помощи обычных численных методов.

При вычислении перемещений удобно представлять квазиизгибание в форме тригонометрических рядов по θ . Тогда операция интегральной свертки (1.1) сводится к простому умножению членов ряда на множители $\exp(-n^3/3\mu^3)$. Действительно, допуская погрешность $O(h)$, можно конечные пределы в (1.1) заменить на бесконечные и тогда для каждого члена ряда получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mu \xi) \left\{ \begin{array}{l} \sin n(\theta + \xi) \\ \cos n(\theta + \xi) \end{array} \right\} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{\mu}{\pi} \exp\left(-\frac{p^3}{3\mu^3}\right) \cdot \cos \mu p \xi \left\{ \begin{array}{l} \sin n(\theta + \xi) \\ \cos n(\theta + \xi) \end{array} \right\} dp = \\ &= \exp\left(-\frac{n^3}{3\mu^3}\right) \left\{ \begin{array}{l} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{array} \right\} \end{aligned}$$

6. Обратимся к оболочкам, жестким в классе квазиизгибаний, которые, согласно [1], могут воспринимать внешнюю нагрузку безмоментным образом. Однако использование безмоментной теории для их расчета нуждается в специальных оговорках, которые обсуждаются ниже.

Рассмотрим панель, опирающуюся на боковые диафрагмы $\varphi=0$, φ_0 и имеющую закрепленные параллели $\theta=\pm\theta_0$, на которую действует поверхностная нагрузка вида $qQ(\theta) \sin \alpha_m \varphi$. Будем решать задачу с точностью до простых краевых эффектов. Система соответствующих интегралов строится так же, как в задаче о замкнутой кривой трубе, и в данном случае должна подчиняться следующим граничным условиям:

$$u^0 + u = 0, \quad v^0 + v = 0 \quad \text{при } \theta = \pm\theta_0$$

Из этих выражений вытекают асимптотические соотношения между отдельными составляющими перемещений и усилий при $\theta \sim O(1)$

$$[u, v, w] \sim [u^0, v^0, w^0] \sim O(q/h), \quad [S, T_1, T_2] \sim O(h), \quad [S^0, T_1^0, T_2^0] \sim O(qh^2)$$

Отсюда следует, что усилия, относящиеся к интегралам внутреннего краевого эффекта, имеют порядок $O(qh^2)$ и являются пренебрежимо малыми по сравнению с безмоментными усилиями, характеризующимися величинами порядка $O(h)$. В окрестности полюса их удельный вес повышается до величин $O(h^{1/2})$, но это не препятствует сделать вывод, что напряженное состояние оболочки носит в общих чертах безмоментный характер. Вместе с тем прямая попытка получить это решение при помощи безмоментной теории приводит к явным противоречиям.

Они заключаются в том, что не удается построить перемещения в классе регулярных функций, и функция прогиба в общем случае должна иметь особенности вида $\text{sign } \theta$, $\ln \theta$. Им соответствуют бесконечно большие моменты и перерезывающие силы, которые дают формальное основание для сомнений в корректности такой постановки задачи. Однако этот недостаток безмоментного решения вполне естествен. Его следует рассматривать как обычную невязку в нетангенциальных связях, почти неизбежную в рамках классической безмоментной теории и находящуюся в полном согласии с принципом смягчения граничных условий.

На заключительном этапе расчета эти невязки могут быть устранены на границе оболочки за счет добавления простых краевых эффектов и на полюсных линиях деформации вида (1.4).

Рассмотрим для примера тороидальный купол с заземленными параллелями $\theta_0 = \pm\pi/2$, нагруженный давлением $q_n = 2q\theta/(1+k \sin \theta)$. Решая задачу в безмоментной постановке, находим, что тангенциальные усилия, регулярные в точке $\theta=0$, равны

$$T_1 = qb/\cos^2 \theta/2, \quad T_2 = 2qb(\theta - \text{tg } \theta)/(1+k \sin \theta)$$

При этом возникает невязка в нетангенциальных граничных условиях

$$w = \pm qb^2(1 \pm k)/(Eh), \quad \vartheta = \pm qbk/(Eh) \quad \text{при } \theta = \pm\pi/2$$

а перемещения будут иметь особенность

$$w = qb^2(k \ln \theta + 1/2 \text{ sign } \theta)/(Eh) \quad \theta \rightarrow 0$$

Если это решение подправить при помощи моментной теории, то легко убедиться, что максимум дополнительных напряжений определяется крайевыми эффектами, которые имеют примерно такую же интенсивность, как для оболочки положительной кривизны. Отсюда следует, что безмоментная теория, несмотря на свою внешнюю противоречивость, имеет в данном случае свойственную ей точность.

Поступила 11 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Булыгин А. В. Об одном классе оболочек знакопеременной гауссовой кривизны. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5.
2. Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки. М., «Наука», 1976.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
4. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Беспалова Е. И. Численное решение задач статики ортотропных оболочек с переменными параметрами. Киев, «Наукова думка», 1976.
5. Черных К. Ф. Задача Сен-Венена для тонкостенных труб с круговой осью. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
6. Гольденвейзер А. Л. Изгибания поверхностей и сверхнизкие частоты колебаний тонких оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5.
7. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченко В. И., Фролов А. Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М., «Машиностроение», 1975.
8. Гавеля С. П., Кононенко Н. И. Собственные колебания и волны на тороидальной оболочке. Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 1.
9. Lipins A. A. Flexural vibrations of prestressed toroidal shell. NASA CR-296, Washington. 1965.