

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ
ИЗОТРОПНО УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

К. Ф. ЧЕРНЫХ

(Ленинград)

При расчете тонких оболочек из эластомеров (резиноподобных материалов) приходится учитывать большие повороты и деформации. С последним, в частности, связано значительное изменение толщины оболочки и, следовательно, необходимость уточнения геометрической гипотезы Кирхгофа. Далее, значительное различие между недеформированной и деформируемой конфигурациями оболочки приводит к необходимости перепроектирования тензорных величин из одного координатного базиса в другой. Все это существенно усложняет разрешающие уравнения.

С различными вариантами нелинейной теории оболочек можно ознакомиться в [1-10]. Следует отметить, что известные автору варианты нелинейной теории тонких оболочек либо носят чересчур общий характер, либо предполагают ограничения (часто содержащиеся неявно) на величины деформаций и углов поворота, либо, наконец, посвящены деформациям частного вида.

Ниже приводится вариант автора со следующими характерными особенностями: используется двойной тензор напряжений [11], по первому индексу отнесенный к недеформированному материальному базису, а по второму — к деформированному. Такой подход дает возможность формулировать уравнения равновесия и ставить граничные условия в недеформированном материальном базисе, положение которого известно. Полученные же зависимости отнесены к деформированным материальным осям. Компонентами двойного тензора являются симметричные величины, широко использованные В. В. Новожиловым [12]. Симметричность компонент облегчает формулировку статико-геометрических гипотез и введение (симметричных) усилий-моментов; предложено уточнение геометрической гипотезы Кирхгофа, позволяющее учесть (линейную) деформацию поперечного волокна; принято приемлемое для эластомеров предположение о линейном законе распределения напряжений по толщине оболочки, значительно упрощающее основные зависимости.

Рассмотрен частный случай симметричной деформации оболочки вращения. В качестве примера определена статическая жесткость конического резинового амортизатора. Проведено сопоставление с результатами эксперимента.

1. Пусть [13, 14] $\mathbf{R}(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — радиус-вектор материальной точки в деформируемой конфигурации тела, α^i ($i=1, 2, 3$) — криволинейные материальные координаты точки, $\mathbf{R}_i = \partial \mathbf{R} / \partial \alpha^i$ — основной координатный базис, а \mathbf{R}^j — отвечающий ему взаимный. Компоненты метрического тензора определяются соотношениями

$$g_{ij} = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{R}^i \cdot \mathbf{R}^j \quad (1.1)$$

при этом

$$\mathbf{R}^j = g^{ja} \mathbf{R}_a \quad (1.2)$$

Здесь и ниже принимается правило суммирования по повторяющимся греческим индексам. По повторяющимся латинским индексам суммирование не производится.

Площадь i -й координатной площадки подсчитывается по формулам

$$dS_i = \sqrt{g g^{ii}} d\alpha^j d\alpha^k, \quad g = |g_{ij}| \quad (i \neq j \neq k \neq i) \quad (1.3)$$

Объем материального элемента равен $dV = \sqrt{g} d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3$. Наконец, площадь элементарной косоугольной площадки dS_n с единичным вектором нормали

к ней n определяется соотношением

$$ndS_n = \frac{dS_\alpha}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} R^\alpha, \quad n_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{dS_i}{dS_n} \quad (1.4)$$

Соответствующие зависимости для недеформируемой конфигурации получаются из выписанных добавлением верхнего индекса — градуса.

Пусть $F = R_i R_i^{\circ i}$, $F^{-1} = R_i^{\circ} R_i^{\circ}$ — градиент движения (деформации) и обратный ему тензор, обладающие свойствами

$$R_i^{\circ} = F^{-1} \cdot R_i, \quad R_i = F \cdot R_i^{\circ} \quad (1.5)$$

а $J = dV/dV^{\circ} = |F|$ — кратность изменения элемента объема.

При рассмотрении условий равновесия материального элемента объема в деформированной конфигурации используют тензор истинных напряжений Коши $\Sigma = \sigma^{\alpha\beta} R_\alpha R_\beta$, а в недеформированной — несимметричный тензор напряжений Пизала — Кирхгофа. С учетом соотношений (1.5) последний записывается в виде

$$\{F^{-1} \cdot J \Sigma\} = J \sigma^{\alpha\beta} R_\alpha^{\circ} R_\beta^{\circ} \quad (1.6)$$

Выписанный тензор можно рассматривать как двойной тензор [14], по первому индексу отнесенный к недеформированному материальному базису, а по второму — к деформированному. Вектор напряжений $\sigma_n^{\circ} = (dS_n/dS_n^{\circ}) \sigma_n = n^{\circ} \cdot \{F^{-1} \cdot J \Sigma\}$, отнесенный к единице площади до деформации, подсчитывается, согласно (1.6), по формуле

$$\sigma_n^{\circ} = (dS_n/dS_n^{\circ}) \sigma_n = n_{\gamma}^{\circ} J \sigma^{\gamma\beta} R_\beta \quad (1.7)$$

Для сжимаемого материала симметричные компоненты двойного тензора связаны с деформацией соотношениями

$$J \sigma^{ij} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \right) g^{\circ ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} g^{\circ i\gamma} g^{\circ j\beta} g_{\gamma\beta} + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} g^{ij} \right] \quad (1.8)$$

$$\Phi = \Phi(I_c, II_c, III_c)$$

$$I_c = g^{\circ\alpha\beta} g_{\beta\alpha}, \quad II_c/III_c = g_{\alpha\beta}^{\circ} g^{\beta\alpha}, \quad III_c = g/g^{\circ} = |g_{ij}|/|g_{ij}^{\circ}| \quad (1.9)$$

Для несжимаемого материала

$$J = III_c = 1, \quad \Phi = \Phi(I_c, II_c)$$

$$\sigma^{ij} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \right) g^{\circ ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} g^{\circ i\gamma} g^{\circ j\beta} g_{\gamma\beta} \right] + p g^{ij} \quad (1.10)$$

где p — произвольная функция типа «гидростатического давления», в частности, для неогукковского закона

$$\sigma^{ij} = \mu g^{\circ ij} + p g^{ij} \quad (1.11)$$

где $\mu = E/3$ — линейный (начальный) модуль сдвига.

В координатах, нормально связанных со срединной поверхностью оболочки, $\alpha^3 = \xi$, $R(\alpha^1, \alpha^2, \xi) = r(\alpha^1, \alpha^2) + \xi n(\alpha^1, \alpha^2)$. Здесь r — радиус-вектор проекции точки на срединную поверхность, n — единичный вектор нормали к поверхности. Далее (здесь и ниже буквенные индексы будут принимать значения 1 и 2)

$$a_{ij} = r_i \cdot r_j, \quad a^{ij} = r^i \cdot r^j, \quad b_{ij} = -r_i \cdot n_j, \quad b_j^i = b_{j\alpha} a^{\alpha i}$$

$$\left(\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^i}, \quad \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{r}_i = \delta_i^j, \quad \mathbf{n}_i = \partial \mathbf{n} / \partial \alpha^i \right) \quad (1.12)$$

компоненты поверхностных тензоров: метрического и кривизны. При этом

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \sqrt{a} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{r}_1 = \sqrt{a} \mathbf{r}^2, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{r}_2 = -\sqrt{a} \mathbf{r}^1 \quad (a = |a_{ij}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \alpha^j} &= \Gamma_{ij}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + b_{ij} \mathbf{n}, & \frac{\partial \mathbf{r}^j}{\partial \alpha^i} &= -\Gamma_{ja}^i \mathbf{r}^a - b_j^i \mathbf{n} \\ \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha^i} &= -b_{ja}^i \mathbf{r}^a = -b_j^a \mathbf{r}_a, & \Gamma_{ij}^h &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial \alpha^\beta} \right) a^{h\beta} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Для вектора тангенциальной нормали к линии на срединной поверхности \mathbf{v} справедливо соотношение

$$v_i ds_i = \sqrt{a} d\alpha^j \quad (i \neq j) \quad (1.15)$$

В дальнейшем будем считать оболочку тонкой, т.е. $\xi b_{ij} / \sqrt{a_{ii} a_{jj}} \ll 1$. С учетом этого последовательно используем упрощения вида

$$\Psi(\alpha^1, \alpha^2, \xi) \doteq \Psi^{(0)}(\alpha^1, \alpha^2) + \xi \Psi^{(1)}(\alpha^1, \alpha^2) \quad (1.16)$$

Здесь и ниже символ (\doteq) обозначает, что в выписанном равенстве приравниваются слагаемые, линейные по ξ .

2. Пусть

$$\mathbf{R}^\circ(\alpha^1, \alpha^2, \xi) = \mathbf{r}^\circ(\alpha^1, \alpha^2) + \xi \mathbf{n}^\circ(\alpha^1, \alpha^2)$$

$$\mathbf{R}(\alpha^1, \alpha^2, \xi) = \mathbf{r}(\alpha^1, \alpha^2) + \lambda_\xi(\alpha^1, \alpha^2) [\xi + 1/2 \xi^2 \kappa_\xi(\alpha^1, \alpha^2)] \mathbf{n}(\alpha^1, \alpha^2) \quad (2.1)$$

радиус-векторы материальной точки оболочки до и после деформации; \mathbf{r}° , \mathbf{r} — радиус-векторы проекций материальной точки на материальную срединную поверхность; \mathbf{n}° , \mathbf{n} — единичные векторы нормалей к последней.

Функции λ_ξ и κ_ξ характеризуют деформацию нормального к срединной поверхности волокна. Используя формулы (1.1), (1.2), (1.14), (1.16), (2.1), последовательно подсчитываем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^\circ &\doteq \mathbf{r}_i^\circ - \xi b_i^{\alpha} \mathbf{r}_\alpha^\circ, \quad \mathbf{R}^{oj} \doteq \mathbf{r}^{oj} + \xi b_\alpha^{oj} \mathbf{r}^{\alpha}, \quad \mathbf{R}_3^\circ = \mathbf{R}^{o3} = \mathbf{n}^\circ \\ \mathbf{R}_i &\doteq \mathbf{r}_i + \xi \left(-\lambda_\xi b_i^{\alpha} \mathbf{r}_\alpha + \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^i} \mathbf{n} \right), \quad \mathbf{R}_3 \doteq \lambda_\xi (1 + \xi \kappa_\xi) \mathbf{n} \\ \mathbf{R}^j &\doteq \mathbf{r}^j + \xi \lambda_\xi b_\alpha^j \mathbf{r}^\alpha, \quad \mathbf{R}^3 \doteq \lambda_\xi^{-1} \left[(1 - \xi \kappa_\xi) \mathbf{n} - \xi \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^i} \mathbf{r}^i \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$g_{ij}^\circ \doteq a_{ij}^\circ - \xi 2b_{ij}^\circ, \quad g_{13}^\circ = g_{23}^\circ = 0, \quad g_{33}^\circ = 1$$

$$g^{oj} \doteq a^{oj} + \xi 2b^{oj}, \quad g^{o13} = g^{o23} = 0, \quad g^{o33} = 1$$

$$g_{ij} \doteq a_{ij} - \xi 2\lambda_\xi b_{ij}, \quad g_{i3} \doteq \xi \lambda_\xi \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^i}, \quad g_{33} \doteq \lambda_\xi^2 (1 + \xi 2\kappa_\xi)$$

$$g^{ij} \doteq a^{ij} + \xi 2\lambda_\xi b^{ij}, \quad g^{i3} \doteq -\xi \lambda_\xi^{-1} a^{i\tau} \frac{\partial \lambda_\xi}{\partial \alpha^\tau}, \quad g^{33} \doteq \lambda_\xi^{-2} (1 - \xi 2\kappa_\xi)$$

Соотношения (2.1) являются математической записью следующей уточненной геометрической гипотезы Кирхгофа: материальное волокно, нормальное к материальной срединной поверхности до деформации, оста-

ется нормальной к ней и после деформации, деформируясь при этом по линейному закону.

Введем компоненты изгибной деформации

$$\kappa_i^j = -(\lambda_\xi b_i^j - b_i^{oj}) \quad (2.3)$$

при помощи которых с учетом зависимостей (2.2) имеем

$$g_{ij} \doteq a_{ij} + \xi 2a_{jv}(\kappa_i^v - b_i^{ov}), \quad g^{ij} \doteq a^{ij} - \xi 2a^{jv}(\kappa_v^i - b_v^{oi}) \quad (2.4)$$

Отсюда и из (1.9) находим

$$\begin{aligned} I_c &\doteq a^{\alpha\beta} a_{\beta\alpha} + \lambda_\xi^2 + \xi 2[a^{\alpha\beta} a_{v\alpha} \kappa_\beta^v + \lambda_\xi^2 \kappa_\xi] \\ II_c &\doteq a_{\alpha\beta} a^{\beta\alpha} + \lambda_\xi^{-2} - \xi 2[a_{\alpha\beta} a^{v\alpha} \kappa_v^\beta + \lambda_\xi^{-2} \kappa_\xi] \\ III_c &\doteq (a/a^o) \lambda_\xi^2 [1 + \xi 2(\kappa_1^1 + \kappa_2^2 + \kappa_\xi)] \end{aligned} \quad (2.5)$$

В частности, с принятой точностью условие несжимаемости $III_c = J = 1$ записывается в виде

$$\lambda_\xi = (a/a^o)^{-1/2}, \quad \kappa_\xi = -(\kappa_1^1 + \kappa_2^2) \quad (2.6)$$

Из соотношений (2.2), (2.4) следует, что для тонких оболочек можно принять еще более простые выражения

$$\begin{aligned} g_{ij}^o &\doteq a_{ij}^o, \quad g^{oj} \doteq a^{oj}, \quad g_{13}^o = g_{23}^o = g^{o13} = g^{o23} = 0, \quad g_{33}^o = g^{o33} = 1 \\ g_{ij} &\doteq a_{ij} + \xi 2a_{jv} \kappa_i^v, \quad g^{ij} \doteq a^{ij} - 2\xi a^{jv} \kappa_v^i \\ g_{33} &\doteq \lambda_\xi^2 (1 + \xi 2\kappa_\xi), \quad g^{33} \doteq \lambda_\xi^{-2} (1 - \xi 2\kappa_\xi) \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Примем статическую гипотезу Кирхгофа: $\sigma^{33} = 0$. Тогда для сжимаемого материала с учетом зависимостей (1.8), (1.9), (2.5), (2.7) получаем

$$J\sigma^{ij} \doteq 2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \right) a^{oj} - \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} a^{oi\tau} a^{o\beta} (a_{\tau\beta} + \xi 2a_{\beta v} \kappa_\tau^v) + \right. \\ \left. + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} (a^{ij} - \xi 2a^{jv} \kappa_v^i) \right] \quad (3.1)$$

$$(J\sigma^{33} \doteq) \frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} a^{\alpha\beta} (a_{\beta\alpha} + \xi 2a_{v\alpha} \kappa_\beta^v) + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} \lambda_\xi^{-2} (1 - \xi 2\kappa_\xi) \doteq 0$$

Из второго уравнения определяются величины λ_ξ , κ_ξ . Компоненты σ^{13} , σ^{23} являются чисто статическими факторами. Связанные с ними перерезывающие усилия определяются из уравнений равновесия.

Для несжимаемого материала $J = III_c = 1$ и по (1.10), (2.7)

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &\doteq 2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \right) a^{oj} + \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} a^{oi\tau} a^{o\beta} (a_{\tau\beta} + \xi 2a_{\beta v} \kappa_\tau^v) \right] + p (a^{ij} - \xi 2a^{jv} \kappa_v^i) \\ (\sigma^{33} \doteq) & 2 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} a^{\alpha\beta} (a_{\beta\alpha} + \xi 2a_{v\alpha} \kappa_\beta^v) \right] + p \lambda_\xi^{-2} (1 - \xi 2\kappa_\xi) \doteq 0 \end{aligned}$$

С принятой точностью (1.16) находим, исключая отсюда p :

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &\doteq 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \right) a^{oj} - \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} a^{oi\tau} a^{o\beta} (a_{\tau\beta} + \xi 2a_{\beta v} \kappa_\tau^v) - \right. \\ & \left. - \lambda_\xi^2 [a^{ij} + \xi 2(a^{ij} \kappa_\xi - a^{jv} \kappa_v^i)] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} a^{\alpha\beta} (a_{\beta\alpha} + \xi 2a_{v\alpha} \kappa_\beta^v) \right] \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Напомним, что величины λ_ξ , κ_ξ определяются соотношениями (2.6). В частном случае неогукковского закона по формулам (1.11), (2.7):

$$\sigma_{(0)}^{ij} = \mu [a^{\circ ij} - (a^\circ/a) a^{ij}], \quad \sigma_{(1)}^{ij} = 2\mu (a^\circ/a) (a^{ij} \kappa_\beta^\beta + a^{j\nu} \kappa_\nu^i) \quad (3.3)$$

4. Подсчитаем главный вектор и главный момент напряжений, действующих на элемент нормального сечения деформированной оболочки. Из фиг. 1 следует

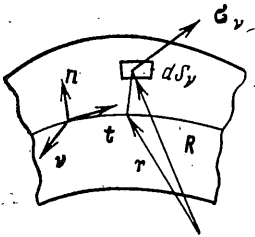
$$\mathbf{T}^\nu = \frac{1}{ds_i^\circ} \int_{S_\nu} \boldsymbol{\sigma}_\nu dS_\nu, \quad \mathbf{M}^\nu = \frac{1}{ds_i^\circ} \int_{S_\nu} (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\sigma}_\nu dS_\nu \quad (4.1)$$

Здесь \mathbf{T}^ν и \mathbf{M}^ν — погонные (в расчете на единицу длины срединной линии недеформированного нормального сечения) векторы усилий и моментов. Согласно выражению (1.7), в котором \mathbf{n}° заменено на вектор (орт) тангенциальной нормали $\mathbf{v}^{\circ\xi}$ ($\mathbf{v}^\circ = \mathbf{v}|_{\xi=0}$), находим

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu dS_\nu = \nu_r^{\circ\xi} [J\sigma^{r\beta} \mathbf{R}_\beta + J\sigma^{r3} \mathbf{R}_3] dS_\nu^\circ$$

Далее, с учетом зависимостей (1.3), (1.4) и (1.15) получаем

$$\begin{aligned} \nu_i^{\circ\xi} dS_\nu^\circ &= \frac{1}{\sqrt{g^{\circ ii}}} dS_i^\circ = \sqrt{g^{\circ}} d\alpha^j d\xi = \\ &= \sqrt{\frac{q^\circ}{a^\circ}} \nu_i^{\circ} ds_i^\circ d\xi \quad (i \neq j) \end{aligned}$$



Фиг. 1

Подставляя полученные выражения в (4.1), находим с учетом равенств (1.13) и (2.2):

$$\mathbf{T}^\nu = \nu_\alpha^{\circ} \mathbf{T}^\alpha, \quad \mathbf{M}^\nu = \nu_\alpha^{\circ} \mathbf{M}^\alpha \quad (4.2)$$

$$\mathbf{T}^i = T^{i1} \mathbf{r}_1 + T^{i2} \mathbf{r}_2 + T^{in} \mathbf{n}, \quad \mathbf{M}^i = \sqrt{a^\circ} (-M^{i2} \mathbf{r}^1 + M^{i1} \mathbf{r}^2) \quad (4.3)$$

$$T^{ij} = \int_{-h^\circ/2}^{h^\circ/2} \{J\sigma^{ij} - \xi \lambda_\xi b_\beta^j J\sigma^{i\beta}\} \left(\frac{g^\circ}{a^\circ}\right)^{1/2} d\xi \quad (4.4)$$

$$M^{ij} = \int_{-h^\circ/2}^{h^\circ/2} \{J\sigma^{ij} - \xi \lambda_\xi b_\beta^j J\sigma^{i\beta}\} \lambda_\xi \left(\xi + \frac{1}{2} \xi^2\right) \left(\frac{g^\circ}{a^\circ}\right)^{1/2} d\xi$$

В силу тонкостенности оболочки более или менее обоснованным является переход от выражений (4.4) к более простым

$$T^{ij} = \int_{-h^\circ/2}^{h^\circ/2} J\sigma^{ij} d\xi, \quad M^{ij} = \lambda_\xi \int_{-h^\circ/2}^{h^\circ/2} J\sigma^{ij} \xi d\xi \quad (4.5)$$

Далее предположим, что

$$J\sigma^{ij} = (J\sigma^{ij})_{(0)} + \xi (J\sigma^{ij})_{(1)} \quad (4.6)$$

т. е. приняв линейный закон изменений напряжений по толщине. При этом из соотношений (4.5), (4.6) следуют упрощенные выражения для усилий — моментов

$$T^{ij} = h^\circ (J\sigma^{ij})_{(0)}, \quad M^{ij} = 1/12 h^{\circ 3} \lambda_\xi (J\sigma^{ij})_{(1)} \quad (4.7)$$

Обычным путем, выписывая условия равновесия элемента деформированной срединной поверхности, приходим к векторным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sqrt{a^\circ} T^\beta}{\partial \alpha^\beta} + \sqrt{a} q = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{a^\circ} M^\beta}{\partial \alpha^\beta} + r_\beta \times \sqrt{a^\circ} T^\beta + \sqrt{a} m = 0 \quad (4.8)$$

Здесь q и m — интенсивности поверхностных нагрузки и момента в расчете на единицу площади деформированной срединной поверхности.

5. Сведем воедино полученные зависимости. Векторным уравнениям равновесия (4.8), согласно соотношениям (1.14) и (4.3), отвечают пять скалярных ($m=0$; $i, j=1, 2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sqrt{a^\circ} T^{i\gamma}}{\partial \alpha^\gamma} + \sqrt{a^\circ} (\Gamma_{\gamma\beta}^i T^{\gamma\beta} + b_\gamma^i T^{\gamma n}) + q^i \sqrt{a} &= 0 \\ \frac{\partial \sqrt{a^\circ} T^{\gamma n}}{\partial \alpha^\gamma} + \sqrt{a^\circ} b_{\gamma\beta} T^{\gamma\beta} + q_n \sqrt{a} &= 0 \\ \frac{\partial \sqrt{a^\circ} M^{\gamma i}}{\partial \alpha^\gamma} + \sqrt{a^\circ} (\Gamma_{\gamma\beta}^i M^{\gamma\beta} - T^{in}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Шестое, недифференциальное уравнение приближенно выполняется в силу симметричности напряжений. Далее следуют выражения (4.7).

Для сжимаемого материала (напомним: символ \doteq означает, что в выписанном равенстве приравниваются лишь линейные по ξ слагаемые) согласно (3.1):

$$\begin{aligned} (J\sigma^{ij})_{(0)} + \xi (J\sigma^{ij})_{(1)} &\doteq 2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \right) a^{\circ ij} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} a^{\circ i\gamma} a^{\circ j\beta} (a_{\gamma\beta} + \xi 2a_{\beta\nu} \kappa_\gamma^\nu) + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} (a^{ij} - \xi 2a^{j\nu} \kappa_\nu^i) \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

а величины λ_ξ , κ_ξ определяются из уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} a^{\circ \alpha\beta} (a_{\beta\alpha} + \xi 2a_{\nu\alpha} \kappa_\beta^\nu) + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} \lambda_\xi^{-2} (1 - \xi 2\kappa_\xi) \doteq 0 \quad (5.3)$$

Для несжимаемого материала на основании (2.6) и (3.2) будем иметь

$$\lambda_\xi = (a/a^\circ)^{-1/2}, \quad \kappa_\xi = -(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \quad (5.4)$$

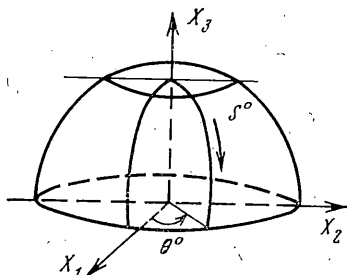
$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &\doteq 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + I_c \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \right) a^{\circ ij} - \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} a^{\circ i\gamma} a^{\circ j\beta} (a_{\gamma\beta} + \xi 2a_{\beta\nu} \kappa_\gamma^\nu) - \right. \\ &\left. - \lambda_\xi^2 [a^{ij} + \xi (a^{ij} \kappa_\xi - a^{j\nu} \kappa_\nu^i)] \left[\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} a^{\circ \alpha\beta} (a_{\beta\alpha} + \xi 2a_{\nu\alpha} \kappa_\beta^\nu) \right] \right\} \end{aligned}$$

По параметрическому уравнению деформированной срединной поверхности, заданной в прямоугольных декартовых (пространственных) координатах, $x_i = x_i(\alpha^1, \alpha^2)$ ($i=1, 2, 3$) нетрудно последовательно подсчитать

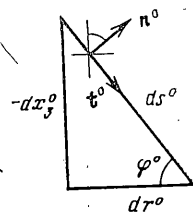
$$a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^i} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^j}$$

$$\begin{aligned}
 A_i &= \sqrt{a_{ii}}, & a &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, & a^{11} &= \frac{a_{22}}{a}, & a^{12} &= -\frac{a_{12}}{a}, & a^{22} &= \frac{a_{11}}{a} \\
 \sin \chi b_{ij} &= \mu_{13} \frac{\partial^2 x_1}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} + \mu_{23} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} + \mu_{33} \frac{\partial^2 x_3}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j} \\
 A_1 A_2 \mu_{13} &= \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^1} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^2}, & A_1 A_2 \mu_{23} &= \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^1} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha^2} \\
 A_1 A_2 \mu_{33} &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial x_2}{\partial \alpha^1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha^2}, & \sin \chi &= \sqrt{\mu_{13}^2 + \mu_{23}^2 + \mu_{33}^2} \\
 b_j^i &= a^{ik} b_{kj}, & \Gamma_{ij}^h &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{j\beta}}{\partial \alpha^i} + \frac{\partial a_{i\beta}}{\partial \alpha^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial \alpha^\beta} \right) a^{\beta h} \\
 \kappa_i^j &= -(\lambda_\xi b_i^j - b_i^{oj})
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

В зависимости (5.5) при подсчете аналогичных величин недеформированной конфигурации следует ввести значок градуса.



Фиг. 2



Фиг. 3

Если ввести физические (по отношению к координатному базису деформированной срединной поверхности) компоненты тензора истинных напряжений

$$\sigma_{(ij)} = A_i A_j \sigma^{ij} \tag{5.6}$$

то, принимая для кратности изменения объема упрощенное выражение $J = (a/a^0)^{1/2} \lambda_\xi$, находим из зависимостей (4.7) и (5.6):

$$\sigma_{(ij)} = \frac{A_i A_j}{(a/a^0)^{1/2} \lambda_\xi} \left(\frac{T^{ij}}{h^0} + \frac{\xi}{h^0/2} \frac{6M^{ij}}{\lambda_\xi h^{02}} \right) \tag{5.7}$$

Наконец, согласно (2.1), получим $h = h^0 \lambda_\xi$.

6. Применим полученные зависимости к симметрично деформируемой оболочке вращения. Для нее (фиг. 2) в качестве материальных координат примем длину дуги меридиана недеформированной срединной поверхности s^0 и θ^0 . При этом

$$\begin{aligned}
 \alpha^1 &= s^0, & \alpha^2 &= \theta^0 \\
 x_1^0 &= r^0(s^0) \cos \theta^0, & x_2^0 &= r^0(s^0) \sin \theta^0, & x_3^0 &= x_3^0(s^0) \\
 x_1 &= r(s^0) \cos \theta^0, & x_2 &= r(s^0) \sin \theta^0, & x_3 &= x_3(s^0)
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Из фиг. 3 находим (штрих означает дифференцирование по s^0)

$$r'^0 = \cos \varphi^0, \quad x'^0 = -\sin \varphi^0 \tag{6.2}$$

Пусть $\lambda_s, \lambda_\theta$ — главные кратности удлинений вдоль меридионального и окружного направлений. Из фиг. 2 следует

$$\lambda_s = ds/ds^\circ, \quad \lambda_\theta = r/r^\circ \quad (6.3)$$

Отсюда и из фигуры, аналогичной фиг. 3, но выполненной для деформированной конфигурации, находим зависимости, аналогичные (6.2):

$$r' = \lambda_s \cos \varphi, \quad x_3' = -\lambda_s \sin \varphi \quad (6.4)$$

Используя соотношения (6.1)–(6.4), а также формулы из п. 5, последовательно получаем уравнения равновесия

$$(r^\circ T_{(11)})' - \cos \varphi T_{(22)} + r^\circ \varphi' T_{(1n)} + r^\circ \lambda_s \lambda_\theta q_{(1)} = 0 \quad (6.5)$$

$$(r^\circ T_{(1n)})' - \sin \varphi T_{(22)} - r^\circ \varphi' T_{(11)} + r^\circ \lambda_s \lambda_\theta q_n = 0$$

$$(r^\circ M_{(11)})' - \cos \varphi M_{(22)} - r^\circ \lambda_s T_{(1n)} = 0$$

$$T_{(11)} = A_1^\circ A_1 T^{11} = \lambda_s T^{11} = h^\circ \lambda_s (J\sigma^{11})_{(0)}$$

$$T_{(22)} = A_2^\circ A_2 T^{22} = r^{\circ 2} \lambda_\theta T^{22} = h^\circ r^{\circ 2} \lambda_\theta (J\sigma^{22})_{(0)}$$

$$M_{(11)} = A_1^\circ A_1 M^{11} = \lambda_s M^{11} = 1/12 h^{\circ 3} \lambda_s \lambda_\theta (J\sigma^{11})_{(1)} \quad (6.6)$$

$$M_{(22)} = A_2^\circ A_2 M^{22} = r^{\circ 2} \lambda_\theta M^{22} = \frac{1}{12} h^{\circ 3} r^{\circ 3} \lambda_s \lambda_\theta (J\sigma^{22})_{(1)}$$

$$T_{(1n)} = A_1^\circ T^{1n} = T^{1n}, \quad q_{(1)} = A_1 q^1 = \lambda_s q^1$$

где T, M, q — физические компоненты усилий, моментов и поверхностной нагрузки.

При этом напомним, что в компонентах тензоров первый индекс относится к материалному базису недеформированной срединной поверхности, а второй — к деформированной. С физическими компонентами тензора истинных напряжений

$$\sigma_{(11)} = A_1^2 \sigma^{11} = \lambda_s^2 \sigma^{11}, \quad \sigma_{(22)} = A_2^2 \sigma^{22} = r^{\circ 2} \lambda_\theta^2 \sigma^{22}$$

они связаны соотношениями

$$\lambda_s \lambda_\theta \sigma_{(11)} = \frac{T_{(11)}}{h^\circ} + \frac{\xi}{h^\circ/2} \frac{6M_{(11)}}{\lambda_s h^{\circ 2}}$$

$$\lambda_s \lambda_\theta \sigma_{(22)} = \frac{T_{(22)}}{h^\circ} + \frac{\xi}{h^\circ/2} \frac{6M_{(22)}}{\lambda_s h^{\circ 2}}$$

Отметим, что из первых двух уравнений равновесия (6.5) следует квадратура

$$r^\circ (\sin \varphi T_{(11)} - \cos \varphi T_{(1n)}) = \frac{Q(s_1^\circ)}{2\pi} + \int_{s_1^\circ}^{\cdot} (q_n \cos \varphi - q_{(1)} \sin \varphi) r^\circ \lambda_s \lambda_\theta ds^\circ$$

принимающая для равномерного нормального давления ($q_n = q = \text{const}$, $q_{(1)} = 0$) следующий вид:

$$r^\circ (\sin \varphi T_{(11)} - \cos \varphi T_{(1n)}) = \frac{1}{2} \frac{Q(s_1^\circ)}{\pi} + \frac{1}{2} [r(s^\circ) - r(s_1^\circ)]$$

Здесь $Q(s_1^\circ)$ — вертикальная сила, действующая на параллельный круг $s^\circ = s_1^\circ$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} I_c &= \lambda_s^2 + \lambda_\theta^2 + \lambda_\xi^2 + \xi 2(\lambda_s^2 \kappa_s + \lambda_\theta^2 \kappa_\theta + \lambda_\xi^2 \kappa_\xi) \\ II_c / III_c &= \lambda_s^{-2} + \lambda_\theta^{-2} + \lambda_\xi^{-2} - \xi 2(\lambda_s^{-2} \kappa_s + \lambda_\theta^{-2} \kappa_\theta + \lambda_\xi^{-2} \kappa_\xi) \\ III_c &= (\lambda_s \lambda_\theta \lambda_\xi) \{1 + \xi 2(\kappa_s + \kappa_\theta + \kappa_\xi)\} \\ \kappa_s &= \lambda_\xi \lambda_s^{-1} \varphi' - \varphi'', \quad \kappa_\theta = (\lambda_\xi \lambda_\theta^{-1} \sin \varphi - \sin \varphi') / r^\circ \end{aligned}$$

Для сжимаемого материала

$$\begin{aligned} (J\sigma^{11})_{(0)} + \xi (J\sigma^{11})_{(1)} &= 2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} [\lambda_\theta^2 + \lambda_\xi^2 + \xi 2(\lambda_\theta^2 \kappa_\theta + \lambda_\xi^2 \kappa_\xi)] + \right. \\ &\quad \left. + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} \lambda_\theta^{-2} (1 - \xi 2\kappa_s) \right\} \\ (J\sigma^{22})_{(0)} + \xi (J\sigma^{22})_{(1)} &= 2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} [\lambda_s^2 + \lambda_\xi^2 + \xi 2(\lambda_s^2 \kappa_s + \lambda_\xi^2 \kappa_\xi)] + \right. \\ &\quad \left. + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} \lambda_\theta^{-2} (1 - \xi 2\kappa_\theta) \right\} \end{aligned}$$

При этом λ_ξ и κ_ξ определяются из уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} [\lambda_s^2 + \lambda_\theta^2 + \xi 2(\kappa_s + \kappa_\theta)] + III_c \frac{\partial \Phi}{\partial III_c} \lambda_\xi^{-2} (1 - \xi 2\kappa_\xi) = 0$$

Для несжимаемого материала

$$\begin{aligned} III_c &= J = 1, \quad \lambda_\xi = \lambda_s^{-1} \lambda_\theta^{-1}, \quad \kappa_\xi = -(\kappa_s + \kappa_\theta) \\ \sigma_{(0)}^{11} + \xi \sigma_{(1)}^{11} &= 2 \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial I_c} [(1 - \lambda_s^{-4} \lambda_\theta^{-2}) + \xi 4\lambda_s^{-4} \lambda_\theta^{-2} (\kappa_s + \frac{1}{2} \kappa_\theta)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \lambda_\theta^2 (1 + \xi 2\kappa_\theta) \right\} \\ \sigma_{(0)}^{22} + \xi \sigma_{(1)}^{22} &= 2r^{\circ-2} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial I_c} [(1 - \lambda_s^{-2} \lambda_\theta^{-4}) + \right. \\ &\quad \left. + \xi 4\lambda_s^{-2} \lambda_\theta^{-4} (\kappa_\theta + \frac{1}{2} \kappa_s)] + \frac{\partial \Phi}{\partial II_c} \lambda_s^2 (1 + \xi 2\kappa_s) \right\} \end{aligned} \quad (6.7)$$

В частности, из соотношений (3.3), (4.7) и (6.6) для неогуковского материала имеем

$$\begin{aligned} T_{(11)} &= \mu h^\circ \lambda_s (1 - \lambda_s^{-4} \lambda_\theta^{-2}), \quad M_{(11)} = \frac{1}{3} \mu h^{\circ 3} \lambda_s^{-4} \lambda_\theta^{-2} (\kappa_s + \frac{1}{2} \kappa_\theta) \\ T_{(22)} &= \mu h^\circ \lambda_\theta (1 - \lambda_s^{-2} \lambda_\theta^{-4}), \quad M_{(22)} = \frac{1}{3} \mu h^{\circ 3} \lambda_s^{-2} \lambda_\theta^{-4} (\kappa_\theta + \frac{1}{2} \kappa_s) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Наконец, из формул (6.2) — (6.4) и для h следует

$$\begin{aligned} r^\circ \lambda_\theta' + \cos \varphi \lambda_\theta - \cos \varphi \lambda_s &= 0, \quad r = r^\circ \lambda_\theta \\ x_s' + \lambda_s \sin \varphi &= 0, \quad h = \lambda_\xi h^\circ \end{aligned}$$

7. Случай симметричной деформации оболочек вращения можно рассмотреть и непосредственно, поскольку при этом меридианы и параллели являются линиями главных деформаций и напряжений. Для главных кратностей удлинений параллельных поверхностей ($\xi = \text{const}$) получаем вы-

ражения

$$\lambda_s^{\xi} = \lambda_s (1 + \xi \kappa_s), \quad \lambda_{\theta}^{\xi} = \lambda_{\theta} (1 + \xi \kappa_{\theta}), \quad \lambda_{\xi}^{\xi} = \lambda_{\xi} (1 + \xi \kappa_{\xi})$$

а для несжимаемого материала главные истинные напряжения подсчитываются по формулам

$$\sigma_i = \lambda_i^{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i^{\xi}} + p, \quad \sigma_{\xi} = \lambda_{\xi}^{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{\xi}^{\xi}} + p$$

В силу статической гипотезы Кирхгофа $\sigma_{\xi} = 0$ и

$$\sigma_i = \lambda_i^{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i^{\xi}} - \lambda_{\xi}^{\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_{\xi}^{\xi}} \quad (7.1)$$

Рассмотрим семейство упругих потенциалов

$$\Phi = (2\mu/n) [(\lambda_1^{\xi})^n + (\lambda_2^{\xi})^n + (\lambda_{\xi}^{\xi})^n - 3] \quad (7.2)$$

для которого по (7.1): $\sigma_i = (2\mu/n) [(\lambda_i^{\xi})^n - (\lambda_{\xi}^{\xi})^n]$.

Отсюда и из (6.7) находим с принятой точностью (1.16):

$$\sigma_1 = (2\mu/n) \{ (\lambda_s^n - \lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n}) + \xi n [2\lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n} (\kappa_s + 1/2 \kappa_{\theta}) + \kappa_s (\lambda_s^n - \lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n})] \}$$

Опуская подчеркнутые малые члены, отсюда и из аналогичного выражения для σ_2 получаем

$$\sigma_1/2\mu = (\lambda_s^n - \lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n})/n + \xi 2\lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n} (\kappa_s + 1/2 \kappa_{\theta})$$

$$\sigma_2/2\mu = (\lambda_{\theta}^n - \lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n})/n + \xi 2\lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n} (\kappa_{\theta} + 1/2 \kappa_s)$$

Отождествляя σ_i с σ_{ii} , из соотношений (6.6) находим

$$T_{(11)} = (2\mu/n) h^{\circ} \lambda_s^{-1} (\lambda_s^n - \lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n}), \quad T_{(22)} = (2\mu/n) h^{\circ} \lambda_{\theta}^{-1} (\lambda_{\theta}^n - \lambda_s^{-n} \lambda_{\theta}^{-n})$$

$$M_{(11)} = 1/3 \mu h^{\circ 3} \lambda_s^{-(n+2)} \lambda_{\theta}^{-(n+1)} (\kappa_s + 1/2 \kappa_{\theta})$$

$$M_{(22)} = 1/3 \mu h^{\circ 3} \lambda_{\theta}^{-(n+2)} \lambda_s^{-(n+1)} (\kappa_{\theta} + 1/2 \kappa_s)$$

Нетрудно проверить, что для неогукковского закона ($n=2$) полученные выражения совпадают с (6.8). Значению $n=1$ отвечает материал Бартенева — Хазановича. Можно рассматривать n и как упругую постоянную материала.

8. Рассмотрим задачу о сжатии конического резинового амортизатора с привулканизированными к торцам металлическими пластинами (фиг. 4). Размеры амортизатора: $H=6$ см, $r_1^{\circ}=1.8$ см, $r_2^{\circ}=5.2$ см, $\varphi^{\circ}=60^{\circ}$. Толщина амортизатора принимается равной своему среднему значению $h^{\circ}=1.3$ см. Считаем, что на нижнем основании имеют место условия заделки: $\lambda_{\theta}(s_2^{\circ})=1$, $x_3(s_2^{\circ})=x_3^{\circ}(s_2^{\circ})$, $\varphi(s_2^{\circ})=\varphi^{\circ}(s_2^{\circ})$, а на верхнем — скользящий шарнир: $\lambda_{\theta}(s_1^{\circ})=1$, $x_3(s_1^{\circ})=x_3^{\circ}(s_1^{\circ})-\Delta$, $M_{11}(s_1^{\circ})=0$.

На фиг. 5 показана экспериментальная зависимость (отмечена точками): сжимающая сила — осадка ($P-\Delta$, Н—м), расчетные кривые соответствуют следующим значениям модуля:

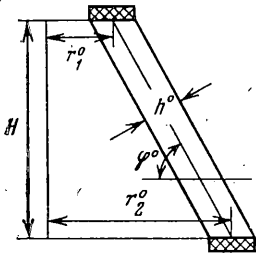
n	0.3	0.5	1	2
$E \cdot 10^5$ Па	55.2	54.6	53.2	50.8

С учетом толстостенности рассмотренного амортизатора и схематичности граничных условий совпадение расчета с экспериментом для $n=0.5$ и $n=1$ можно считать удовлетворительным.

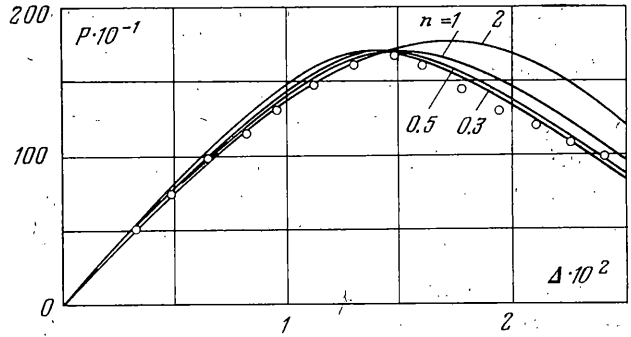
Сформулированная задача была рассмотрена С. С. Прасниковой «методом стрельбы», программа составлена на языке АЛГОЛ. Счет проводился на ЭЦВМ М-222. Эксперименты проведены инж. В. Е. Васильевым на машине «ИНСТРОН» при скорости захватов 1 мм/мин.

9. Детали предлагаемого подхода здесь не рассматривались. Отметим еще раз некоторые принципиальные места.

Как уже говорилось выше, применение двойного тензора напряжений позволяет использовать преимущества как эйлеровых, так и лагранжевых координат. Первый индекс относится к недеформированной конфигурации. Поэтому уравнения равновесия и граничные условия формулируются на площадках, положение которых известно. Симметричность же компонент двойного тензора облегчает введение (симметричных)



Фиг. 4



Фиг. 5

усилий — моментов и формулировку геометрической гипотезы. Второй индекс относится к деформированной конфигурации. Поэтому полученные скалярные зависимости являются составляющими векторных по деформированным материальным осям. Последнее, в частности, является удобным при рассмотрении вопросов устойчивости равновесия (выходящих за рамки данной публикации).

Уточнение геометрической гипотезы Кирхгофа (2.1), не повышая порядка разрешающей системы уравнений, позволяет учесть существенное при больших деформациях изменение толщины оболочки. При этом линейный закон деформирования поперечного волокна учитывает как тангенциальную, так и изгибную деформацию оболочки.

Как известно, хорошо обоснованным для теории тонких оболочек является принятие линейного закона распределения деформаций по толщине. В данной работе принят линейный закон и для распределения напряжений. При этом автор руководствовался следующими соображениями: для резиноподобных материалов в любой точке диаграммы деформация — напряжение последнюю можно считать локально-линейной. Если не рассматривать слишком больших изменений кривизны (перегибов) оболочки, то в силу ее тонкостенности изгибные деформации невелики, и им отвечает линейный (с касательным модулем) закон распределения напряжений. Отметим, что для основного варианта упругого закона для эластомеров (неогукковского материала) линейный закон является точным. Автором совместно с И. В. Зубовым была рассмотрена задача нелинейной теории упругости о цилиндрическом изгибе пластины. Полученное для семейства потенциалов (7.2) точное решение показало приемлемость для тонкой пластины линейного закона распределения напряжений по толщине (предположение о линейном распределении напряжений использовалось в работе В. И. Розенблюма [15] при построении приближенной теории идеально пластических оболочек).

Из п. 5 следует, что в предлагаемом подходе не используются уравнения совместности и функции напряжения. Нельзя полученные соотношения назвать и уравнениями в смещениях, поскольку не введены смещения. Вместо них разыскиваются непосредственно координаты деформированной срединной поверхности.

Отметим, что соотношения п. 6 для осесимметрично деформируемых оболочек вращения при малых деформациях и законе Гука совпадают с соответствующими зависимостями Е. Рейсснера [4].

Автор благодарен В. В. Новожилову, беседы с которым помогли придать работе большую практическую направленность.

Поступила 23 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Алузян Н. А. Теория упругих оболочек и пластинок. В сб.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972, стр. 227–266.
2. Галимов К. З. О некоторых направлениях развития механики деформированного тела в Казани. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек, вып. 12. Изд-во Казанск. ун-та, 1976.
3. Budiansky B. Notes on non-linear shell theory. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 2, p. 393–401.
4. Reissner E. On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution. Proc. Sympos. Appl. Math., vol. 3, Elasticity, New York, McGraw-Hill, 1950, p. 27–52.
5. Koiter W. T., Simmonds J. G. Foundations of shells theory. In: Theoretical and applied mechanics. Berlin, e. a., Springer, 1973, p. 150–176.
6. Naghdi P. M. The theory of shells and plates. In: Handbuch der Physik, Bd V1a/2. Berlin — Heidelberg — New York, Springer-Verlag, 1972, p. 425–640.
7. Pietraszkiewicz W. Lagrangian non-linear theory of shells. Arch. mech. stosowanej, 1974, vol. 2b, No. 2, p. 221–228.
8. Pietraszkiewicz W. Introduction to the non-linear theory of shells. Gdansk, 1977, p. 1–154.
9. Sanders J. L. Non-linear theories for thin shells. Quart. Appl. Math., 1963, vol. 21, No. 1, p. 21–36.
10. Simmonds J. G., Danielson D. A. Non-linear shell theory with finite rotation and stress-function vectors. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 4, p. 1085–1090.
11. Truesdell C., Noll W. The non-linear fields theories of mechanics. In: Handbuch der Physik, Bd 111/3, Berlin — Heidelberg — New York, Springer-Verlag, 1965.
12. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
13. Черных К. Ф. Основные зависимости нелинейной теории упругости. В сб.: Актуальные проблемы нелинейной механики сплошных сред. Изд-во ЛГУ, 1977.
14. Черных К. Ф. Линейная теория оболочек, ч. 2. Изд-во ЛГУ, 1964.
15. Розенблум В. И. Приближенная теория равновесия пластических оболочек. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.