

## ДИНАМИКА ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

В. А. САРАЙКИН

(Новосибирск)

Рассматриваются напряжения у края трещины, распространяющейся в линейно-упругой изотропной среде. Источником возмущений служат сжимающие напряжения, приложенные по нормали к поверхности трещины, одинаковые на верхнем и нижнем берегах. Оказывается, что при некоторых нагрузках на берегах трещины, край которой движется с постоянной скоростью, при увеличении параметра задачи — скорости вершины трещины наступает момент, когда растяжение у края сменяется на сжатие. Это значение скорости (оно меньше скорости волн Рэлея) является для трещины предельным, так как с дальнейшим ростом скорости трещины силы, действующие на продолжении, будут препятствовать ее развитию. Аналогичное явление наблюдается и при неравномерном движении вершины трещины. В этом случае смена вида напряженности состояния у края трещины связана с величиной ее средней скорости.

Для полубесконечной трещины приведены некоторые переменные нагрузки такого типа и вычислены значения предельных скоростей, соответствующие им. Установлено, что величина предельной скорости, зависящая существенным образом от нагрузки, может меняться в широком диапазоне: от нуля до скорости волн Рэлея. На примере одной автомоделной задачи показано, что предельные дорэлеевские скорости существуют не только для полубесконечных трещин, но и для трещин ограниченной длины.

**1. Полубесконечная трещина.** Пусть оси  $x, y, z$  прямоугольной системы координат ориентированы так, что полубесконечная трещина распространяется в плоскости  $z=0$ , занимая ее часть  $x < l(t)$ ,  $-\infty < y < \infty$  ( $t$  — время,  $l(t)$  — закон движения вершины). При  $t=0$  к поверхности трещины внезапно прикладываются нормальные напряжения  $\sigma_x = \sigma_-(t, x) \leq 0$ , одинаковые на верхнем и нижнем берегах и не зависящие от координаты  $y$ . Касательные усилия на берегах отсутствуют. Начальные условия — нулевые.

Общее решение этой плоской задачи при условии, что переменная скорость трещины удовлетворяет ограничениям  $0 \leq l'(t) = dl/dt < 1/c$  ( $c$  — величина, обратная скорости волн Рэлея), получено в [1]. Точное решение несколько упрощается, если отыскивать его, как указано в работах [2-4]. Согласно [4], в коэффициенте интенсивности напряжений  $K_I$  остаются лишь два интеграла, связанных с внешней нагрузкой и законом движения трещины,

$$K_I = \lim_{x \rightarrow l+0} \sqrt{2\pi(x-l)} \sigma_+(t, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_0(l) (-J_1 + J_2 + J_3) \quad (1.1)$$

$$J_1 = \int_{l-l/a}^l \sigma_-[t-a(l-\xi), \xi] \frac{d\xi}{\sqrt{l-\xi}}, \quad l=l(t)$$

$$J_2 = \sqrt{c-a} B \int_{t/c}^{t/a} (cu-t)^{-1/2} \int_{-l_0}^{t_1} \sigma_{-}' \left( \tau, l + \frac{\tau}{c} - u \right) d\tau du$$

$$J_3 = \int_a^b F_4(u) \int_{-0}^{t+0} \sigma_{-}' \left( t-\tau, l - \frac{\tau}{u} \right) \sqrt{\tau} d\tau du$$

$$F_4(u) = u^{-3/2} \int_a^b \frac{F_1(\omega)}{c-\omega} \sqrt{\frac{\omega-a}{\omega-u}} d\omega, \quad t_1 = \frac{t-au}{1-a/c}$$

$$k_0 = \frac{1-cl'}{\sqrt{1-al'}} \left( 1-l' \int_a^b \frac{F_2(u) du}{1-ul'} \right), \quad B = 1 - \int_a^b F_1(u) \frac{du}{c-u}$$

$$F_1(u) = \gamma(u) \exp[\chi(u)], \quad F_2(u) = -\gamma(u) \exp[-\chi(u)]$$

$$\gamma(u) = \frac{4}{\pi} u^2 \sqrt{u^2-a^2} \sqrt{b^2-u^2} [(b^2-2u^2)^4 + 16u^4(u^2-a^2)(b^2-u^2)]^{-1/2}$$

$$\chi(u) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \arctg[4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2-a^2} \sqrt{b^2-\alpha^2} (b^2-2\alpha^2)^{-2}] \frac{d\alpha}{\alpha-u}$$

$$\sigma_{-}'(\tau, f(\tau)) = \partial \sigma_{-}(\tau, \xi) / \partial \tau \quad \text{при} \quad \xi = f(\tau)$$

Здесь  $\sigma_z = \sigma_+(t, x)$  — нормальная составляющая тензора напряжений на продолжении трещины;  $a, b$  — величины, обратные скоростям волн расширения и сдвига:  $0 < a < b < c$ . Функции  $\chi, F_1, F_2, F_4$  не зависят от граничных условий и закона движения вершины трещины. Функция  $k_0(l')$  коэффициент динамичности, положительна, так как  $F_2 \leq 0, 1-ul' > 0$ . Слагаемое  $J_1$  соответствует статической части решения для полубесконечной трещины. Слагаемые  $J_2, J_3$ , содержащие под знаком интеграла производную по времени от нагрузки, описывают реакцию напряжения у края трещины на изменение внешнего воздействия, т. е. учитывают только динамику процесса.

Пусть на берега трещины действуют сосредоточенные силы, величина которых меняется во времени по степенному закону

$$\sigma_{-}(t, x) = -t^\lambda \delta(x) H(t) \quad (\lambda \geq 0) \quad (1.2)$$

где  $\delta$  — функция Дирака,  $H$  — функция Хевисайда,  $\lambda$  — вещественный параметр.

Положим в (1.2)  $\lambda = n = 0, 1, \dots$ . Тогда в коэффициенте интенсивности  $K_I$  выражение, заключенное в круглые скобки, определяется следующим образом:

$$Q_n = -J_1 + J_2 + J_3 = l^{n-1/2} \left[ \left( \frac{t}{l} - a \right)^n - \sum_{h=1}^n d_h g_h \left( \frac{t}{l} \right) + r f_n \left( \frac{t}{l} \right) H \left( c - \frac{t}{l} \right) \right] H \left( \frac{t}{l} - a \right) \quad (1.3)$$

$$g_h = B(c-a)^h \left( c - \frac{t}{l} \right)^{n-h} + \int_a^b \frac{F_1(u)}{c-u} (u-a)^h \left( u - \frac{t}{l} \right)^{n-h} du$$

$$f_n = B \sqrt{c-a} \left(c - \frac{t}{l}\right)^{n-1/2} + \int_{t/l}^b \frac{F_1(u)}{c-u} \sqrt{u-a} \left(u - \frac{t}{l}\right)^{n-1/2} du H\left(b - \frac{t}{l}\right)$$

$$r = -1 \quad (n=0), \quad r = \sum_{k=1}^n d_k \quad (n \geq 1), \quad d_k = (-1)^{n+k} \frac{n C_{n-1}^{k-1}}{k^{-1/2}}$$

где  $C_{n-1}^{k-1}$  — биномиальные коэффициенты.

Функции Хевисайда связаны здесь с приходом в вершину трещины фронтов волн, излученных источником. Например, условие  $t=al(t)$  определяет время, когда вершину трещины, движущуюся с переменной скоростью, достигает фронт волны расширения. Соответственно  $t=bl(t)$  и  $t=cl(t)$  указывают на вступления фронтов волн сдвига и Рэлея.

Приведем выражение (4.3) к виду, удобному для расчетов. Перегруппировав слагаемые с помощью биномиального разложения

$$\left(h - \frac{t}{l}\right)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n-k} (-1)^m C_{n-k}^m \left(\frac{t}{l} - a\right)^m (h-a)^{n-k-m} \quad (h=c, u)$$

и учитывая что

$$r = n \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{C_{n-1}^{k-1}}{k^{-1/2}} = (-1)^{n+1} \frac{2^n n!}{(2n-1)!!}$$

представим  $Q_n$  при  $t/l > c$  в виде полинома по степеням  $t/l - a$ . Окончательно для  $Q_n$  имеем

$$Q_n = l^{n-1/2} \left[ n! \sum_{m=0}^n \frac{(-2)^m A_m (t/l - a)^{n-m}}{(n-m)! (2m-1)!!} + r f_n \left(\frac{t}{l}\right) H\left(c - \frac{t}{l}\right) \right] H\left(\frac{t}{l} - a\right) \quad (4.4)$$

$$A_m = B(c-a)^m + \int_a^b \frac{F_1(u) (u-a)^m}{c-u} du$$

$$r = (-1)^{n+1} \frac{2^n n!}{(2n-1)!!}, \quad 0! = 1, \quad (-1)!! = 1, \quad l = l(t)$$

Величины  $A_m$  положительны, поскольку для всех значений коэффициента Пуассона  $\nu$  положительны функция  $F_1$  и постоянная  $B$ . Например для  $\nu = 0.2, 0.25, 0.3$  значения  $B$  равны: 0.559, 0.526, 0.494.

Посмотрим, как меняется знак у коэффициента интенсивности напряжения при разных  $n$ . Так как коэффициент динамичности  $k_0$  всегда положителен, для этого достаточно рассмотреть поведение множителя  $Q_n$ .

Пусть  $n=0$ :

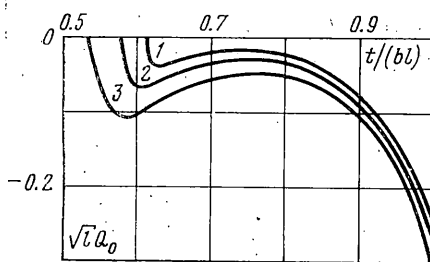
$$\sqrt{l} Q_0 = 1 - B \sqrt{\frac{c-a}{c-t/l}} H\left(c - \frac{t}{l}\right) - \int_{t/l}^b \frac{F_1(u)}{c-u} \sqrt{\frac{u-a}{u-t/l}} du H\left(b - \frac{t}{l}\right)$$

На фиг. 1 кривые 1-3 ( $\nu = 0.2, 0.25, 0.3$ ) показывают изменение  $\sqrt{l} Q_0$  в интервале  $a \leq t/l \leq b$ . Коэффициент интенсивности на этом интервале всегда отрицателен. Отрицателен он также, когда  $b < t/l < c$ :

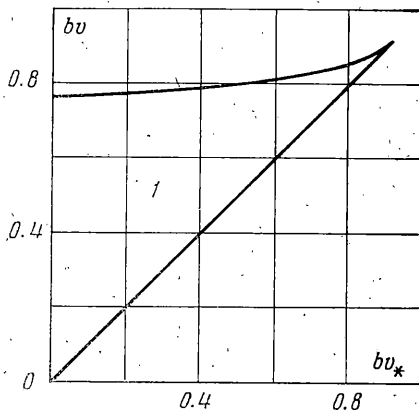
$$\sqrt{l} Q_0 = 1 - B(c-a)^{1/2} (c-t/l)^{-1/2}$$

Здесь сжатие в вершине трещины, нарастая от значения, достигнутого в точке  $t/l=b$ , становится неограниченным в момент прихода волны Рэлея. Позже, при  $t/l>c$ , напряжение у края трещины растягивающее:  $\sqrt{l}Q_0=1$  [5]. Таким образом, при постоянной сосредоточенной силе на берегах, какова бы ни была скорость трещины ( $0<l<1/c$ ), коэффициент интенсивности становится положительным, после того как вершину трещины минует быстро изменяющаяся часть возмущений ( $a<t/x<c$ ), излученных нагрузкой.

Пусть  $n=1$  и  $t/l>c$ ; тогда  $Q_1=l^{1/2}(t/l-a-2A_1)$ . Функция  $Q_1$  при достаточно большом значении  $t/l$  положительна. Смена знака происходит в точ-



Фиг. 1



Фиг. 2

ке  $t/l=1/v_1=a+2A_1$ . Расчеты, выполненные для  $v=0.2, 0.25, 0.3$ , показывают, что  $v_1<1/c$ .

Когда  $n>1$ , в интервале  $t/l>c$  по-прежнему имеется лишь один корень  $v_n$ , причем с ростом  $n$  величина  $v_n$  уменьшается, например, для  $n=2$  получаем

$$\frac{t}{l} = \frac{1}{v_2} = a + 2A_1 + \sqrt{A_1^2 - \frac{2}{3}A_2} > \frac{1}{v_1} \quad \left( A_1^2 - \frac{2}{3}A_2 > 0 \right)$$

Ниже приведены значения  $v_n$ , отнесенные к скорости волн сдвига.

$v$	$b/c$	$bv_{1/2}$	$bv_1$	$bv_2$	$bv_3$	$bv_4$	$bv_5$
0.2	0.911	0.855	0.7895	0.677	0.590	0.521	0.467
0.25	0.919	0.865	0.7980	0.681	0.589	0.518	0.461
0.3	0.927	0.873	0.8019	0.674	0.576	0.500	0.442

Объяснение причины<sup>1</sup>, вызвавшей появление предельной скорости, заключается в следующем. При постоянной сосредоточенной силе ( $n=0$ ) коэффициент интенсивности, как показано ранее, отрицателен, пока вершину трещины не минует фронт рэлеевской волны. Связано это с тем, что в задаче Лемба поверхность полупространства между фронтами волн расширения и Рэлея движется вниз (против действия силы) и лишь за фронтом рэлеевской волны вплоть до источника вверх — в направлении действия силы. Если обратиться к трещине, то между фронтами расширения и Рэлея ее берега заходят один за другой. При этом область, где берега трещины перекрестнулись, смещается со временем от источника к краю тре-

<sup>1</sup> Предложено Л. И. Слепяном.

щины. Достигая при  $t=al$  вершины, перехлест вызывает на ее продолжении сжатие, так как знак нормального напряжения у края связан со знаком перемещения в «носике» трещины (см. асимптотики (4.3) в [4]). Сжатие длится до тех пор, пока эти возмущения не минуют вершину трещины. Затем, при  $t>cl$ , трещина в носике начинает раскрываться, излучая на продолжение растягивающие напряжения.

Аппроксимируем в (1.2) закон изменения нагрузки при  $n>0$  ступенчатыми нагрузками, включаемыми последовательно через промежутки  $\tau$ :

$$\sigma_-(t, x) = -\delta(x) \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1}^n H(t_{k+1}-t) H(t-t_k), \quad t_{k+1}=t_k+\tau, \quad t_0=0$$

Возмущения, излученные каждой такой ступенькой, как и в случае  $n=0$ , образуют у края трещины сначала сжимающее, а уже затем растягивающее напряжение, но со сдвигом во времени. Чем больше  $k$ , тем больше амплитуда нагрузки, а следовательно, выше сжатие, соответствующее  $k$ -й ступеньке. При наложении всех возмущений сжимающие напряжения от нагрузок, включенных позже, оказываются настолько велики, что в некоторой области превышают растягивающие напряжения, образованные на продолжении включившимися раньше ступеньками нагрузки.

Положим, что закон движения трещины не произволен, а находится из критерия разрушения Гриффитса — Ирвина, обобщенного на случай динамики в [6, 7]. Трещина будет неподвижна, пока вершину не минуют возмущения, приводящие к перехлесту берегов, а следовательно, к отрицательным напряжениям у края. После этого коэффициент интенсивности напряжения становится положительным и, возрастая, в некоторый момент времени превысит значение статического коэффициента интенсивности для предельно равновесной трещины — начнется разрушение. Так как нагрузка продолжает расти, то и скорость движения вершины, определяемая из критерия, со временем увеличивается. Предположим, что скорость трещины достигла значения  $v_n$  и продолжает расти до скорости волн Рэлея. Средняя скорость трещины при этом также возрастает и в момент времени  $t_n$ , определяемый из уравнения  $v_n t_n = l(t_n)$ , у края трещины возникнет сжатие. Следовательно, скорость трещины, определяемая из критерия разрушения, может нарастать, превысив значение  $v_n$ , лишь на некотором начальном этапе развития трещины. При  $t \rightarrow \infty$  скорость трещины, убывая, должна стремиться к значению  $v_n$  так, чтобы средняя скорость трещины была меньше  $v_n$ .

Предельные скорости распространения трещины меньше скорости волн Рэлея существуют, по-видимому, и при положительных дробных значениях  $\lambda$  в (1.2). Во всяком случае для  $\lambda=1/2$ , когда решение определяется достаточно просто

$$Q_{1/2} = \sqrt{\frac{t}{l} - a - B\sqrt{c-a}} \Phi(c) - \int_a^b F_1(u) \Phi(u) \sqrt{u-a} \frac{du}{c-u} \quad (1.5)$$

$$\Phi(u) = \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{u-a}{t/l-u}} H\left(\frac{t}{l}-u\right) + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{u-a}{u-t/l}} H\left(u-\frac{t}{l}\right)$$

в интервале  $t/l > c$  имеется корень  $1/v_{1/2}$  (см. числовые расчеты).

Рассмотренный случай не является исключительным. Предельные скорости такого вида имеют место, например, при бегущей по поверхности

трещины нагрузке

$$\sigma_-(t, x) = -(v_*t - x)^n H(v_*t - x) H(t) \quad (1.6)$$

$$v_* < v, \quad 0 \leq v < 1/c \quad (n=0, 1, \dots)$$

где постоянные параметры  $v, v_*$  — скорости движения трещины ( $x=vt$ ) и нагрузки. В частности, при  $v_*=0$  выражение (1.6) определяет на берегах неподвижную нагрузку, растущую по закону  $(-x)^n H(-x)$ , когда  $x \rightarrow -\infty$ . Если  $v_*=v$ , то нагрузка движется вслед за вершиной трещины.

Опуская простые, но громоздкие выкладки, приведем результат подстановки (1.6) в (1.1):

$$Q_n = -J_1 + J_2 + J_3 = \left(\frac{t}{a}\right)^{n+1/2} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k^{1/2}} M_k \quad (1.7)$$

$$M_k = k_1(v_*) \Phi_k - B \Psi_k(c) - \int_a^b F_1(u) \Psi_k(u) \frac{dU}{c-u}$$

$$\Phi_k = \frac{(1-av_*)^{k+1}}{1-cv_*} \left[ 1 - \left( a \frac{v-v_*}{1-av_*} \right)^{k+1/2} \right] [a(v_*-v)]^{n-k}$$

$$\Psi_k(u) = \left(\frac{a}{u}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{a}{u}\right)^{k+1} \frac{(1-uv)^{n-k}}{1-uv_*}$$

$$k_1(v_*) = 1 - v_* \int_a^b \frac{F_1(u) du}{1-uv_*}$$

Функция  $k_1(v_*)$  положительна. В интервале  $[0, 1/c]$  она монотонно убывает от единицы до  $B$ .

Рассмотрим частные случаи. Пусть  $n=0$ , что соответствует нагрузке в виде бегущей со скоростью  $v_*$  ступеньки. Перед нагрузкой поверхность трещины свободна от напряжений. Из (1.7) имеем

$$Q_0 = 2 \sqrt{\frac{t}{a}} \left[ \frac{a}{c} D - k_1(v_*) \frac{\sqrt{a(v-v_*)(1-av_*)}}{1-cv_*} \right], \quad D = 1 + \int_a^b F_1(u) \frac{du}{u} \quad (1.8)$$

Постоянная  $D$  положительна. При  $v=0.2, 0.25, 0.3$  она равна соответственно 1.2272, 1.2559, 1.2888. Перемена знака у  $Q_0$  происходит при скорости трещины, равной

$$v_0(v_*) = v_* + \frac{a(1-cv_*)^2 D^2}{c^2(1-av_*)k^2(v_*)} \quad (1.9)$$

На фиг. 2 представлена зависимость (1.9) для  $v=0.25$ . По оси абсцисс отложена скорость нагрузки, отнесенная к скорости волн сдвига, а по оси ординат безразмерная величина  $bv$ . Если скорость трещины такова, что  $v_* < v < v_0(v_*)$  (обл. 1), то коэффициент интенсивности положителен. При движении трещины со скоростью, превышающей  $v_0(v_*)$ , напряжение в вершине трещины становится сжимающим.

Для  $v=0.2, 0.3$  зависимость, изображенная на фиг. 2, практически не меняется. Наименьшая предельная скорость у трещины наблюдается при

неподвижной нагрузке. Для  $v=0.2, 0.25, 0.3$  она равна по величине 0.7636, 0.7653, 0.7698 от значения скорости волн сдвига, что составляет примерно 0.81 — 0.83 от скорости волн Рэлея.

При равномерной распределенной по всей длине трещины нагрузке, т.е. при  $v_* = v$ , напряжение у края трещины всегда положительно  $Q_0 = 2\sqrt{at}D/c$ .

В этом случае  $v_*$  и  $v$  не являются независимыми величинами и определяются диагональю на фиг. 2.

Таким образом, если расстояние между краем трещины и бегущей вслед нагрузкой увеличивается со временем, то имеется предельная скорость распространения трещины. Эта скорость совпадает со скоростью волн Рэлея, когда нагрузка движется вместе с вершиной трещины. Посмотрим, какова связь между скоростью движения ступенчатой нагрузки и предельной скоростью еще на одном примере

$$\sigma_-(t, x) = -H(vt - x - x_0)H(t) \quad (x_0 \geq 0) \quad (1.10)$$

Здесь нагрузка следует за вершиной трещины на расстоянии  $x_0$ . При  $x_0 = 0$  получаем рассмотренный ранее случай  $v_* = v$ .

Подставив (1.10) в (1.1), получим при  $t/(x_0 + vt) > c$  (когда трещину минует фронт рэлеевской волны, пришедший от края нагрузки) выражение, напоминающее (1.8):

$$Q_0 = 2\sqrt{\frac{t}{a}} \left[ \frac{a}{c} D - k_1(v) \sqrt{a \frac{x_0}{t} (1 - av)} \right] / (1 - cv)$$

Однако в отличие от решения при равномерной нагрузке ( $x_0 = 0$ ) здесь коэффициент интенсивности всегда отрицателен, когда  $v = 1/c$ . Лишь при  $x_0/t \rightarrow 0$  предельная скорость приближается к скорости волн Рэлея. Отсюда можно сделать вывод, что понижение значения предельной скорости связано с неравномерностью распределения нагрузки вдоль берегов трещины.

Обратимся вновь к (1.7), полагая там  $v_* = v$ ,  $n > 0$ . Выражения (1.7) можно преобразовать к следующему виду:

$$Q_n = -\frac{1}{2n+1} \left(\frac{t}{a}\right)^{n+1/2} \sum_{m=0}^n B_m (-v)^{n-m} \quad (1.11)$$

$$B_m = \sum_{i=n-m}^n \frac{C_i}{n-i-1/2} \left[ B \frac{(c-a)^{n-i}}{c^{m+1}} + \int_a^b F_1(u) \frac{(u-a)^{n-i}}{u^{m+1}} \frac{du}{(c-u)} \right]$$

При расчете корней функции  $Q_n(v)$  обнаружен любопытный факт: функция  $Q_n(v)$  отрицательна в интервале  $[0, 1/c]$  при  $n \geq 3$ . Иными словами, если величина нагрузки с удалением от вершины растет вдоль берега быстрее, чем кубическая парабола, то напряжение у края трещины всегда будет сжимающим, даже для неподвижной трещины. В данном случае область, где берега трещины заходят один за другой не исчезает с течением времени, а наоборот расширяется. Распространение перехлеста берегов в сторону отрицательных значений  $x$  приводит к тому, что трещина постепенно как бы «зажимается». Если  $n=1, 2, 3$ , то напряжение у края трещины положительно при  $v < v_n$  (см. приведенные ниже результаты).

$v$	$bv_1$	$bv_2$	$bv_3$	$bv_4$
0.2	0.728	0.475	0.201	< 0
0.25	0.721	0.417	0.079	< 0
0.3	0.688	0.280	< 0	< 0

Разобранные примеры дают некоторое представление о нагрузках, при которых появляются дорэлеевские предельные скорости. Для них характерны, во-первых, нарастание со временем, во-вторых, неравномерность распределения вдоль берега трещины.

**2. Автомоделная задача.** В п. 1 была рассмотрена полубесконечная трещина. Для ограниченных трещин при некоторых переменных нагрузках тоже существуют предельные скорости. В качестве примера приведем решение плоской автомоделной задачи о трещине, расширяющейся в обе стороны с постоянной скоростью  $v$ . Пусть положение трещины при  $t > 0$  определяется отрезком  $|x| < vt$ , причем движение осуществляется так, что  $v < 1/c$ . Тогда, если на берегах заданы нормальные напряжения

$$\sigma_{-}(t, x) = -t^m \delta(x) H(t) \quad (m=0, 1, \dots) \quad (2.1)$$

то при нулевых начальных условиях напряжение  $\sigma(t, x) = \sigma_{+}(t, x) + \sigma_{-}(t, x)$  может быть представлено следующим образом [4]:

$$\sigma(t, x) = \lim_{y \rightarrow 0} [\sigma(t, x+iy) - \sigma(t, x-iy)]$$

$$\sigma(t, z) = \begin{cases} G(z/t)/(2\pi iz), & z=x+iy \quad (m=0) \\ \frac{1}{2\pi iz(m-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} G\left(\frac{z}{\tau}\right) d\tau & (m \geq 1) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$G\left(\frac{z}{t}\right) = \frac{w_0(z/t)}{S_0(z/t)} \left\{ \frac{m! S_0(+i0)}{w_0(+i0)} + z \sum_{h=0}^{m-1} k! A_h t^h [(z+vt)^{-h-1} + (z-vt)^{-h-1}] \right\}$$

$$S_0\left(\frac{z}{t}\right) = i \frac{b^2 z^2}{\mu t^2} \sqrt{1 - a^2 \frac{z^2}{t^2}} / \left[ 4 \sqrt{1 - a^2 \frac{z^2}{t^2}} \sqrt{1 - b^2 \frac{z^2}{t^2}} - \left(2 - b^2 \frac{z^2}{t^2}\right)^2 \right]$$

$$w_0\left(\frac{z}{t}\right) = \left(v^2 - \frac{z^2}{t^2}\right)^{-1/2}$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига,  $S_0(z/t)$  — аналитическая функция на плоскости  $z/t$  с разрезом  $[-1/a, 1/a]$ ,  $\sigma(t, z)$  аналитическое представление напряжения.

Константы  $A_h$ , которые появляются в решении при  $m \geq 1$ , находятся из линейной системы уравнений

$$\int_0^{1/v+0} \xi^h G\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi = 0 \quad (h=0, 1, \dots, m-1) \quad (2.3)$$

где  $G(x/t)$  — скачок функции  $G(z/t)$  при  $|x| \geq vt$ .

Интенсивность напряжения определяется выражениями

$$K_I = \lim_{x \rightarrow vt+0} \sqrt{2\pi(x-vt)} \sigma_{+} = \frac{2d_m}{\sqrt{\pi vt} X(v)} \left(-\frac{t}{v}\right)^m$$

$$X(v) = -iS_0(v+i0), \quad d_0 = X(0), \quad d_m = iA_m \quad (m \geq 1) \quad (2.4)$$

Рассмотрим частные случаи. Параметру  $m=0$  соответствует постоянная сосредоточенная сила. Коэффициент интенсивности положителен  $K_I = X(0) (\pi vt)^{-1/2} / X(v)$  и убывает до нуля при  $v \rightarrow 1/c$ .



Если  $m=1$ , то условие (2.3) принимает вид

$$\int_0^{1/v+0} [G(\xi^{-1}+i0) - G(\xi^{-1}-i0)] d\xi = 0$$

Деформируя контуры интегрирования с верхнего берега разреза (первое слагаемое) на положительную мнимую полуось, а с нижнего — на отрицательную, представляем постоянную  $A_0$  через полные эллиптические интегралы первого и второго рода  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} A_0 &= iv^3 q_1^2 X(0) A^\circ(v) / [2D(v)], \quad q_1^2 = 1 - a^2 v^2, \quad q_2^2 = 1 - b^2 v^2 \\ A^\circ(v) &= v^{-2} \{ 4(b^2 - 2/3 a^2) \mathbf{E}(q_1) + (4/3 a^2 - b^4 v^2) \mathbf{K}(q_1) - \\ &\quad - 4/3 b^2 [\mathbf{E}(q_2) + \mathbf{K}(q_2)] + 8/3 [\mathbf{E}(q_2) - \mathbf{E}(q_1)] / v^2 \} \\ D(v) &= (4a^2 v^2 q_2^2 + b^4 v^4) \mathbf{K}(q_1) - 4b^2 v^2 q_1^2 \mathbf{K}(q_2) - \\ &\quad - (4q_1^2 + 4q_2^2 + b^4 v^4) \mathbf{E}(q_1) + 8q_1 \mathbf{E}(q_2) \end{aligned}$$

Интенсивность напряжения, как следует из (2.4), определяется так:

$$K_I = v^3 q_1^2 \frac{X(0) A^\circ(v)}{X(v) D(v)} \sqrt{\frac{vt}{\pi}}$$

Функции  $X(v)$ ,  $D(v)$  положительны, когда  $v$  изменяется от нуля до скорости волн Рэлея, а  $A^\circ(v)$  в этом интервале убывает, меняя знак в точке  $v=v_1$ . Значения корня  $v_1$ , отнесенные к скорости волн сдвига, при  $\nu=0.2, 0.25, 0.3$  равны 0.7895, 0.7979, 0.8017. Они практически совпадают со значениями  $v_1$  для полубесконечной трещины при такой же нагрузке.

Отметим, что перемещение верхнего, например, берега трещины, определяемое при  $m=1$  выражением

$$w = \frac{X(0)}{\pi v} \left[ vt \operatorname{arch} \frac{vt}{|x|} - C \sqrt{v^2 t^2 - x^2} \right], \quad C = 1 - v^4 q_1^2 \frac{A^\circ(v)}{D(v)}$$

положительно, если  $v < v_1$ . Тогда  $C < 1$  и потому производная

$$\partial w / \partial x = X(0) (Cx^2 - v^2 t^2) (v^2 t^2 - x^2)^{-1/2} / (\pi v x)$$

отрицательна при  $0 < x < vt$ . Если трещина движется с большей, чем  $v_1$ , скоростью, то в точках  $|x|/t = v/\sqrt{C} < v$  функции  $w$  появляется отрицательный минимум. В этом случае перемещение в некоторой окрестности вершины трещины отрицательно, т. е. имеет место перехлест берегов.

Разобранные в работе примеры показывают, что характер нагружения берегов упругой трещины, распределение нагрузки на берегах оказывают существенное влияние на интенсивность напряжения у края трещины. В частности, в некоторых случаях нестационарная нагрузка определяет предельную скорость трещины, значительно меньшую, чем скорость волн Рэлея. Можно предположить, что наряду с другими факторами (например, нагревом в вершине трещины) это обстоятельство также способствует понижению предельной скорости трещины до 0.2–0.5 от скорости волн Рэлея, наблюдаемому в экспериментах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Костров Б. В. Распространение трещин с переменной скоростью. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
2. Слепян Л. И. Приближенная модель динамики трещины. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 19–20. Новосибирск, Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1974.
3. Слепян Л. И., Троянкина Л. В. Теория трещин. Основные представления и результаты. Л., «Судостроение», 1976.
4. Сарайкин В. А., Слепян Л. И. Плоская задача о динамике трещины в упругом теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4.
5. Freund L. V. Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. J. Mech. and Phys. Solids, 1972, vol. 20, No. 3.
6. Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М. Механика хрупкого разрушения. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.
7. Шер Е. Н. Об энергетическом условии в носике нестационарной трещины. ПМТФ, 1969, № 3.