

## ВЛИЯНИЕ МАЛОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ХАРАКТЕР НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ

Ю. М. ДАЛЬ

(Ленинград)

Выведены приближенные геометрически нелинейные соотношения для напряжений и перемещений, возникающих на контуре эллиптического выреза в упругой плоскости. Показано, что для низкомодульных материалов типа резин необходимо учитывать геометрическую нелинейность задачи. Отмечается зависимость коэффициента концентрации напряжений от уровня действующей нагрузки. Доказано существование у хрупких трещин предельного эффективного радиуса кривизны их конца.

1. Современная теория хрупких трещин развивается главным образом с помощью аппарата сингулярных интегральных уравнений. В ее основе лежит решение задачи Римана — Гильберта об определении аналитической функции по заданному скачку на конечном или бесконечном числе разрезов в упругой плоскости [1]. Поскольку краевые условия удовлетворяются здесь на исходных недеформированных контурах разрезов, данная теория применяется для анализа прочности (с позиций линейной теории упругости) тел с трещинами, находящихся в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния.

Существует, однако, иной подход к этой проблеме. Он базируется на использовании известного линейного решения для канонических областей, ограниченных окружностью, когда произвольная односвязная область  $P(z)$  сводится к канонической  $\Omega(\xi)$  посредством конформного отображения  $z = \omega(\xi)$ .

В механике разрушения метод конформного преобразования оказывается пригодным в случае одной трещины, причем решение получается здесь не на основной  $z$ , а на вспомогательной плоскости  $\xi$ . Несмотря на очевидное математическое несовершенство этого способа по сравнению с методом интегральных уравнений, с точки зрения механики он обладает двумя чрезвычайно важными преимуществами. Во-первых, он позволяет отказаться от трактовки трещин как разрезов нулевой толщины, заэкранированных от сил межуатомного взаимодействия [2], и, во-вторых, на его основе представляется возможным учесть влияние малой геометрической нелинейности на величины упругих напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины.

Отправным моментом во всех последующих рассуждениях является следующее утверждение: при произвольных равномерных напряжениях на бесконечности деформированный контур эллиптического выреза (в частности, трещины) остается эллиптическим.

*Доказательство.* Пусть в плоскости комплексного переменного  $z$  имеется эллиптическое отверстие  $L$  с главными полуосями  $a_0$  и  $b_0$  ( $a_0 > b_0$ ). Совместим начало декартовой системы координат с центром отверстия, а оси  $ox$  и  $oy$  направим соответственно вдоль его большой и малой оси. Предполо-

жим далее, что контур  $L$  свободен от действия внешних нагрузок, а на бесконечности приложены усилия интенсивности  $\sigma_1 = \text{const}$  в направлении, составляющем угол  $\alpha_1$  с осью  $ox$ , и интенсивности  $\sigma_2 = \text{const}$  в направлении  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$  к той же оси. Задание  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  эквивалентно определению в системе координат  $xu$  напряжений  $\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y^\infty$ ,  $\tau_{xy}^\infty$ , так как

$$\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + i\tau_{xy}^\infty = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \exp(-2i\alpha_1).$$

Решение данной задачи имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{R}{4} \left[ (\sigma_1 + \sigma_2) \left( \xi - \frac{m}{\xi} \right) + \frac{2e^{2i\alpha_1}}{\xi} (\sigma_1 - \sigma_2) \right] \\ \psi(\xi) &= \frac{R}{2} \left\{ (\sigma_2 - \sigma_1) \left[ \xi e^{-2i\alpha_1} + \frac{e^{2i\alpha_1}}{m\xi} - \frac{(1+m^2)\xi e^{2i\alpha_1}}{m(\xi^2 - m)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{(1+m^2)\xi}{\xi^2 - m} \right\} \\ z = \omega(\xi) &= R \left( \xi + \frac{m}{\xi} \right), \quad R = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad m = \frac{a_0 - b_0}{a_0 + b_0} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функции  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  связаны с компонентами перемещения  $u$  — по направлению оси  $ox$  и  $v$  — по направлению оси  $oy$  зависимостью

$$2G(u+iv) = \kappa\varphi(\xi) - \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)} \overline{\varphi'(\xi)} - \overline{\psi(\xi)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.2)$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации и  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  при обобщенном плоском напряженном состоянии.

Внося выражения (1.1) в формулу (1.2), получаем

$$\begin{aligned} 2G(u+iv) &= \frac{\kappa R}{4} \left[ (\sigma_1 + \sigma_2) \left( \xi - \frac{m}{\xi} \right) + \frac{2}{\xi} (\sigma_1 - \sigma_2) e^{2i\alpha_1} \right] - \\ &\quad - \frac{R}{4\xi(\xi^2 - m)} \left\{ (\sigma_1 + \sigma_2) [(\bar{\xi}^2 + m)(\xi^2 + m) - 2(1+m^2)\xi\bar{\xi}] + \right. \\ &\quad \left. + 2(\sigma_1 - \sigma_2) \left[ \frac{e^{-2i\alpha_1}}{\xi} (\xi - m\bar{\xi})(1 - \xi\bar{\xi}) - e^{2i\alpha_1}(\bar{\xi}^2 - m)\xi\bar{\xi} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выведенная зависимость справедлива при  $|\xi| \geq 1$ . В частности, окружность единичного радиуса  $\xi = \sigma = e^{i\theta}$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) отображается на эллипс

$$z_0 = x_0 + iy_0 = R \left( \sigma + \frac{m}{\sigma} \right), \quad x_0 = a_0 \cos \theta, \quad y_0 = b_0 \sin \theta \quad (1.4)$$

Устремим в уравнении (1.3) переменную  $\xi \rightarrow \sigma$ . Принимая во внимание очевидное соотношение  $\sigma\bar{\sigma} = 1$ , из (1.3) находим перемещение контура эллиптического отверстия

$$\begin{aligned} \Delta z_0 = u_0 + iv_0 &= \frac{(1+\kappa)}{8G} \left[ (\sigma_1 + \sigma_2) z_0 + \frac{RS}{\sigma} \right] \\ S &= 2 [ (\sigma_1 - \sigma_2) e^{2i\alpha_1} - (\sigma_1 + \sigma_2) m ] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Условимся обозначать индексом  $z_0' = x_0' + iy_0'$  координаты контура эллиптического отверстия после деформации. Очевидно,  $z_0' = z_0 + \Delta z_0$ . Отсюда на основании (1.4) и (1.5) имеем

$$\begin{aligned} x_0' &= \left[ a_0 + \frac{(1+\kappa)(\sigma_1 + \sigma_2)a_0}{8G} + \frac{(1+\kappa)(a_0 + b_0)S}{16G} \right] \cos \vartheta \\ y_0' &= \left[ b_0 + \frac{(1+\kappa)(\sigma_1 + \sigma_2)b_0}{8G} - \frac{(1+\kappa)(a_0 + b_0)S}{16G} \right] \sin \vartheta \end{aligned} \quad (1.6)$$

Пусть в выражениях (1.6) параметр  $S$  — действительная величина (это имеет место, когда угол  $\alpha_1$  равен либо нулю, либо  $\pi/2$ ). Сопоставляя (1.6) с (1.4), убеждаемся в том, что деформированный контур отверстия остается эллиптическим, причем его главные оси до и после деформации совпадают по направлению. Таким образом, *утверждение* доказано для веществных  $S$ , т. е. при двусносном нагружении упругой плоскости усилиями  $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$  (в общем случае  $\sigma_x^\infty \neq \sigma_y^\infty$ ).

Предположим теперь, что  $S$  принимает комплексные значения, последнее равносильно условию  $\tau_{xy}^\infty \neq 0$ . Представим (1.6) в виде

$$\begin{aligned} z_0' &= z_0 \alpha + z_0 \delta - \bar{z}_0 \delta, \quad \delta = -\frac{(1+\kappa)S}{32G} \left( 2 + \frac{b_0}{a_0} + \frac{a_0}{b_0} \right) \\ \alpha &= 1 + \frac{(1+\kappa)(\sigma_1 + \sigma_2)}{8G} + \frac{(1+\kappa)(1 + b_0/a_0)S}{16G} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Равенство (1.7) дает закон преобразования координат точек контура исходного эллиптического выреза в их окончательное положение. Как известно из теории функций комплексного переменного, первое слагаемое в (1.7) растягивает начальный контур  $z_0$  в  $|\alpha|$  раз и поворачивает его как твердое целое вокруг точки  $z=0$  на угол  $\arg \alpha$ . Два остальных слагаемых  $z_0 \delta - \bar{z}_0 \delta$  в совокупности (но не порознь) не вызывают ни растяжения, ни поворота; определяющую роль при этом играет симметрия исходного выреза относительно оси  $ox$  [3]. Следовательно, и при комплексном  $S$  деформированный контур остается эллиптическим. Существенное отличие от предыдущего случая заключается, однако, в том, что в окончательном положении главные оси отверстия оказываются повернутыми на угол  $\arg \alpha$ . Итак, *утверждение* доказано полностью. При этом, естественно, исключается из рассмотрения физически нереальный случай, когда в процессе нагружения происходит взаимное перехлестывание противоположных кромок трещины (сжатие вдоль оси  $oy$ ).

2. Располагая результатами п. 1, попытаемся учесть основные моменты, связанные с геометрической нелинейностью рассматриваемой проблемы. Основу дальнейшего анализа будет составлять следующая *гипотеза*: бесконечно малое изменение нагрузки на бесконечности вызывает в окрестности эллиптического выреза приращение компонент напряжений и перемещений, зависящее только от текущей формы отверстия.

Иными словами, будем считать соотношения (1.6) справедливыми при замене параметров  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно на  $d\sigma_1$  и  $d\sigma_2$  ( $|d\sigma_1| \ll |\sigma_1|$ ,  $|d\sigma_2| \ll |\sigma_2|$ ).

Рассмотрим сначала наиболее интересный для практики случай одноосного растяжения плоскости усилиями  $\sigma_1 = \sigma_y^\infty = p_y = \text{const} > 0$  ( $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\sigma_2 = 0$ ). На основании принятой гипотезы и формул (1.5), (1.6) приращения длин большой и малой оси отверстия будут

$$a_i = a_{i-1} \left( 1 - \frac{c}{E} dp_y^{i-1} \right), \quad b_i = b_{i-1} \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^{i-1} \right) +$$

$$+ \frac{2c}{E} a_{i-1} dp_y^{i-1}, \quad c = \frac{(1+\nu)(1+\kappa)}{4} \quad (2.1)$$

где  $c=1-\nu^2$  для плоской деформации и  $c=1$  при обобщенном плоском напряженном состоянии.

Обозначим окончательные длины большой и малой оси выреза через  $a_n$  и  $b_n$ . Из (2.1) вытекает

$$a_n = a_0 \left[ 1 - \frac{c}{E} dp_y^0 \right] \left[ 1 - \frac{c}{E} dp_y^1 \right] \dots \left[ 1 - \frac{c}{E} dp_y^{n-1} \right] \quad (2.2)$$

Примем

$$dp_y^0 = dp_y^1 = \dots = dp_y^{n-1} = p_y/n \quad (2.3)$$

Тогда выражение для  $a_n$  можно переписать в виде

$$a_n = a_0 (1 - \gamma/n)^n, \quad \gamma = cp_y/E \quad (2.4)$$

Устремляя в этом равенстве  $n \rightarrow \infty$ , находим

$$a_* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0 e^{-\gamma} \quad (2.5)$$

Зависимость для  $b_n$  представим в форме

$$\begin{aligned} b_n = & b_0 \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^0 \right) \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^1 \right) \dots \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^{n-1} \right) + \\ & + \frac{2c}{E} \left[ a_0 dp_y^0 \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^1 \right) \dots \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^{n-1} \right) + \right. \\ & + a_1 dp_y^1 \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^2 \right) \dots \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^{n-1} \right) + \\ & + \dots + \\ & \left. + a_{n-2} dp_y^{n-2} \left( 1 + \frac{c}{E} dp_y^{n-1} \right) + a_{n-1} dp_y^{n-1} \right] \end{aligned}$$

Учитывая (2.3) и (2.4), преобразуем последнее равенство к виду

$$\begin{aligned} b_n = & b_0 \left( 1 + \frac{\gamma}{n} \right)^n + \frac{2\gamma a_0}{n} \left( 1 + \frac{\gamma}{n} \right)^{n-1} \left[ 1 + \frac{1-\gamma/n}{1+\gamma/n} + \right. \\ & \left. + \frac{(1-\gamma/n)^2}{(1+\gamma/n)^2} + \dots + \frac{(1-\gamma/n)^{n-1}}{(1+\gamma/n)^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

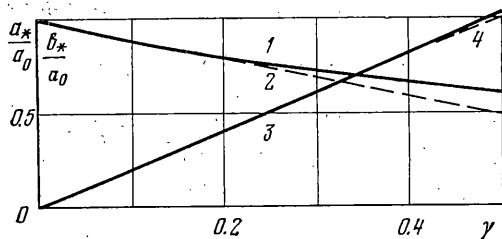
Выражение в квадратных скобках представляет собой не что иное, как сумму  $n$  слагаемых геометрической прогрессии со знаменателем  $q = (1-\gamma/n)/(1+\gamma/n) < 1$ . Поэтому

$$b_n = b_0 \left( 1 + \frac{\gamma}{n} \right)^n + a_0 \left( 1 + \frac{\gamma}{n} \right)^n \left[ 1 - \frac{(1-\gamma/n)^n}{(1+\gamma/n)^n} \right] \quad (2.6)$$

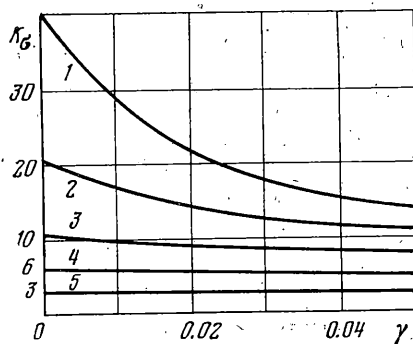
Устремим в (2.6) параметр  $n \rightarrow \infty$ . Совершая предельный переход, будем иметь

$$b_* = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_0 e^\gamma + a_0 (e^\gamma - e^{-\gamma}) \quad (2.7)$$

На фиг. 1 сплошной кривой 1 изображена зависимость  $a_*/a_0 = f_1(\gamma)$ , вычисленная по формуле (2.5); пунктирная прямая 2 отвечает величинам



Фиг. 1



Фиг. 2

$a_*/a_0 = f_2(\gamma)$ , построенным по соотношениям (1.6). График функции  $b_*/a_0 = f_3(b_0/a_0, \gamma)$ , определенный, согласно (2.7), для  $b_0/a_0 = 0$ , соответствует кривой 3; значения  $b_*/a_0$ , вычисленные на основе (1.6), показаны пунктирной прямой 4.

По имеющимся оценкам прочность на разрыв бездефектной атомной решетки  $\sigma_c \approx 0.1 E$ . Обращаясь к графикам на фиг. 1, видим, что в таких кристаллических материалах, как металлы, перемещения около вершины трещины с достаточной степенью точности можно вычислять по формулам линейной теории упругости (здесь не учитываются, разумеется, эффекты пластического течения у вершины разреза). Совершенно иначе обстоит дело для низко модульных материалов типа мягких резин. Последние подчиняются закону Гука при деформациях до  $\approx 50\%$  [4] и сохраняют свою работоспособность, когда  $p_y/E > 1$ . Поэтому для оценки их прочности и жесткости учет геометрической нелинейности имеет первостепенное значение [5].

Согласно принятой гипотезе и классическому решению [1], приращение упругих напряжений в конце большой оси отверстия определяется формулой  $d\sigma_+^i = (1 + 2a_i/b_i) dp_y^i$ . Окончательная величина напряжений в данной точке будет

$$\begin{aligned} \sigma_+^n &= \left(1 + 2\frac{a_0}{b_0}\right) dp_y^0 + \left(1 + 2\frac{a_1}{b_1}\right) dp_y^1 + \dots + \left(1 + 2\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right) dp_y^{n-1} = \\ &= (dp_y^0 + dp_y^1 + \dots + dp_y^{n-1}) + 2 \left( \frac{a_0}{b_0} dp_y^0 + \frac{a_1}{b_1} dp_y^1 + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} dp_y^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Поскольку при вычислении  $\sigma_+^n$  используется принцип суммирования линейных решений, полученные ниже результаты следует рассматривать для больших деформаций как приближенные, несмотря на то что на оси  $ox$  отсутствуют повороты.

Принимая во внимание (2.3), запишем это соотношение в виде

$$\sigma_+^n = p_y + 2p_y \frac{1}{n} \left( \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \right) \quad (2.8)$$

По теореме Штольца [6]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{a_0}{b_0} + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \quad (2.9)$$

На основании (2.4) и (2.6) будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{a_*}{b_*} \quad (2.10)$$

Введем обозначение  $\sigma_+^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_+^n$ . Переходя в равенстве (2.8) к пределу и учитывая при этом (2.9) и (2.10), находим

$$\sigma_+^* = p_y \left( 1 + 2 \frac{a^*}{b^*} \right) \quad (2.11)$$

Подавляющее большинство конструкционных материалов разрушается при нагрузках  $p_y$ , существенно меньших их теоретического предела прочности. Так как в данном случае  $\gamma = cp_y/E \ll 1$ , из (2.11), (2.5), (2.7) получаем такую асимптотическую зависимость для коэффициента концентрации напряжений:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_+^*}{p_y} \approx 1 + \frac{2}{b_0/a_0 + 2cp_y/E} \quad (2.12)$$

Таким образом, параметр  $K_\sigma$  не является постоянной величиной, а зависит от уровня действующих напряжений  $p_y$  [7]. На фиг. 2 кривые 1–5 соответствуют  $K_\sigma$  для эллиптических отверстий с отношением  $b_0/a_0 = 0.05, 0.10, 0.20, 0.40, 1.0$ .

Если  $2cp_y/E \ll b_0/a_0$ , то выражение (2.12) переходит в известное соотношение линейной теории упругости

$$K_\sigma \approx 1 + 2a_0/b_0 \quad (2.13)$$

Из изложенного выше следует, что использование решения (2.13) возможно лишь при соблюдении двух следующих условий: отношение  $cp_y/E$  должно быть мало по сравнению с единицей, удвоенная величина этого отношения должна быть мала по сравнению с частным  $b_0/a_0$ .

Последнее условие означает, грубо говоря, что эллиптический вырез не должен быть очень тонким, т. е.  $b_0/a_0 = O(1)$ .

Макроскопические трещины в металлах характерны, наоборот, чрезвычайно малым отношением  $b_0/a_0 = o(1)$ . Если, помимо того, величина  $b_0/a_0 = o(cp_y/E)$ , то в знаменателе формулы (2.12) можно пренебречь первым слагаемым по сравнению со вторым. В результате подобного упрощения будем иметь

$$\sigma_+^* \approx p_y (1 + E/cp_y) \quad (2.14)$$

Под трещиной при этом подразумевается эллиптическая полость с очень малым, но конечным отношением  $b_0/a_0 = 2(\rho^*/a_0)^{1/2}$ , где  $\rho^*$  — атомный радиус кристаллической решетки [8]. Подчеркнем, что хотя в формуле (2.11) формально и возможен предельный переход при  $b_0 \rightarrow 0$ , фактически его делать нельзя, ибо в противном случае в выражении (2.8), на основании которого выведена формула (2.11), первое слагаемое обращается в бесконечность.

Итак, начиная с некоторого  $b_0 \sim o(a_0)$ , дальнейшее уменьшение малой оси выреза (или, что то же самое, радиуса кривизны  $r_0$  в вершине большой оси отверстия) практически не вызывает изменения  $\sigma_+^*$ . Следовательно, на основании первой теории прочности, разрушающее напряжение  $p_y^*$  не должно быть чувствительным к изменению величины  $b_0(r_0)$  в диапазоне  $0 < b_0 < b_0 \sim (0 < r_0 < r_0 \sim)$ ; ряд экспериментальных данных подтверждает этот вывод [9].

Минимальное напряжение на эллиптическом контуре возникает в точке пересечения с осью  $oy$ . Из решения линейной задачи  $d\sigma_-^i = -dp_y^i$ , поэтому  $\sigma_-^* = -(dp_y^0 + dp_y^1 + \dots + dp_y^{n-1}) = -p_y$ . Как видим, напряжение  $\sigma_-^*$  оказывается совпадающим с аналогичной величиной, найденной по соотношениям линейной теории упругости.

Перейдем к анализу равномерного двусосного растяжения плоскости усилиями  $\sigma_1 = \sigma_x^\infty = \sigma_2 = \sigma_y^\infty = p = \text{const} > 0$  ( $\alpha_1 = 0$ ). Согласно принятой гипотезе и формулам п. 1, имеем

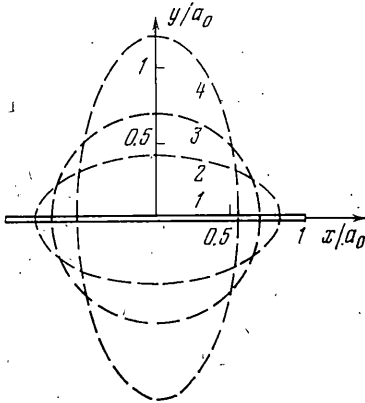
$$a_i = a_{i-1} + \frac{2cb_{i-1}}{E} dp_{i-1}, \quad b_i = b_{i-1} + \frac{2ca_{i-1}}{E} dp_{i-1} \quad (2.15)$$

Выполняя преобразования, аналогичные изложенным выше, из (2.15) получим

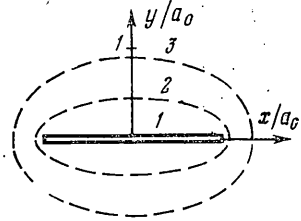
$$\begin{aligned} a_* &= \frac{a_0}{2} \left[ e^{2cp/E} \left( 1 + \frac{b_0}{a_0} \right) + e^{-2cp/E} \left( 1 - \frac{b_0}{a_0} \right) \right], & \sigma_+^* &= 2p \frac{a_*}{b_*} \\ b_* &= \frac{a_0}{2} \left[ e^{2cp/E} \left( 1 + \frac{b_0}{a_0} \right) - e^{-2cp/E} \left( 1 - \frac{b_0}{a_0} \right) \right], & \sigma_-^* &= 2p \frac{b_*}{a_*} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Рассмотрим ситуацию при некотором фиксированном уровне напряжений  $p = p_0 = \sigma(E) > 0$ . Предположим, что начальные длины большой и малой полуосей выреза были соответственно равны  $a_0$  и  $b_0 = 2cp_0 a_0 / E$ . Обращаясь к формулам линейной теории упругости, получаем  $\sigma_+^0 = 2pa_0/b_0$ , тогда как из выражений (2.16) следует  $\sigma_+^* \approx pa_0/b_0 \approx 1/2 \sigma_+^0$ . Если в процессе дальнейшего нагружения усилие  $p$  достигнет уровня  $p = 2p_0$ , то радиус кривизны в вершине деформированного контура будет  $r_* = 9r_0$ . Этому значению растягивающей нагрузки отвечает величина

$\sigma_+^* \approx 0,33 \sigma_+^0$ ; полученные результаты совпадают с выводами [10].



Фиг. 3



Фиг. 4

Выведенные формулы дают качественно верную картину и при больших упругих деформациях. Так, по мере возрастания напряжения  $p$ , исходный эллиптический вырез, постепенно округляясь, переходит в круговое отверстие, а затем начинает вытягиваться вдоль оси  $oy$ . В качестве иллюстрации сказанному на фиг. 3 представлена конфигурация трещины — разреза (кривые 1—4) при значениях  $cp_y/E = 0, 0,2, 0,34, 0,6$  (вычисления проведены по формулам (2.5), (2.7), которые остаются верными и при  $a_* < b_*$ ).

На фиг. 4 кривые 1—3 воспроизводят деформированный контур трещины в случае всестороннего растяжения плоскости усилиями  $cp/E$ , равными 0, 0,2, 0,4. Как и следовало ожидать, с увеличением растягивающей нагрузки контур отверстия приближается к круговому.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
2. *Новожилов В. В.* К основам теории равновесных трещин в упругих телах. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
3. *Свейников А. Г., Тихонов А. Н.* Теория функций комплексной переменной. М., «Наука», 1970.
4. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., «Мир», 1965.
5. *Черных К. Ф.* Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости. Прикл. механика, 1977, т. 13, № 1.
6. *Филтгенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1. М., Физматгиз, 1962.
7. *Mansfield E. H.* On the stresses near a crack in an elastic sheet. Internat. J. Non-linear Mech., 1969, vol. 4, No. 2.
8. *Новожилов В. В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
9. Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968.
10. *McCovan J. J., Smith G. W.* A finite deformation analysis of the near field surrounding the tip of crack — like elliptical perforations. Internat. J. fracture, 1975, vol. 11, No. 6.