

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ПРОГИБОВ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Е. И. БОЛДЫРЕВ, В. И. МАМАЙ

(Москва)

В рамках соотношений теории пластин Фешля — Кармана изучается поведение при ползучести прямоугольной пластины при действии на нее равномерного давления. В качестве исходных приняты смешанный вариационный принцип и степенной закон ползучести. Задача решается энергетическим методом в одночленном приближении. Данные вычислений использованы для оценки ползучести нагретой и нагруженной внутренним давлением шестигранной, замкнутой по торцам, тонкостенной оболочки переменной толщины. Полученные результаты сопоставляются с данными экспериментального исследования.

1. Согласно смешанному вариационному принципу Сэндерса, Мак-Комба и Шлехте [1], в положении равновесия должен достигаться минимум функционала

$$J = \int \int \int_V \left[e_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2} u_{k,i} \dot{u}_{k,j} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} (e_{ij}' + 2e_{ij}'') \dot{\sigma}_{ij} \right] dv - \int \int_{S_\sigma} Q_i^* \dot{u}_i ds - \int \int_{S_u} (u_i - u_i^*) \dot{Q}_i ds \quad (i, j, k=1, 2, 3) \quad (1.1)$$

Здесь σ_{ij} и e_{ij} — тензоры напряжений и деформаций; e_{ij}' — упругопластическая часть тензора деформаций; e_{ij}'' — тензор деформаций ползучести; u_i — компоненты вектора перемещений; точка здесь и в дальнейшем обозначает дифференцирование по времени, а запятая перед соответствующим индексом — дифференцирование по этому индексу.

Первый интеграл функционала (1.1) берется по всему объему тела, при этом принято, что объемные силы отсутствуют. Кроме того, считается, что на части поверхности S_σ заданы поверхностные нагрузки Q_i^* , а на части S_u — перемещения u_i^* .

В случае, если принят квадратичный вариант кинематических соотношений

$$e_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (1.2)$$

имеем

$$\dot{e}_{ij} = 1/2 (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \dot{u}_{k,j}) \quad (1.3)$$

Обычно используют следующие зависимости для описания связи упругопластической части деформаций и напряжений:

$$\sigma_{ij} \dot{d}e_{ij}' = e_{ij}' \dot{d}\sigma_{ij} \quad (1.4)$$

Закон ползучести в простейшем виде может быть записан так:

$$e_{ij}'' = f(J_2, t) s_{ij} \quad (1.5)$$

где s_{ij} — девиатор напряжений, J_2 — второй инвариант девиатора напряжений.

Как показано в [1], условие $\delta J = 0$ приводит к соответствующим уравнениям связи, уравнениям равновесия и граничным условиям.

2. Выпишем основные соотношения для случая изгиба при конечных перемещениях с учетом ползучести тонкой произвольной формы в плане пластины постоянной толщины h , нагруженной неравномерно распределенной зависящей от времени нагрузкой q_i . Считаем, что граничные условия таковы, что отсутствуют перемещения опорного контура пластины. Исходный функционал (1.1) при этом имеет вид

$$J = \int \int_{S, -h/2}^{h/2} \left[e_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2} u_{z,i} \dot{u}_{z,j} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} (e_{ij}' + 2e_{ij}'') \dot{\sigma}_{ij} \right] dz ds - \int \int_S q_i \dot{u}_i ds \quad (i, j = x, y, z) \quad (2.1)$$

Выпишем составляющие функционала (1.1) для случая пластин, описываемых теорией Кирхгофа — Кармана, при нагружении их только поперечной, но изменяющейся во времени нагрузкой.

В соответствии с исходными гипотезами принятой теории имеем

$$u_x = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w \quad (2.2)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad e_{xz} = e_{yz} = 0$$

Здесь u , v и w — тангенциальные и нормальное перемещения срединной поверхности пластины в направлении осей x , y и z декартовой системы координат.

Соотношения упругости имеют вид

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{xx} + \nu e_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (e_{yy} + \nu e_{xx}), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\nu} e_{xy} \quad (2.3)$$

Условие $\sigma_{zz} = 0$ дает

$$e_{zz} = -(e_{xx} + e_{yy}) \nu / (1 - \nu) \quad (2.4)$$

Выражения для отличных от нуля компонент тензора деформации в квадратичном приближении равны

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Формулы (2.2)–(2.5) позволяют легко записать соответствующие выражения производных величин по времени, которые приводить здесь не будем.

В предположении, что пластические деформации в пластине отсутствуют, имеем

$$e_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} e_{ij}' \dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} (e_{xx} \dot{\sigma}_{xx} + e_{yy} \dot{\sigma}_{yy} + 2e_{xy} \dot{\sigma}_{xy}) \quad (2.6)$$

Второй член первого интеграла функционала (2.1) равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_{z,i} u_{z,j} \dot{\sigma}_{ij} = & \frac{1}{2} \left[\sigma_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\sigma_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.7) \end{aligned}$$

Что касается членов, учитывающих деформацию ползучести, то используем принятый в [1] простейший вариант соотношений (1.5)

$$e_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = \lambda J_2^m \dot{J}_2 \quad (2.8)$$

где λ и m — некоторые постоянные. Для случая $m=1$ имеем

$$e_{ij}'' \dot{\sigma}_{ij} = \lambda J_2 \dot{J}_2 = \frac{1}{18} \lambda \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx} \sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2) \quad (2.9)$$

Отметим, что принятые соотношения (2.8) при $m=1$ аналогичны случаю $\beta=0$ и $n=3$ в формуле для степенного закона ползучести при одноосном напряженном состоянии

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} / E + \lambda t^{\beta} \sigma^n \quad (2.10)$$

и соответствуют полученным экспериментальным данным для стали 12Х18Н10Т при 700°С.

Используя формулы (2.6), (2.7) и (2.9) и проводя интегрирование по z в первом интеграле, получим

$$\begin{aligned} J = & \int \int_s (f_1 + f_2 - f_3) ds - \int \int_s f_4 ds \quad (2.11) \\ f_1 = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left[(A + \nu B) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (B + \nu A) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2(1-\nu)C \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ f_2 = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ A^2 + B^2 + 2\nu A \cdot B + 2(1-\nu)C^2 + \right. \\ & \left. + \frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} \\ f_3 = & \frac{\lambda}{18} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^4 h \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [c(A^2 + B^2) + dAB + lC^2] \right\}^2 + \\ & + \frac{h^2}{12} \left[2c \left(A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + d \left(A \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2lC \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^2 + \\ & + \frac{h^2}{6} [c(A^2 + B^2) + dAB + lC^2] \left[c \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) + d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \Big] + \frac{h^4}{80} \left[c \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) + \right. \\
 & \left. + d \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]^2 \Big\}, \quad f_k = q \cdot w \\
 A &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad B = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad c = 1 - \nu + \nu^2 \\
 e &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad d = -1 + 4\nu - \nu^2, \quad l = 3(1 - \nu)^2
 \end{aligned}$$

3. Рассмотрим ползучесть прямоугольной в плане тонкой пластины, нагруженной поперечной нагрузкой q . Пусть пластина жестко закреплена по краям $x=0, a$ и шарнирно опирается (на несмещаемом контуре) по краям $y=0, b$.

Аппроксимируем форму срединной поверхности исследуемой пластины в процессе ползучести следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= W(t) \left(1 - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b} \\
 u(x, y, t) &= U(t) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \\
 v(x, y, t) &= V(t) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Здесь u, v и w — перемещения точек срединной поверхности пластины в направлении осей x, y и z .

Смешанная форма записи исходного функционала (1.1) допускает использование при приближенных подходах, вообще говоря, независимой аппроксимации кинематических и статических величин. В рассматриваемом здесь случае примем в качестве исходных кинематические зависимости (3.1), а соответствующие статические величины выразим через известные кинематические, т. е. будем использовать функционал (2.1), записанный через перемещения. Такой подход может оказаться эффективным для принятой здесь одночленной аппроксимации.

Для дальнейшего удобно ввести безразмерные величины $w(t) = W(t)/h_0$, $u(t) = U(t)/h_0$, $v(t) = V(t)/h_0$, $T = t/\tau$, $d/dt = (1/\tau)(d/dT)$, где h_0 — параметр, имеющий размерность длины, τ — параметр, имеющий размерность времени.

Подставим выражения (3.1) в (2.11), выполним интегрирование по всей площади пластины и заменим размерные перемещения и время на соответствующие безразмерные параметры. Опуская громоздкие промежуточные вычисления, окончательно получим следующие выражения для первых двух составляющих первого интеграла функционала (2.11):

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^b f_1 dx dy &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \frac{ab}{\tau^2} \left(\frac{h_0}{a} \right)^4 a_{11} w^2 w'^2 \\
 \int_0^a \int_0^b f_2 dx dy &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \frac{ab}{\tau^2} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 (a_{21} u'^2 + a_{22} v'^2 + a_{23} w'^2 w'^2 + a_{24} w'^2)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{9}{128} \pi^4 + \frac{105}{2048} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 + \frac{5}{256} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2, & a_{21} &= \pi^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \\
 a_{22} &= \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \pi^2, & a_{23} &= \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \left[\frac{9}{64} \pi^4 + \frac{105}{1024} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 + \frac{5}{128} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right] \\
 a_{24} &= \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[\pi^4 + \frac{3}{16} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right], & m &= \frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

Последняя часть первого интеграла (2.11) равна

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \int_0^b f_3 dx dy &= \frac{\lambda}{18} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^4 h \frac{ab}{\tau} \left(\frac{h_0}{a} \right)^4 \frac{d}{dT} \{ a_{31} u^4 + a_{32} v^4 + a_{33} w^4 + a_{34} w^6 + \\
 &+ a_{35} w^8 + a_{36} u^2 v^2 + a_{37} u^2 w^2 + a_{38} v^2 w^2 + a_{39} u^2 w^4 + a_{310} v^2 w^4 \} \quad (3.3) \\
 a_{31} &= c^2 \frac{9}{4} \pi^4 + l^2 \frac{9}{64} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 + cl \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2, \\
 a_{32} &= c^2 \frac{9}{4} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 + l^2 \frac{9}{64} \pi^4 + cl \frac{1}{8} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \\
 a_{33} &= \frac{1}{80} \left(\frac{h}{a} \right)^4 \left\{ c^2 \frac{3}{4} \left[3\pi^8 + \frac{35}{256} \left(\frac{\pi}{m} \right)^8 + \frac{7}{8} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^4 \right] + d^2 \frac{21}{64} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^4 + \right. \\
 &+ l^2 \frac{9}{64} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^4 + \left. \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \left[cd \frac{9}{8} \left(\pi^4 + \frac{5}{16} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 \right) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. cl \frac{1}{8} \left(\pi^4 + \frac{5}{16} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 \right) + dl \frac{1}{32} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right] \right\} \\
 a_{34} &= \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \left\{ c^2 \frac{1}{128} \left[15\pi^8 + \frac{693}{256} \left(\frac{\pi}{m} \right)^8 + 7 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^4 \right] + \right. \\
 &+ d^2 \frac{7}{256} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^4 + l^2 \frac{21}{2048} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^4 + \left. \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \left[cd \frac{1}{64} \left(3\pi^4 + \frac{189}{64} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 \right) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. cl \frac{1}{128} \left(\pi^4 + \frac{21}{32} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 \right) - dl \frac{7}{1024} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right] \right\} \\
 a_{35} &= \frac{1}{16} \left(\frac{h_0}{a} \right)^4 \left\{ c^2 \frac{35}{128} \left[\frac{35}{128} \pi^8 + \frac{6435}{32768} \left(\frac{\pi}{m} \right)^8 \right] + \right. \\
 &+ \frac{1}{128} (2c^2 + d^2 + l^2) \frac{297}{2048} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^4 + \left. \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \frac{1}{1024} \left[(cd + cl) \left(\frac{225}{32} \pi^4 + \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{2145}{512} \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 \right) + dl \frac{297}{128} \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right] \right\} \\
 a_{36} &= \frac{1}{4} \left[\left(2c^2 + d^2 + \frac{3}{8} l^2 + dl \right) \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + \frac{9}{2} cl \left(\pi^4 + \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 \right) \right] \\
 a_{37} &= \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left\{ c^2 \left[9\pi^6 + \frac{7}{16} \pi^2 \left(\frac{\pi}{m} \right)^4 \right] + \frac{1}{16} \left(\frac{7}{2} d^2 + 9l^2 \right) \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + \right. \\
 &+ \left. cd \frac{9}{4} \pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + cl \frac{1}{2} \left[\pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + \frac{5}{32} \left(\frac{\pi}{m} \right)^6 \right] + dl \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{38} &= \frac{1}{12} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left\{ c^2 \left[\frac{15}{16} \left(\frac{\pi}{m} \right)^6 + \pi^4 \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(d^2 + \frac{3}{8} l^2 \right) \pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + \right. \\
 &+ cd \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + cl \frac{1}{4} \left[3\pi^6 + \frac{110}{32} \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right] + dl \frac{3}{16} \pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \left. \right\} \\
 a_{39} &= \frac{1}{16} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \left\{ c^2 \frac{15}{16} \pi^6 + \frac{1}{256} \left[(2c^2 + d^2) \frac{245}{2} + l^2 21 \right] \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + \right. \\
 &+ cd \frac{27}{64} \pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + cl \frac{1}{16} \left[12\pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + \frac{147}{64} \left(\frac{\pi}{m} \right)^6 \right] - dl \frac{7}{256} \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \left. \right\} \\
 a_{310} &= \frac{1}{16} \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 \left\{ c^2 \frac{441}{256} \left(\frac{\pi}{m} \right)^6 + \frac{1}{32} \left[(2c^2 + d^2) 35 + l^2 \frac{27}{8} \right] \pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + \right. \\
 &+ cd \frac{21}{64} \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 + cl \frac{1}{64} \left[5\pi^6 + \frac{245}{16} \left(\frac{\pi}{m} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \right] + dl \frac{17}{256} \pi^2 \left(\frac{\pi^2}{m} \right)^2 \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Последний член (2.11) для случая, когда q является функцией только времени, равен

$$\int_0^a \int_0^b f_1 dx dy = \frac{E h_0}{2(1-\nu^2)} \frac{ab}{\tau^2} a_{41} Q \cdot w, \quad a_{41} = \frac{1}{\pi}, \quad Q = q \frac{2(1-\nu^2)}{E} \quad (3.4)$$

Запишем теперь функционал (2.11) с использованием полученных выражений (3.2), (3.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \frac{ab}{\tau} \left\{ \left(\frac{h_0}{a} \right)^4 a_{11} w^2 w'^2 + \left(\frac{h_0}{a} \right)^2 [a_{21} u'^2 + a_{22} v'^2 + \right. \\
 & + a_{23} w'^2 w^2 + a_{24} w'^2] - \frac{\lambda}{9} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^3 \tau \left(\frac{h_0}{a} \right)^4 [2u' (2a_{31} u^3 + a_{36} v^2 u + a_{37} w^2 u + \\
 & + a_{39} w^4 u) + 2v' (2a_{32} v^3 + a_{36} u^2 v + a_{38} w^2 v + a_{310} w^4 v) + 2w' (2a_{33} w^3 + \\
 & + 3a_{34} w^5 + 4a_{35} w^7 + a_{37} u^2 w + a_{38} v^2 w + 2a_{39} u^2 w^3 + 2a_{310} v^2 w^3)] - \\
 & \left. - \frac{a}{h} \frac{h_0}{a} a_{41} Q \cdot w \right\} \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Полученное выражение (3.5) исходного функционала (2.1) вариационного принципа Сэндера, Мак-Комба и Шлехте позволяет изучить изменение равновесных состояний исследуемой прямоугольной пластины при ползучести, начиная с некоторого исходного состояния. Как известно, минимум функционала соответствует положению равновесия и достигается при выполнении условия $\delta J = 0$. При этом в качестве независимых варьируемых параметров должны быть приняты w' , u' и v' . Варьирование по соответствующим величинам без индекса (верхней точки) не производится.

Проводя необходимые преобразования, собирая члены при вариациях $\delta w'$, $\delta u'$ и $\delta v'$ и приравнивая их нулю, из условия $\delta J = 0$ получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши относительно неизвестных перемещений:

$$dy_j/dt = f_j(y_j) \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3.6)$$

$$f_1 = \frac{n_3}{n_2} \left\{ \left[(a_{37} y_2^2 + a_{38} y_3^2) y_1 + 2(a_{33} + a_{39} y_2^2 + a_{310} y_3^2) y_1^3 + 3a_{34} y_1^5 + 4a_{35} y_1^7 + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{n_4}{n_3} a_{41} Q^* \left. \right] / \left[\left(\frac{n_1}{n_2} a_{11} + a_{23} \right) y_1^2 + a_{24} \right] \left. \right\}$$

$$f_2 = \frac{n_3}{n_2} [2a_{31}y_2^3 + (a_{36}y_3^2 + a_{37}y_1^2 + a_{39}y_1^4)y_2] \frac{1}{a_{21}}$$

$$f_3 = \frac{n_3}{n_2} [2a_{32}y_3^3 + (a_{36}y_2^2 + a_{38}y_1^2 + a_{310}y_1^4)y_3] \frac{1}{a_{22}}$$

$$y_1 = w, \quad y_2 = u, \quad y_3 = v, \quad t = T, \quad n_1 = \left(\frac{h_0}{a} \right)^4, \quad n_2 = \left(\frac{h_0}{a} \right)^2$$

$$n_3 = \frac{\lambda}{g} \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right)^3 \tau \left(\frac{h_0}{a} \right)^4, \quad n_4 = \frac{a}{h} \frac{h_0}{a}$$

Для интегрирования системы уравнений (3.6) нужно задать три начальных условия: величины перемещений w_0 , u_0 , v_0 , соответствующие исходному (до начала ползучести) решению упругой задачи для пластины под действием заданной нагрузки q :

$$y_1(0) = w_0, \quad y_2(0) = u_0, \quad y_3(0) = v_0 \quad \text{при } t=0 \quad (3.7)$$

Программа численного решения задачи (3.6)–(3.7) написана на языке АЛГОЛ и позволяет вести вычисления для четырех последовательных участков по времени разной длины, каждому из которых соответствуют различные значения параметра ползучести λ . Интегрирование системы (3.6) осуществляется методом Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага в процессе интегрирования.

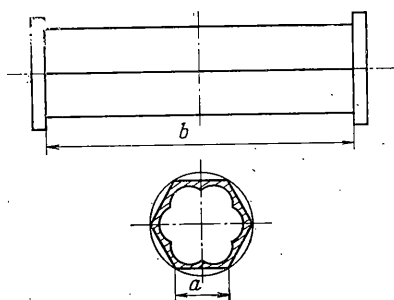
Однако следует заметить, что принятый закон ползучести (2.9) справедлив, вообще говоря, лишь на участке установившейся ползучести и неприменим на переходном участке. Поэтому в качестве начальных данных задачи Коши целесообразно принять нормальный и тангенциальный прогибы изучаемой пластины, соответствующие началу участка установившейся ползучести.

Поскольку, проще всего получить эти данные экспериментально. Этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе. Там же будут обсуждены и результаты вычислений задачи (3.6), (3.7) на ЭЦВМ БЭСМ-6.

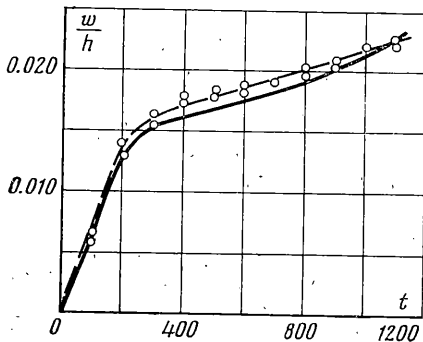
4. Результаты исследования процесса ползучести прямоугольной в плане пластины постоянной толщины были использованы для оценки поведения при ползучести нагретой и нагруженной внутренним давлением шестигранной замкнутой по торцам тонкостенной оболочки переменной толщины, схема которой показана на фиг. 1. Всего было испытано¹ пять стальных (12Х18Н10Т) оболочек, в которых отношение средней толщины стенки h к ширине грани a составляло для всех оболочек $h/a = 0.05$. Испытания проводились на установке ЦДМВ-30 при 700 и 725°С и внутреннем давлении 0.127, 0.137 и 0.157 МПа. Продолжительность испытаний составила от 1000 до 1100 ч.

Для определения параметров ползучести были проведены длительные испытания на ползучесть при одноосном напряженном состоянии образцов из стали 12Х18Н10Т при 700°С продолжительностью 1000 ч и напряжениях 39.2, 58.9, 78.9, 98 МПа. Исследования проводили на трубчатых образцах с внутренним диаметром 10 мм, толщиной стенки 1.5 мм и расчетной длиной 60 мм на установке описание

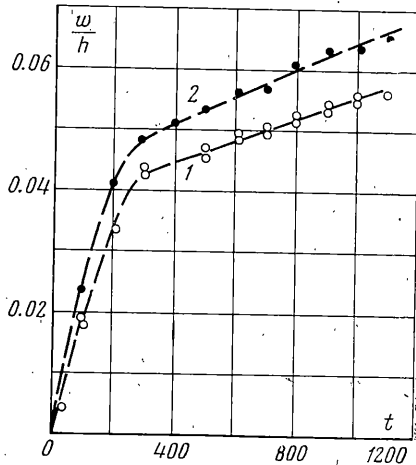
¹ Эксперименты проводились Е. И. Болдыревым.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

которой приведено в [2]. Образцы изготавливались из поковки промышленной поставки. Материал для образцов и оболочек идентичен и соответствует одной и той же партии металла. На одном уровне напряжений испытывалось не менее трех образцов.

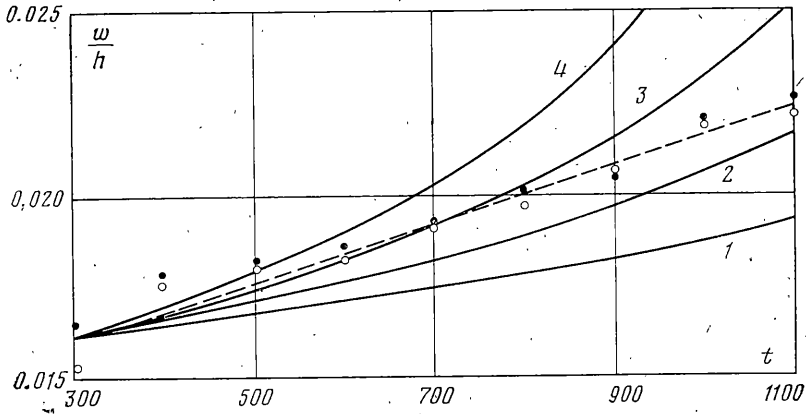
Полученные экспериментальные кривые ползучести материала были обработаны по общепринятой методике [3], что позволило построить зависимость напряжения от минимальной скорости пластической деформации и определить параметры n и λ принятого степенного закона ползучести. Принимая во внимание разброс экспериментальных данных, можно сделать вывод, что материалу 12X18H10T при 700°С на участке установившейся ползучести соответствуют следующие параметры ползучести для зависимости (2.10): $n=3$, $\beta=0$ и $\lambda=0.1-0.3 \cdot 10^{-10}$ (МПа·ч)⁻¹. Отметим, что значение параметра $n=3$ согласуется с данными [4] для нержавеющей стали типа 12X18H10T.

Экспериментальное исследование шестигранных оболочек проводилось следующим образом. Герметичная оболочка помещалась в электропечь установки и нагревалась до заданной температуры. Испытания проводились в течение 1000–1100 ч ступенями по 100 ч. Температура печи в процессе испытаний поддерживалась регулятором с точностью $\pm 1.5^\circ\text{C}$. Загрузению оболочки предшествовали медленный ее нагрев в течение 6 ч до заданной температуры и 3-часовая выдержка до ее полной стабилизации. После этого во внутреннюю полость шестигранной оболочки подавался аргон от баллонной установки при давлении 0.127, 0.137 или 0.157 МПа.

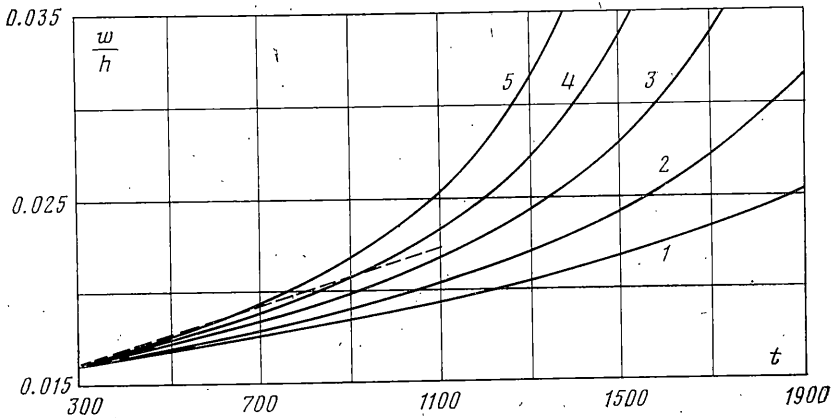
Во время испытаний температура печи и оболочки, а также давление аргона в оболочке контролировались и поддерживались постоянными. По истечении заданного времени (100-часовой ступени) действующая на оболочку нагрузка (давление) снималась и печь отключалась. После охлаждения оболочки совместно с печью производился обмер поперечного сечения оболочки в центре диаметрально противоположных граней в трех сечениях по высоте оболочки. Деформации оболочки измерялись до и после каждого периода испытаний с помощью микрометра с последующим уточнением замера на оптическом компараторе. Разность замеров до и после нагружения (температура и давление) принималась за величину остаточной деформации оболочки в указанных сечениях.

Поскольку испытания оболочек проводились с периодическим разгрузением и охлаждением, можно было ожидать, что это повлияет на процесс ползучести [5]. В связи с этим было проверено влияние цикличности нагружения с периодом 100 ч (при охлаждении и нагреве образца на каждом шаге по времени по закону 700–20–700°С) на ползучесть трубчатых образцов из стали 12X18H10T. Испытания образцов проводились на машине ДСТ-5000 и показали, что незначительное число циклов (10–11) при сравнительно плавном изменении температуры не оказывает существенного влияния на ползучесть стали 12X18H10T.

На фиг. 2, 3 приведены результаты испытаний четырех герметичных шестигранных оболочек при 700°С продолжительностью 1100 ч: две оболочки испытывались при внутреннем давлении 0.127 МПа (фиг. 2), две другие — при 0.157 МПа (фиг. 3, кривая 1).



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 3 представлены также экспериментальные данные для одной оболочки при внутреннем давлении 0.137 МПа и температуре 725° С (кривая 2). Сплошной линией на фиг. 2 показана теоретическая кривая; кривые, проведенные по экспериментальным точкам, даны пунктиром.

Результаты представлены в виде графиков зависимости максимального остаточного прогиба центра граней оболочки от времени испытаний. По оси абсцисс на фиг. 2, 3 отложено время t в часах, по оси ординат — средний по трем граням относительный прогиб w/h центра граней (h — средняя толщина оболочки). Отметим, что в теоретических исследованиях в силу достаточной тонкостенности оболочки переменностью ее толщины пренебрегалось. При вычислениях для прямоугольной пластины принималось среднее значение толщины грани оболочки.

На фиг. 4 приведены экспериментальные и теоретические результаты изменения максимального прогиба грани оболочки во времени на участке установившейся ползучести. По оси ординат отложен относительный прогиб центра грани (w/h), по оси абсцисс — время t от 300 до 1100 ч. Светлыми и темными точками обозначены экспериментальные данные для двух оболочек при внутреннем давлении 0.127 МПа и температуре 700° С, пунктиром показана проведенная по этим точкам прямая линия в предположении, что процесс ползучести установившийся.

Сплошными линиями отмечены результаты вычислений для различных значений параметра λ и начальных условий, соответствующих экспериментально замеренному прогибу в центре грани при $t=300$ ч. Вычисления были выполнены по описанной выше методике для прямоугольной пластины, размеры которой соответствуют размерам граней шестигранной оболочки. Кривые 1—4 на фиг. 4, соответствуют параметру $\lambda \cdot 10^{-10}$, равному 0.1, 0.15, 0.2 и 0.25 (МПа·ч) $^{-1}$ и $n=3$.

На фиг. 5 приведены результаты аналогичных вычислений для большего интервала времени (300—1900 ч) при тех же начальных условиях и $\lambda \cdot 10^{-10}$, равному 0.1,

0.125, 0.175 и 0.2 (МПа·ч)⁻¹ (кривые 1–4). Пунктиром, как и ранее, отмечены результаты эксперимента.

Приведенные зависимости позволяют оценить влияние параметра λ как на вид кривой нагрузка – прогиб, так и на величину относительного прогиба оболочки при ползучести, когда параметры $n=3$ и $\beta=0$ фиксированы. На фиг. 6 показана относительная погрешность теории и эксперимента $(\delta-\Delta)/\Delta$ в процентах для различных значений параметра λ и времени t для интервала 400–1000 ч. Здесь через Δ обозначено замеренное экспериментально приращение прогиба при ползучести, через δ – соответствующее приращение прогиба по результатам вычислений. Как видно, теоретическая кривая для случая $n=3$ и $\lambda=0.2 \cdot 10^{-10}$ (МПа·ч)⁻¹ в среднем хорошо аппроксимирует экспериментальную кривую. При этом ошибка в определении прогиба грани оболочки для момента времени $t=1000$ ч не превышает 30%.

Как следует из сопоставления теоретических и экспериментальных данных, приведенных на фиг. 4–6, должны предъявляться достаточно высокие требования к точности назначения параметра λ (разумеется, при фиксированном параметре n , влияние которого более значительно) при расчетах ползучести тонкостенных конструкций в условиях сложного напряженного состояния: По-видимому, это справедливо и в том случае, когда параметры ползучести определяются из опытов, в которых реализуется напряженно-деформированное состояние, типичное для изучаемой конструкции.

Что касается построения кривой изменения относительного прогиба центра грани оболочки во времени на участке неустановившейся ползучести, то основная трудность состоит в неприменности на переходном участке степенного закона ползучести. Иногда считают, что можно разбить участок неустановившейся ползучести на отдельные интервалы и в пределах каждого из них считать ползучесть установившейся со своими параметрами ползучести.

Так, в [6] выполнены вычисления для аналогичной конструкции энергетическим методом в балочном приближении, когда участок от нуля до трехсот часов разбит на три интервала, в каждом из которых задано λ , а параметр n считается постоянным для всех интервалов. Поступая аналогичным образом, можно и в нашем случае построить теоретически всю кривую изменения прогиба центра грани оболочки во времени при ползучести.

На фиг. 2 сплошной линией приведены результаты соответствующих вычислений для давления 0.127 МПа, температуры 700°С и следующих параметров ползучести (Δt – интервал времени):

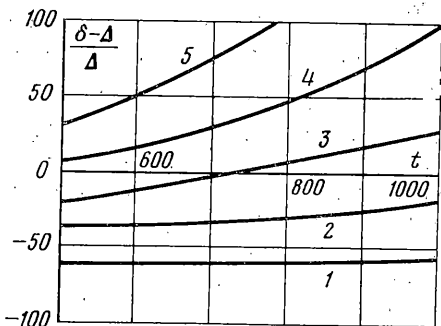
Δt , ч	0–100	100–200	200–300	300–1000
$\lambda \cdot 10^{-10}$ (МПа·ч) ⁻¹	20	13.1	1.3	0.21

При этом для всех интервалов времени $n=3$ и $\beta=0$. В качестве начальных условий принято соответствующее упругое решение линейной задачи для прямоугольной пластины.

Поступила 15 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Sanders J. L., McComb H. G., Schlechte F. R. A variational theorem for creep with applications to plates and columns. Langley Aeronautical Laboratory. Rept 1342, 1957.
2. Болдырев Е. И., Борисов Б. Ф., Герасимов Ю. Ф., Григорюк Э. И., Фоганов О. Н. Машина для испытаний образцов в вакууме при высокой температуре. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 2.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., «Машиностроение», 1975.
4. Чижик А. А. Влияние различных факторов на величину показателя ползучести. Энергомашиностроение, 1969, № 2.
5. Сизова Р. Н. Использование закономерностей нестационарной ползучести при расчете на прочность. Сб.: Прочность и динамика авиационных двигателей. Вып. 6, М., «Машиностроение», 1971.
6. Болдырев Е. И., Куршин Л. М., Юнгерман Н. М. Ползучесть призматической оболочки переменной толщины. Сб.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, Киев, «Наукова думка», 1979, № 19.



Фиг. 6