

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ
ДВИЖЕНИЯ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА

Ю. К. ЖБАНОВ

(Москва)

Для полных уравнений движения гироскопа [1] в работе [2] показана возможность существования некоторого класса точных решений. В монографии [3] и работе [4] приведены примеры точных решений и показано, что решения данного класса имеют место при определенных ограничениях на характер движения основания.

В предлагаемой работе дается механическая интерпретация обнаруженного класса точных решений и строится некоторый формально более широкий класс.

1. В работах [1-4] движение гироскопа рассматривается в предположении, что основание — точка подвеса чувствительного элемента — перемещается по земной поверхности, которая принимается за сферу и считается совпадающей с эквипотенциальной поверхностью гравитационного поля Земли. В этом случае уравнения движения гироскопа могут быть записаны в виде [5]:

$$\mathbf{n}'' + \eta \mathbf{n} = \mathbf{n}_1'' + \nu^2 \mathbf{n}_1 \quad (1.1)$$

где \mathbf{n}_1 — единичный вектор внешней нормали к поверхности Земли в точке подвеса чувствительного элемента компаса. В работах [1-4] с этим направлением связывается ось z° сопровождающего трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$ — правого прямоугольного трехгранника, ось x° которого направлена по вектору полной линейной скорости точки подвеса по отношению к сфере, совпадающей с земной поверхностью, но не участвующей в суточном вращении Земли; \mathbf{n} — единичный вектор прямой линии, соединяющей центр масс чувствительного элемента с точкой его подвеса. С этим направлением в работах [1-4] связывается ось z правого прямоугольного приборного трехгранника xyz ; ν — частота Шулера; точками обозначено дифференцирование по времени в инерциальной системе координат. Величина η соответствует величине реакции связи $|\mathbf{n}| = 1$.

Вектор кинетического момента \mathbf{H} чувствительного элемента компаса может быть найден по соотношению $\mathbf{H} = m l \mathbf{n} \times \mathbf{n}'$, где m и l — параметры компаса.

В работе [2] одна из форм записи исходных уравнений имеет вид

$$p' - qr + (\nu^2 - \omega^2) a_{23} + \omega \Omega a_{22} + a_{21} \omega' = 0 \quad (1.2)$$

$$q' + pr - (\nu^2 - \omega^2) a_{13} - \omega \Omega a_{12} - a_{11} \omega' = 0$$

где p, q, r — абсолютные угловые скорости приборного трехгранника xyz , а ω и Ω — абсолютные угловые скорости трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$ вокруг осей y° и z° соответственно. Угловая скорость трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ вокруг оси x° тождественно равна нулю. Величины a_{ij} , вошедшие в уравне-

ния (1.2), — элементы матрицы направляющих косинусов, характеризующих взаимную ориентацию трехгранников.

Системы (1.1) и (1.2) эквивалентны. Векторное равенство (1.1) в проекциях на оси приборного трехгранника, после выражения производных векторов \mathbf{n}_i и \mathbf{n} через угловые скорости связанных с ними трехгранников, приводится к виду

$$\begin{vmatrix} rp + q \\ rq - p \\ -p^2 - q^2 + \eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega \\ \omega\Omega \\ v^2 - \omega^2 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Матричное равенство (1.3) эквивалентно трем скалярным. Первые два из них совпадают с уравнениями системы (1.2), третье дает возможность вычислить реакцию связи (величину η).

Переход к кватернионным параметрам выполняется подстановкой в систему (1.2) или (1.3) выражений для угловых скоростей p, q, r :

$$\begin{vmatrix} p \\ q \\ r \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

которые являются следствием уравнений Эйлера — Пуассона, записанных для коэффициентов λ_i кватерниона, характеризующего поворот от трехгранника Дарбу к приборному трехграннику, и подстановкой выражений для элементов матрицы направляющих косинусов в соответствии с равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Результат подстановки значений p и q из соотношений (1.4) в первые два уравнения системы (1.3) представляется в виде

$$\begin{aligned} & 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} + 2r \begin{vmatrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} + \\ & + \frac{d}{dt} \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega \\ \Omega \end{vmatrix} \right\} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega\Omega - \omega r \\ v^2 - \omega^2 - \Omega r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{vmatrix} \omega = 0 \quad (1.6) \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (1.6), содержащая два уравнения при четырех неизвестных параметрах λ_i ($i=0, 1, 2, 3$), замыкается добавлением дифференциального соотношения

$$r = 2(-\lambda_3\lambda_0 + \lambda_2\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) + a_{32}\omega + a_{33}\Omega \quad (1.7)$$

вытекающего из равенства (1.4), и учетом уравнения связи

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad (1.8)$$

которому должны удовлетворять коэффициенты введенного кватерниона.

Движение приборного трехгранника xuz относительно трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, задаваемое в данном случае четырьмя параметрами λ_i , может быть найдено интегрированием системы (1.6), с учетом соотношений (1.7),

(1.8), при произвольном параметре r , принимаемом в виде функции времени или в виде функции каких-либо других параметров.

После подстановки выражений a_{ij} из равенства (1.5) система (1.6) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \lambda_1 S_1 - \lambda_0 S_2 - \lambda_3 S_3 + \lambda_2 S_4 &= 0 \\ \lambda_2 S_1 + \lambda_3 S_2 - \lambda_0 S_3 - \lambda_1 S_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_0'' + r\lambda_3' - \lambda_2 \omega' - \lambda_2 \omega \cdot \Omega + \frac{1}{2}\lambda_1 (\omega \Omega - \omega r) \\ S_2 &= \lambda_1'' - r\lambda_2' - \lambda_2 \Omega' + \lambda_3 \omega' - \lambda_2 \omega \cdot \Omega + \frac{1}{2}\lambda_0 (\omega \Omega - \omega r) + \lambda_1 (v^2 - \omega^2 - \Omega r) \\ S_3 &= \lambda_3'' + r\lambda_1' + \lambda_1 \Omega' + \lambda_0 \omega' + \lambda_1 \omega \cdot \Omega - \frac{1}{2}\lambda_3 (\omega \Omega - \omega r) + \lambda_2 (v^2 - \omega^2 - \Omega r) \\ S_4 &= \lambda_2'' - r\lambda_0' - \lambda_1 \omega' - \lambda_1 \omega \cdot \Omega - \frac{1}{2}\lambda_2 (\omega \Omega - \omega r) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Равенства

$$S_i = 0, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (1.11)$$

образуют новую систему уравнений, все решения которой удовлетворяют одновременно и системе (1.9). Если какие-то из этих решений удовлетворяют соотношениям (1.7) и (1.8), то они являются решениями исходной задачи, т. е. описывают некоторое движение приборного трехгранника.

Можно показать, что если выполняется условие (1.8), то соотношение (1.7) становится следствием системы уравнений (1.11) при $r=\Omega$ и для его удовлетворения достаточно, чтобы оно выполнялось в начальный момент.

Система (1.11) при $r=\Omega$ принимает особенно простой вид

$$\begin{aligned} \lambda_0'' - \frac{d}{dt}(\lambda_2 \omega) &= 0, \quad \lambda_3'' - \frac{d}{dt}(\lambda_1 \omega) = 0 \\ \lambda_1'' - 2\Omega \lambda_2' - \lambda_2 \Omega' + \lambda_1 (v^2 - \omega^2 - \Omega^2) + \lambda_3 \omega' &= 0 \\ \lambda_2'' + 2\Omega \lambda_1' + \lambda_1 \Omega' + \lambda_2 (v^2 - \omega^2 - \Omega^2) + \lambda_0 \omega' &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

который и получен в работе [2].

Первое и второе уравнения системы (1.12) допускают однократное интегрирование, после которого система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \lambda_3 \omega &= \omega \lambda_1 + c_1, \quad \lambda_0 \omega = \omega \lambda_2 + c_2 \\ \lambda_1'' - 2\Omega \lambda_2' - \lambda_2 \Omega' + \lambda_1 (v^2 - \Omega^2) + \omega c_1 &= 0 \\ \lambda_2'' + 2\Omega \lambda_1' + \lambda_1 \Omega' + \lambda_2 (v^2 - \Omega^2) + \omega c_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Соотношение (1.7) при $r=\Omega$ принимает вид

$$2(-\lambda_3 \lambda_0' + \lambda_2 \lambda_1' - \lambda_1 \lambda_2' + \lambda_0 \lambda_3') + a_{32} \omega + (a_{33} - 1) \Omega = 0 \quad (1.14)$$

Интегрирование полученной системы (1.13) с учетом соотношения (1.8) без наложения дополнительных ограничений затруднено. Задача существенно упрощается при

$$c_1 = c_2 = 0 \quad (1.15)$$

В этом случае два последних уравнения системы (1.13) отделяются и допускают решение в конечном виде при произвольной функции $\Omega(t)$ и любых начальных условиях по $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2'$. Определение же параметров λ_0, λ_3 и функции ω из первых двух уравнений системы (1.13) и соотношения (1.8) остается все же затруднительным, что и определило немногочисленность примеров, построенных в работах [2-4]. Однако характерные

свойства полученных решений для λ_1, λ_2 наводят на мысль о возможности построения простой механической интерпретации, объясняющей их существование. Такая интерпретация приводится ниже.

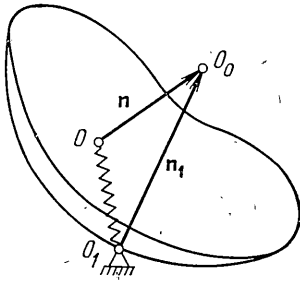
2. Уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}) + v^2(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}) = N\mathbf{n} \quad (2.1)$$

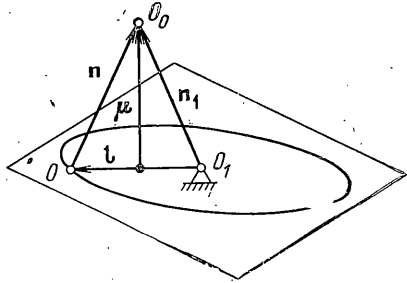
где коэффициент

$$N = \eta - v^2 \quad (2.2)$$

может интерпретироваться как нормальная реакция связи в механической системе, изображенной на фиг. 1 [6]; точка O единичной массы, находя-



Фиг. 1



Фиг. 2

щаяся на гладкой единичной сфере, притягивается к неподвижной точке O_1 той же сферы линейной пружинкой жесткости v^2 . Векторы \mathbf{n}_1 и \mathbf{n} в уравнении (2.1) суть единичные нормали к сфере в точках O_1 и O соответственно.

Если движение основания, которое задается единичным вектором $\mathbf{n}_1(t)$ как функцией времени, обеспечивает выполнение требования

$$N = 0 \quad (2.3)$$

то общее решение уравнения (2.1) для вектора $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}$ имеет вид

$$\mathbf{n}_1 - \mathbf{n} = \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}(0) \cos vt + \mathbf{l}'(0) \sin vt \quad (2.4)$$

Траекторией вектора \mathbf{l} служит эллипс, лежащий в неподвижной плоскости.

В силу единичности векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n} интерес представляют те решения, для которых $|\mathbf{l}| \leq 2$.

Решение (2.4) удовлетворяет условию $|\mathbf{n}_1| = 1$ и уравнению связи $|\mathbf{n}| = 1$, если для векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n} принять выражения

$$\mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\mathbf{l}, \quad \mathbf{n} = \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{l} \quad (2.5)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — некоторый вектор, подчиненный двум условиям

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{l} = 0, \quad \boldsymbol{\mu}^2 + (1/2)^2 = 1 \quad (2.6)$$

Иными словами, для найденного решения (2.4) в качестве вектора $\mathbf{n}_1(t)$, обеспечивающего удовлетворение связям, может быть принят любой единичный вектор, проекция которого на вектор \mathbf{l} равна половине длины последнего (фиг. 2). Поворот вектора $\mathbf{n}_1(t)$ вокруг вектора \mathbf{l} в каждый момент времени может быть выбран произвольно.

Таким образом, выражения (2.4), (2.5) дают некоторый класс точных решений исходной задачи, которые имеют место, если заданное первым

соотношением (2.5) движение основания подчинено условиям (2.6). Движение основания, удовлетворяющее этим условиям, еще имеет в качестве своей характеристики произвольную функцию времени, определяющую вращение вектора $\mathbf{n}_1(t)$ вокруг вектора \mathbf{l} .

Представляется интересным выяснить, принадлежат ли построенному классу те точные решения, которые могут быть получены из уравнений (1.13) при выполнении условий (1.8), (1.14) и (1.15). Ответ будет утвердительным, если удастся показать, что условие (2.3) является следствием уравнений (1.13) и соотношений (1.8), (1.14), (1.15).

3. Условие (1.8), после двукратного дифференцирования и замены вторых производных их выражениями из уравнений системы (1.12), с учетом соотношений (1.4) и (1.5) может быть приведено к виду

$$a_{31}\dot{\omega} + a_{32}\omega\Omega - a_{33}\omega^2 + v^2(a_{33}-1) + \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + \omega^2) = 0 \quad (3.1)$$

Из уравнения (1.3) можно получить выражение

$$\eta = a_{31}\dot{\omega} + a_{32}\omega\Omega + a_{33}(v^2 - \omega^2) + p^2 + q^2 \quad (3.2)$$

которое с учетом равенства (3.1) принимает вид

$$\eta = v^2 + \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - \omega^2) \quad (3.3)$$

Подставляя полученное выражение для η в соотношение (2.2), получаем

$$N = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 - \omega^2) \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) является, таким образом, следствием системы (1.12), условия (1.8) и исходных уравнений, использованных в форме (1.3), т. е. должно выполняться для любого решения исходной задачи, которое может быть получено интегрированием системы (1.12).

В силу принятого дополнительного условия (1.15) первые два уравнения системы (1.13), эквивалентные первому и второму уравнениям системы (1.12), принимают вид

$$\lambda_3 \dot{} = \omega\lambda_1, \quad \lambda_0 \dot{} = \omega\lambda_2 \quad (3.5)$$

Согласно же кинематическим уравнениям Эйлера — Пуассона, записанным относительно параметров λ_i , в рассматриваемом случае (с учетом $r = \Omega$) имеем

$$\lambda_3 \dot{} = \frac{1}{2}(\omega + q)\lambda_1 - \frac{1}{2}p\lambda_2, \quad \lambda_0 \dot{} = \frac{1}{2}(\omega - q)\lambda_2 - \frac{1}{2}p\lambda_1 \quad (3.6)$$

Откуда следуют соотношения

$$(q - \omega)\lambda_1 - p\lambda_2 = 0, \quad p\lambda_1 + (q + \omega)\lambda_2 = 0 \quad (3.7)$$

согласно которым λ_1 и λ_2 могут быть отличны от тождественных нулей лишь в случае тождественного равенства нулю детерминанта системы (3.7), т. е. когда

$$p^2 + q^2 - \omega^2 = 0 \quad (3.8)$$

В этом случае, согласно (3.4), обращается в нуль и значение коэффициента N .

Таким образом, все решения, которые могут быть найдены интегрированием системы (1.13) при выполнении условий (1.8), (1.14), (1.15), принадлежат классу, построенному в п. 2.

Однако можно показать, что все эти решения соответствуют случаю коллинеарности векторов $\mathbf{l}(0)$ и $\mathbf{l}'(0)$, т. е. тому случаю, когда эллиптиче-

ская траектория вектора \mathbf{l} , представленная в п. 2, вырождается в отрезок прямой линии. Для проверки этого обстоятельства достаточно вычислить векторное произведение векторов $\mathbf{l} = \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}$ и $\mathbf{l}' = \dot{\mathbf{n}}_1 - \dot{\mathbf{n}}$, спроектированных на оси трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$:

$$\mathbf{l} \times \mathbf{l}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_{31} & a_{31} \dot{} - \Omega a_{32} + \omega (a_{33} - 1) \\ \mathbf{j} & a_{32} & a_{32} \dot{} + \Omega a_{31} \\ \mathbf{k} & a_{33} - 1 & a_{33} \dot{} - \omega a_{31} \end{vmatrix}$$

используя при упрощении выражений первые два уравнения системы (1.13) и условия (1.8), (1.14), (1.15) и убедиться, что все его компоненты обращаются в нуль.

4. Построенные в [2-4] примеры точных решений принадлежат семейству, которое допускает наглядную механическую интерпретацию, несколько отличную от приведенной выше. Эта интерпретация может предоставить самостоятельный интерес¹. Суть ее в следующем.

Уравнение (1.1) при произвольном единичном векторе

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1(t) \quad (4.1)$$

имеет тривиальное решение

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1(t) \quad (4.2)$$

Если функция $\mathbf{n}_1(t)$ при сохранении условия $|\mathbf{n}_1| = 1$ такова, что вся правая часть уравнения (1.1) представляет собой вектор $k(t)\mathbf{n}^\circ$, постоянный по направлению и лишь, возможно, меняющийся по модулю, то в силу осевой симметрии любая траектория $\mathbf{n}^*(t)$, которая получается из тривиального решения поворотом вокруг вектора \mathbf{n}° , остается решением уравнения.

Вектор $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}^*$ в этом случае в процессе всего движения остается ортогональным вектору \mathbf{n}° , т. е. лежит в неподвижной плоскости.

Равенство нулю проекции правой части уравнения (1.1) на плоскость, ортогональную вектору \mathbf{n}° , приводит к уравнению

$$\rho_1 \ddot{} + \nu^2 \rho_1 = 0 \quad (4.3)$$

если ρ_1 означает проекцию вектора \mathbf{n}_1 на эту плоскость.

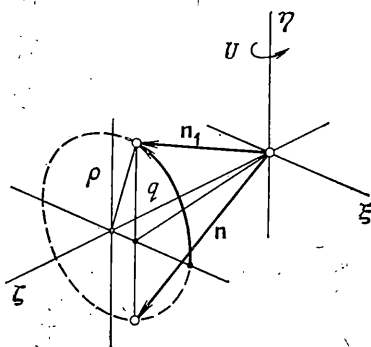
Продолжая рассуждение, можно заметить, что при рассмотренном свойстве правой части уравнения (1.1), выраженном равенством (4.3), зеркальное отражение траектории вектора \mathbf{n}_1 в любой неподвижной плоскости, проходящей через вектор \mathbf{n}° , также является решением уравнения (1.1).

В этом случае вектор $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}$ в процессе всего движения остается коллинеарным самому себе, т. е. гармонически меняется вдоль неподвижной прямой.

В плане изложенного выше представления Е. А. Девяниным был указан еще один частный класс точных решений, выходящих, однако, за рамки условия (2.3) $N=0$: если правая часть уравнения (1.1) удовлетворяет условию (4.3), то постоянный единичный вектор \mathbf{n}° также, очевидно, является решением уравнения (1.1).

По уравнению (2.1) существование такого класса можно усмотреть, подчинив движение непосредственно условию $\mathbf{n} = \text{const}$.

¹ Предложена Е. А. Девяниным и Ю. К. Жбановым при обсуждении рукописи статьи [4] на семинаре по механике систем твердых тел и гироскопов (Институт проблем механики АН СССР).



Фиг. 3

5. Следует заметить, что рассмотренные здесь точные решения в подавляющем своем большинстве соответствуют весьма «экзотическим» случаям движения основания, особенно, если рассматривать это движение по отношению к вращающейся Земле. Однако некоторые частные случаи можно расценить как исключение из этого правила. В качестве такого примера можно привести равномерную циркуляцию основания с периодом Шулера вокруг какой-либо точки экватора. Вектор \mathbf{n}_1 по отношению к Земле описывает в этом случае круговой конус, симметричный относительно плоскости экватора. Точным решением уравнения (1.1) может служить вектор \mathbf{n} , совпадающий с зеркальным отражением вектора \mathbf{n}_1 в плоскости экватора.

Пример может быть усложнен произвольным изменением составляющей скорости основания вдоль параллели, в приведенном же варианте он соответствует наиболее простому движению основания по отношению к Земле.

В правой прямоугольной системе координат $\xi\eta\zeta$ (фиг. 3), связанной с Землей так, что ось η совпадает с полярной осью, а ось ζ проходит через центр циркуляции, проекции векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n} на координатные оси могут быть выражены формулами

$$\begin{aligned} \|n_{1\xi} \ n_{1\eta} \ n_{1\zeta}\| &= \| \rho \cos q \quad \rho \sin q \quad \sqrt{1-\rho^2} \| \\ \|n_{\xi} \ n_{\eta} \ n_{\zeta}\| &= \| \rho \cos q \quad -\rho \sin q \quad \sqrt{1-\rho^2} \| \end{aligned} \quad (5.1)$$

где ρ — параметр, характеризующий радиус циркуляции, а q — угол, задающий текущее положение основания на траектории.

Проекции векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n} , где точка, как условлено, означает дифференцирование в инерциальной системе координат, представляются выражениями

$$\begin{aligned} \| \dot{n}_{1\xi} \ \dot{n}_{1\eta} \ \dot{n}_{1\zeta} \| &= \| U \sqrt{1-\rho^2} - \rho q' \sin q \quad \rho q' \cos q \quad -U\rho \cos q \| \\ \| \dot{n}_{\xi} \ \dot{n}_{\eta} \ \dot{n}_{\zeta} \| &= \| U \sqrt{1-\rho^2} - \rho q' \sin q \quad -\rho q' \cos q \quad -U\rho \cos q \| \end{aligned} \quad (5.2)$$

где U — угловая скорость суточного вращения Земли. В рассматриваемом случае

$$q' = v \quad (5.3)$$

Выражения (5.1), (5.2) позволяют вычислить все элементы матрицы направляющих косинусов осей приборного трехгранника xuz , образуемого системой векторов

$$\mathbf{n}'/u, (\mathbf{n} \times \mathbf{n}')/u, \mathbf{n} \quad (5.4)$$

относительно трехгранника Дарбу $x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$, задаваемого системой единичных векторов

$$\mathbf{n}_1'/u, (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_1')/u, \mathbf{n}_1; u = |\mathbf{n}'| = |\mathbf{n}_1'| \quad (5.5)$$

Через элементы матрицы направляющих косинусов можно выразить тригонометрические функции углов α , β , γ , относительно которых полные уравнения движения гирогоризонткомпы составлены в работе [1].

Эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= -\frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{2\rho q' \cos q [U(1-\rho^2 \sin^2 q) - \sqrt{1-\rho^2} \rho q' \sin q]}{2[U(1-\rho^2 \sin^2 q) - \sqrt{1-\rho^2} \rho q' \sin q]^2 - u^2} \\ \sin \beta &= a_{23} = 2\rho \sin q [U(1-\rho^2 \sin^2 q) - \sqrt{1-\rho^2} \rho q' \sin q]/u \\ \operatorname{tg} \gamma &= -a_{13}/a_{33} = (2\rho^2 q' \sin q \cos q)/(1-2\rho^2 \sin^2 q) u \end{aligned} \quad (5.6)$$

Линейная скорость v точки подвеса (основания), входящая вместе со своей производной в коэффициенты уравнений относительно α , β , γ , в рассматриваемом случае выражается функцией времени

$$v = Ru = R[U^2(1 - \rho^2 \sin^2 q) - 2UV\sqrt{1 - \rho^2} \rho q' \sin q + \rho^2 q'^2]^{1/2} \quad (5.7)$$

где R — радиус Земли.

Угловая скорость ω трехгранника Дарбу вокруг оси z^0 , входящая наряду со скоростью v в коэффициенты уравнений, может быть вычислена по формуле

$$\omega = U \rho \sin q + [(\mathbf{n}_1 \cdot \dot{\mathbf{n}}_1) \cdot \mathbf{n}_1] / \mathbf{n}_1^2 \quad (5.8)$$

где штрих означает дифференцирование в системе координат $\xi\eta\zeta$.

Равенство (5.8) приводит к выражению

$$\omega = U \rho \sin q + \rho q' [\gamma \sqrt{1 - \rho^2} \rho (q'^2 - U^2 \sin^2 q) - U(1 - 2\rho^2) q' \sin q] / v^2 \quad (5.9)$$

В обозначениях [1] для рассматриваемого решения остается выполненным соотношение

$$2B \cos \varepsilon = mlv \quad (5.10)$$

Таким образом, для равномерной циркуляции основания с периодом, равным периоду Шулера, центром которой является точка, лежащая на экваторе, когда функции $v(t)$ и $\omega(t)$ задаются выражениями (5.7) и (5.9), полные уравнения движения гиригоризонткомпаса, выведенные в работе [1], помимо частного решения $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $2B \cos \varepsilon = mlv$, имеют точное частное решение, задаваемое выражениями (5.6) и (5.10) с учетом соотношения (5.3).

Поступила 15 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гиригоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Кошляков В. Н. Об одном классе точных решений уравнений движения корректируемого гиригоризонткомпаса. МТТ, 1969, № 6.
3. Кошляков В. Н. Теория гироскопических компасов. М., «Наука», 1972, стр. 292–306.
4. Кошляков В. Н. К вопросу построения некоторого класса решений гиригоризонтной системы. МТТ, 1975, № 2.
5. Жбанов Ю. К. К теории гиригоризонткомпаса. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
6. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.