МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1980

УДК 539.3:534.1

ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СРЕД

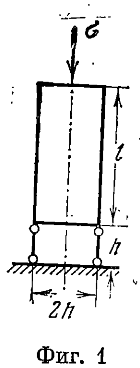
В. Д. КЛЮШНИКОВ

(*Москва*)

На основе рассмотрения близких движений проводится классификация особых точек процесса деформирования различных сред. Наряду с бифуркацией вводится понятие о псевдобифуркации. На примере идеализированного стержня показано, что известные особые точки, полагаемые в основу различных определений устойчивости, являются либо бифуркационными, либо псевдобифуркационными точками разных порядков. Предлагается классификация и обсуждается мера опасности таких особых точек и указывается возможный способ их нахождения на основе решения эквивалентной упругой бифуркационной задачи.

1. Опыт исследований по выявлению особенностей процессов деформирования показывает, что многие общие заключения могут быть получены на основе простейших моделей деформированных сред. Для анализа одномерных процессов типа сжатия с большим успехом используется модельное представление Шенли, в котором деформирование среды сводится к укорачиваниям двух стоек, опирающихся на них жестким блоком, несущим вертикальную нагрузку σ. При указанных на фиг. 1 размерах и при одинаковой площади сечений стоек, равной $^1/_2$, условия равновесия модели для малого отклонения uh точки приложения внешней нагрузки от вертикали определяются уравнениями (индекс 1 — правая, 2 — левая стойка):

$$\sigma_1+\sigma_2=2\sigma, \qquad \sigma_1-\sigma_2=2\sigma u,$$
$$e_1-e_2=2\lambda u \qquad (\lambda=l/h) \tag{1.1}$$



Фиг. 1

Основным (невозмущенным) процессом в дальнейшем считается процесс равномерного сжатия стоек, при котором $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, $e_1=e_2=e$, $u=0$. Особые точки основного процесса будем определять на основе анализа свойств побочного (возмущенного) процесса, возникающего при малых отклонениях значений внутренних параметров.

В рамках упругости, когда определяющим уравнением является

$$f(\sigma_k,\ e_k)=0 \quad {\scriptstyle (k=1,\ 2)} \tag{1.2}$$

возможны лишь точки бифуркации нулевого порядка (состояния), отвечающие моменту неединственности «в малом» для параметров σ_k, e_k. Полагая, что наряду с основным состоянием возможно как угодно близкое побочное равновесное состояние

$$\sigma_k=\sigma+\Delta\sigma_k, \qquad e_k=e+\Delta e_k, \qquad u=0+\Delta u$$
$$\Delta\sigma_k\ll\sigma, \qquad \Delta e_k\ll e \tag{1.3}$$

на основании (1.1) и (1.2) найдем

$$\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_2=2\sigma\Delta u, \qquad \Delta e_1-\Delta e_2=2\lambda\Delta u$$
$$f_\sigma(\sigma, e)\Delta\sigma_k+f_e(\sigma, e)\Delta e_k=0 \tag{1.4}$$

причем нижний индекс у функции f здесь и в дальнейшем означает частную производную по соответствующему аргументу. Уравнения (1.4) приводят к условию

$$(\sigma f_\sigma+\lambda f_e)\Delta u=0 \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что предположенная неединственность возможна в тот момент основного процесса, когда

$$\sigma=\sigma'=-f_e\lambda/f_\sigma=E'\lambda \tag{1.6}$$

где E' — касательный модуль на диаграмме сжатия.

Если определяющее уравнение имеет вид $f(\sigma_k, \sigma_k^\bullet, e_k, e_k^\bullet)=0$, что характерно для ползучести металлов [1], то при отыскании особых точек естественно предположить, что в побочном процессе, кроме (1.3), выполняются условия

$$\sigma_k^\bullet=\sigma^\bullet+\Delta\sigma_k^\bullet, \qquad e_k^\bullet=e^\bullet+\Delta e_k^\bullet, \qquad u^\bullet=0+\Delta u^\bullet$$
$$\Delta\sigma_k^\bullet\ll\sigma^\bullet, \qquad \Delta e_k^\bullet\ll e^\bullet \tag{1.7}$$

Таким образом для побочного процесса справедливо линеаризированное определяющее уравнение

$$f_\sigma\Delta\sigma_k+f_{\sigma^\bullet}\Delta\sigma_k^\bullet+f_e\Delta e_k+f_{e^\bullet}\Delta e_k^\bullet=0 \tag{1.8}$$

которое должно быть дополнено уравнениями модели типа (1.4) и

$$\Delta\sigma_1^\bullet-\Delta\sigma_2^\bullet=2(\sigma\Delta u^\bullet+\sigma^\bullet\Delta u), \qquad \Delta e_1^\bullet-\Delta e_2^\bullet=2\lambda\Delta u^\bullet \tag{1.9}$$

Из этой системы следует

$$(\sigma f_\sigma+\sigma^\bullet f_{\sigma^\bullet}+\lambda f_e)\Delta u+(\sigma f_{\sigma^\bullet}+\lambda f_{e^\bullet})\Delta u^\bullet=0 \tag{1.10}$$

Очевидно, что в основном процессе могут быть выделены две особые точки, отвечающие равенству нулю первой и второй скобок. Если последний случай отвечает бифуркации первого порядка (неединственность скоростей при однозначности состояния), то первый случай можно условно назвать псевдобифуркацией нулевого порядка (неединственность состояния при одинаковости скоростей). Первое обнаружение подобной точки связано с анализом решения задачи о ползучести при сжатии и было положено в основу известного критерия устойчивости [2]. В частности, при законе упрочнения

$$f=A\sigma_k^n-p_k^\bullet p_k^\alpha=0, \qquad (p_k=e_k-\sigma_k/E) \tag{1.11}$$

в условиях ползучести ($\sigma^*=0$) уравнение (1.10) имеет вид

$$p^\bullet(1-p/p_0)\Delta u-(p/\alpha)\Delta u^\bullet=0, \qquad p_0=\alpha(\sigma_0-\sigma)/n, \qquad \sigma_0=\lambda E \tag{1.12}$$

Следовательно при $\sigma<\sigma_0$ различимой является лишь точка псевдобифуркации (нулевого порядка), где $p=p_0$.

Заметим, что определяющее уравнение $1(\sigma_k, \sigma_k^\bullet, e_k, e_k^\bullet)=0$ включает и случай пластичности

$$f=\sigma_k^\bullet-\varphi(e_k)e_k^\bullet=0, \qquad \varphi(e_k)=\begin{cases}E', & e_k^\bullet>0\\ E, & e_k^\bullet<0\end{cases} \tag{1.13}$$

Неаналитичность этого соотношения, связанная с несовпадением касательного модуля $E'(e)$ с модулем Юнга E, порождая специфические трудности[1], не оказывает влияния [3] на первую точку бифуркации процесса, и эта точка может быть определена без учета разгрузки. Использование указанной выше методики наряду с известным результатом приводит к выявлению еще одной особой точки: $\sigma=\sigma'=E'\lambda$ (бифуркация), $\sigma^{\cdot}=\lambda\varphi'(e)e^{\cdot}$ (псевдобифуркация).

Последнее условие на основании (1.13) (без разгрузочной ветви) выделяет точку диаграммы сжатия, в которой

$$d\sigma/de=\lambda d^2\sigma/de^2$$

Особенность этой точки была уже замечена [4]; малое изменение геометрии λ вблизи (1.14) приводит к скачкообразному изменению бифуркационной нагрузки. Прямое же выделение ее как особой точки основного процесса до сих пор не было произведено потому, что вместо (1.13) использовалась интегральная форма (1.12), вполне эквивалентная для активной ветви процесса.

2. Таким образом, повышение порядка определяющего уравнения привело к появлению новых особых точек. Такое повышение может быть произведено и искусственно[2], например дифференцированием определяющего уравнения $f=0$. В результате будем иметь соотношение

$$F(\sigma_k, \sigma_k^{\cdot}, \sigma_k^{\cdot\cdot}, e_k, e_k^{\cdot}, e_k^{\cdot\cdot})=0 \tag{2.1}$$

которое можно рассматривать и независимо как определяющее уравнение нового материала. Отметим, что к такому типу приводится уравнение ползучести бетона Маслова — Арутюняна [5]. Повторяя рассуждение, придем к следующему уравнению:

$$(\sigma F_\sigma+\sigma^{\cdot}F_{\sigma^{\cdot}}+\sigma^{\cdot\cdot}F_{\sigma^{\cdot\cdot}}+\lambda F_e)\Delta u+(\sigma F_{\sigma^{\cdot}}+2\sigma^{\cdot}F_{\sigma^{\cdot\cdot}}+\lambda F_{e^{\cdot}})\Delta u^{\cdot}+(\sigma F_{\sigma^{\cdot\cdot}}+\lambda F_{e^{\cdot\cdot}})\Delta u^{\cdot\cdot}=0 \tag{2.2}$$

Очевидно, что точка бифуркации (второго порядка) определяется условием

$$\sigma F_{\sigma^{\cdot\cdot}}+\lambda F_{e^{\cdot\cdot}}=0 \quad (\Delta u=\Delta u^{\cdot}=0,\ \Delta u^{\cdot\cdot}\neq0) \tag{2.3}$$

и имеются две точки псевдобифуркации (нулевого и первого порядка соответственно)

$$\sigma F_\sigma+\sigma^{\cdot}F_{\sigma^{\cdot}}+\sigma^{\cdot\cdot}F_{\sigma^{\cdot\cdot}}+\lambda F_e=0,\ (\Delta u^{\cdot}=\Delta u^{\cdot\cdot}=0,\ \Delta u\neq0) \tag{2.4}$$

$$(\sigma+2\sigma^{\cdot})F_{\sigma^{\cdot}}+\lambda F_{e^{\cdot}}=0 \quad (\Delta u=\Delta u^{\cdot\cdot}=0,\ \Delta u^{\cdot}\neq0) \tag{2.5}$$

Для закона неинвариантной ползучести Маслова — Арутюняна в форме [6]:

$$F=\sigma_k^{\cdot\cdot}+[\gamma(1+E\psi)-E^{\cdot}/E]\sigma_k^{\cdot}-E(e_k^{\cdot\cdot}+\gamma e_k^{\cdot})=0 \tag{2.6}$$

где $\gamma=\text{const}$, $\psi=\psi(t)$ — функция старения, $E=E(t)$ — мгновенный модуль упругости, три указанные точки определяются соответственно так:

$$\begin{gathered}\sigma=\lambda E, \quad \sigma^{\cdot}[E^{\cdot}/E-\gamma(1+E\psi)]=\sigma^{\cdot\cdot}\\(\sigma+2\sigma^{\cdot})[\gamma(1+E\psi)-E^{\cdot}/E]=\lambda\gamma E\end{gathered} \tag{2.7}$$

---

[1] В частности, предположение $\Delta e_k^{\cdot}\ll e$ становится незаконным, что, однако, в силу линейности (1.13) относительно скоростей не нарушает справедливости (1.8).

[2] В рассмотренном выше случае повышение порядка не было искусственным. В качестве определяющего уравнения в пластичности допустимо лишь соотношение в скоростях (приращениях).

В условиях ползучести, при $\sigma<\min \lambda E=\lambda E_0$ различимой, как видно, может быть только точка псевдобифуркации первого порядка, для которой

$$1+E\psi-\lambda E/\sigma=E^{\cdot}/(\gamma E) \tag{2.8}$$

Если по предложению Н. Х. Арутюняна [5] использовать задание $\psi(t)$ в форме

$$\psi(t)=C_0+A_0/t, \quad E(t)=E_0(1-\beta e^{-\alpha t}) \tag{2.9}$$

то для бетона экспериментальные значения констант C_0, A_0, E_0, β, α, а также γ оказываются такими, что действительное t на основе формулы (2.8) получается только для значений σ, больших чем

$$\sigma_D=\lambda E_0/(1+E_0C_0) \tag{2.10}$$

Это характерное значение нагрузки ранее было получено в [7] и трактовалось как максимальное значение σ, при котором уход возмущенного процесса оказывается еще ограниченным на бесконечном интервале времени.

Если в качестве определяющего уравнения принять продифференцированную форму (1.11)

$$F=f^{\cdot}=nA\sigma_k^{n-1}\sigma_k^{\cdot}-\alpha p_k^{\alpha-1}(p_k^{\cdot})^2-p_k^{\alpha}p_k^{\cdot\cdot}=0 \tag{2.11}$$

то уравнение (2.2) при $\sigma^{\cdot}=0$ будет с учетом (1.11) иметь вид

$$(p^{\cdot})^2\Delta u-pp^{\cdot}\left(2-\frac{p}{p_0}\right)\Delta u^{\cdot}-\frac{p^2}{\alpha}\Delta u^{\cdot\cdot}=0 \tag{2.12}$$

Следовательно, при $\sigma<\sigma_0$ различимой является лишь точка псевдобифуркации первого порядка, где $p=2p_0$. Этот результат, трактуемый как точка раздела участков замедленного и ускоренного вынужденного (поперечной силой) ухода системы, был отмечен впервые в [8].

Для определяющего уравнения второго порядка можно различать не только случаи (2.3) — (2.5), но и смешанные особые точки, например такие:

$$\Delta u^{\cdot\cdot}=0, \quad p^{\cdot}\Delta u=mp_0\Delta u^{\cdot} \tag{2.13}$$

Тогда из (2.12) при $m\geqslant0$ следует $p=p_0(1+\sqrt{1-m})$ и возможные значения p располагаются между p_0 и $2p_0$.

3. С повышением порядка определяющего уравнения могут быть обнаружены более удаленные по времени особые точки. Так, при использовании дважды продифференцированного закона (1.11) при ползучести возникает точка псевдобифуркации второго порядка, где

$$p=3p_0(\Delta u=\Delta u^{\cdot}=\Delta u^{\cdot\cdot\cdot}=0, \quad \Delta u^{\cdot\cdot}\neq0) \tag{3.1}$$

Определяемая таким образом последовательность p_0, $2p_0$, $3p_0$ имеет лишь нижнюю грань, и только эта последняя является характерной для основного процесса. Другой характерной точкой могла бы быть верхняя грань подобной последовательности при ее ограниченности сверху. Однако известные определяющие уравнения этим свойством не обладают. Так, возможное усовершенствование закона (1.11), состоящее в введении дополнительного параметра q [1]:

$$f=A(\sigma_k+cq_k)^n-p_k^{\cdot}p_k^{\alpha}=0, \quad q_k=\int p_k d\sigma_k \tag{3.2}$$

приводит хотя и к более плотной, но все же неограниченной последовательности точек псевдобифуркации

$$p_0, \quad p_1 = \frac{2p_0}{1+cp_1}, \quad p_2 = \frac{3p_0}{1+cp_2}, \ldots \tag{3.3}$$

В случае определяющего уравнения наследственного типа

$$\sigma_k = Ee_k - \int\limits_{-\infty}^{t} K(\tau, t)\, e_k(\tau)\, d\tau \tag{3.4}$$

нижняя грань такого множества (псевдобифуркация нулевого порядка) определяется, очевидно, следующим образом. Используя уравнение модели (1.1), на основе (3.4) найдем

$$(\sigma_0 - \sigma)\,\Delta u - \lambda \int\limits_{-\infty}^{t} K(\tau, t)\, \Delta u(\tau)\, d\tau = 0 \tag{3.5}$$

Полагая функцию $\Delta u(\tau)$ аналитической и разлагая ее в ряд вблизи $\tau = t$ для псевдобифуркации нулевого порядка

$$\Delta u^{\cdot}(t) = \Delta u^{\cdot\cdot}(t) = \ldots = 0, \quad \Delta u(t) \neq 0 \tag{3.6}$$

получим условие

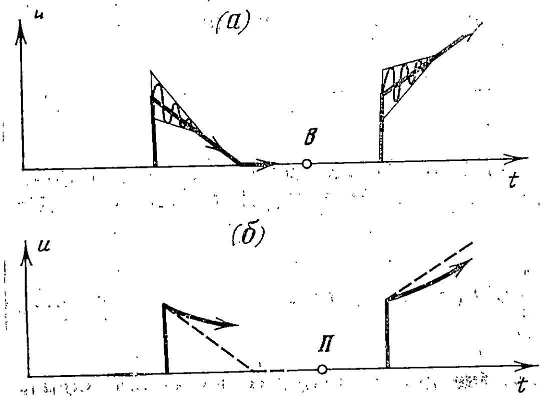
$$\sigma = \sigma_0 - \lambda \int\limits_{-\infty}^{t} K(\tau, t)\, d\tau = 0 \tag{3.7}$$

которое определяет известный [6, 9], так называемый длительный предел устойчивости. Обычной линеаризацией формула (3.7) легко обобщается на случай нелинейной наследственности.

4. Степень опасности выделяемых указанным способом особых точек неодинакова. Для аналитических теорий бифуркации любого порядка выделяют момент неустойчивости состояния (колебания возмущенного процесса будут расходящимися). Бифуркация для неаналитической среды (типа пластической) может означать как неустойчивость состояния (бифуркация нулевого порядка), так и неустойчивость процесса (бифуркация первого порядка) в том смысле, что исчезающе малое возмущение в данный момент приводит к конечным отклонениям на любом конечном интервале последующего движения (процесса). Возможность такого поведения объясняется тем, что для неаналитических (в указанном смысле) систем известный принцип непрерывной зависимости от начальных данных, в противоположность обычным аналитическим системам, выполняется не всегда, что и позволяет естественным образом определить неустойчивость процесса (движения) на конечном интервале времени.

Мера опасности точек псевдобифуркации не столь очевидна и практически ощутима. Псевдобифуркацию нулевого порядка обычно связывают с неустойчивостью процесса [1], хотя определение устойчивости в высказанной выше форме здесь не применимо так же, как оно не применимо для любой аналитической системы.

В связи с этим нужно отметить, что действенность определения устойчивости по Ляпунову для аналитических систем в конечном итоге основана на возможности нарушения принципа непрерывной зависимости от начальных условий в бесконечно удаленной точке. Поэтому такое определение не может быть трансформировано к виду, пригодному для определения устойчивости процессов (движений) на конечном интервале времени, которое только и интересно при исследовании деформирования тел [1]. Предлагаемые в этих условиях определения устойчивости, обзор которых можно найти в [10], являются условными, поскольку без выхода за рамки аналитичности не может быть реально ощутимой мера опасности явления, выделяемого как неустойчивость. И здесь может принести пользу сопоставление свойств возмущенного движения аналитических систем с теми, которые разграничивают безусловную устойчивость и неустойчивость неаналитического процесса.



Фиг. 2

В исследованном случае неаналитической системы [11] специфика поведения возмущенного движения, представленная на фиг. 2, *а*, состоит в том, что в области устойчивости (левее точки бифуркации процесса *В*) возмущенное движение в целом приближается к невозмущенному, а в области неустойчивости — удаляется от него. Вносящее некоторую неопределенность выражение «в целом» пропадает, если не обращать внимания на несущественный в подобных задачах колебательный режим и пользоваться квазистатическим анализом возмущенного движения [3], который выделяет среднюю траекторию, отмеченную фиг. 2, *а* жирными линиями [2]. Если эта особенность будет обнаружена в аналитической системе, то она дает возможность не только объективного (не зависящего от величины и формы возмущения), но и мотивированного разделения областей устойчивости и неустойчивости.

Естественно, что вводимое таким образом разграничение не выделяет столь сильного качественного отличия, как в неаналитическом случае. Здесь наклон начального участка возмущенного движения (кривая на фиг. 2, *б*) при переходе через границу областей меняется непрерывно, в то время как в неаналитическом случае (пунктир на фиг. 2, *б*) этот наклон меняется скачком — от конечного отрицательного до конечного положительного значения [3]. С приобретением непрерывности такой переход утрачивает явную катастрофичность, но допускает и более простой способ определения границы областей. Очевидно, что на этой границе при $u \neq 0$

---

1 Реальная ограниченность времени не мешает, однако, действенности определения Ляпунова при выявлении неустойчивости состояния равновесия, хотя и в этом случае вывод о неустойчивости делается, по существу, в обход определению, на основе начальных свойств возмущенного движения.

2 В задачах о медленном деформировании сильно диссипирующих систем, таких, как пластические, вязкие, ползущие, на первый план выступают не свойства инерционности, а природа связей. Там, где производился прямой анализ возмущенных движений [2, 11], неизменно обнаруживалось совпадение выводов динамического и квазистатического анализа. В то же время общие разработки (см. [10]) касаются исключительно динамических систем. Широко распространенное мнение о незаменимости (несократимости) динамического подхода основано, по-видимому, на том, что игнорирование инерционности в традиционных задачах с обратимыми связями лишает такие системы единственного носителя памяти о прошедшем возмущении.

3 Последнее (вместе с независимостью наклона от величины возмущения) обеспечивает безусловность неустойчивости правее точки *В* и абсолютную устойчивость левее точки *В*, выражающуюся в том, что последствия возмущений здесь полностью исчезают.

скорость отклонения $u^{\bullet}$ обращается в нуль, что отвечает точке II — псевдобифуркации нулевого порядка. Такое поведение обнаруживается в условиях ползучести металлов и поэтому указанный критерий, совпадающий с упомянутым выше критерием Работнова — Шестерикова [2], является в этих условиях максимально обоснованным.

Случай ползучести бетона по Маслову — Арутюняну является простым примером, когда рассмотренное выше разграничение невозможно и требуется учет более тонких свойств. В таких случаях разграничение областей устойчивости естественно проводить по знаку первой следующей производной (в данном случае — второй), что и определяет смысл первой различимой псевдобифуркации. Такой способ расширения понятия устойчивости не противоречит современным общим воззрениям [10] и дает полезные конкретные примеры возможных определений устойчивости применительно к нединамическим системам. Отметим, что критерий Работнова — Шестерикова является, по-видимому, следствием определения устойчивости, предложенного в [12].

5. Несмотря на пессимизм (см., например, [13]), высказываемый в отношении реальной значимости точек, названных здесь точками псевдобифуркации, нужно признать, что уже как наиранние особые точки процесса они отражают его объективную природу [1] и представляют поэтому определенный интерес.

Как нетрудно заметить из материала п. 1—3, для выявления этих точек нет необходимости не только в решении, но даже и в составлении уравнения типа (1.10), (2.2), (3.5) для нахождения основного и побочного процессов. Достаточно в линеаризованной форме определяющего уравнения отбросить все члены, за исключением тех, которые по порядку производных отвечают порядку псевдобифуркации. Полученный таким образом «упругий эквивалент» должен использоваться так же, как и при обычном определении точек бифуркации. Например, в случае определяющего уравнения Маслова-Арутюняна (2.6) для псевдобифуркации первого порядка

$$(\Delta\sigma_k = \Delta\sigma_k^{\bullet\bullet} = \Delta e_k = \Delta e_k^{\bullet\bullet} = 0, \quad \Delta\sigma_k^{\bullet} \neq 0,\ \Delta e_k^{\bullet} \neq 0)$$

упругий эквивалент имеет, очевидно, вид

$$(\sigma + 2\sigma^{\bullet})\,[\gamma(1 + E\psi) - E^{\bullet}/E]\,\Delta\sigma_k^{\bullet} = E\gamma\Delta e_k^{\bullet}$$

и совместно с уравнениями

$$\Delta\sigma_1^{\bullet} - \Delta\sigma_2^{\bullet} = 2\sigma\Delta u^{\bullet}, \quad \Delta e_1^{\bullet} - \Delta e_2^{\bullet} = 2\lambda\Delta u^{\bullet}$$

составляет систему, формально совпадающую с таковой для определения точки бифуркации упругой модели с модулем Юнга, равным

$$E^{\circ} = E\gamma\{(\sigma + 2\sigma^{\bullet})\,[\gamma(1 + E\psi) - E^{\bullet}/E]\}^{-1}$$

Отсюда при ползучести ($\sigma^{\bullet} = 0$) немедленно следует условие (2.8).

Этот подход может быть распространен на любые деформируемые системы (пластины, оболочки и т. д.). Для пространственного тела он может быть реализован следующим образом.

Пусть определяющее уравнение имеет вид

$$\Phi_{ij}(\sigma_{mn},\ \sigma_{mn}^{\bullet};\ e_{mn},\ e_{mn}^{\bullet}) = 0 \quad (i,\ j,\ m,\ n = x,\ y,\ z)$$

---

[1] Сильное приуменьшение времени выпучивания стержней при ползучести может быть объяснено тем, что послекритическая фаза здесь несравненно более длительна, чем, например, в пластичности.

Для определения момента псевдобифуркации нулевого порядка

$$\Delta\sigma_{ij}^{\cdot}=\Delta e_{ij}^{\cdot}=\Delta u_i^{\cdot}=0,\quad \Delta\sigma_{ij}\neq0,\quad \Delta e_{ij}\neq0,\quad \Delta u_i\neq0$$

имеем упругий эквивалент

$$\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial\sigma_{mn}}\Delta\sigma_{mn}+\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial e_{mn}}\Delta e_{mn}=0 \tag{5.1}$$

и уравнение сплошной среды в обычной для бифуркационных задач (см., например, [14]) форме

$$\Delta e_{ij}={}^1/_2(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i}),\quad (\Delta\sigma_{ij}+\sigma_{jk}\Delta u_{i,k})_{,j}=0$$
$$(\Delta\sigma_{ij}+\sigma_{jk}\Delta u_{i,k})\nu_j|_{S_T}=0,\quad \Delta u_i|_{S_u}=0$$

Если решена соответствующая задача для неоднородного упругого тела с матрицей упругости E^0_{ijmn}, совпадающей с той, что возникает при разрешимости уравнения (5.1) относительно $\Delta\sigma_{ij}$, то этим самым получено условие псевдобифуркации для исходного тела.

Поступила 10 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций, М., «Наука», 1966.
2. *Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
3. *Клюшников В. Д.* Неустойчивость пластических конструкций. В сб.: Проблемы теории пластичности. М., «Мир», 1976.
4. *Клюшников В. Д.* О некоторых особенностях явления неустойчивости за пределом упругости. В сб.: Успехи механики деформируемых сред. М., «Наука», 1975.
5. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.– Л., Гостехиздат, 1952.
6. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
7. *Бунятян Л. Б.* Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем., естеств. и техн. наук, 1953, т. 6, № 2.
8. *Куршин Л. М.* Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, 1961, № 6.
9. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
10. *Абгарян К. А.* Устойчивость движения на конечном интервале. Итоги науки и техники. Общая механика, т. 3. М., ВИНИТИ, 1976.
11. *Клюшников В. Д.* Устойчивость процесса сжатия идеализированного упругопластического стержня. Изд. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 6.
12. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
13. *Куршин Л. М.* Устойчивость при ползучести. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 3.
14. *Гузь А. Н.* Основы теории устойчивости горных выработок. Киев, «Наукова думка», 1977.