МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1980

УДК 539.3

ОДНА ЗАДАЧА ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ ВЕСОМОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ПОЛУСФЕРЫ

В. Ф. БОНДАРЕВА

(*Москва*)

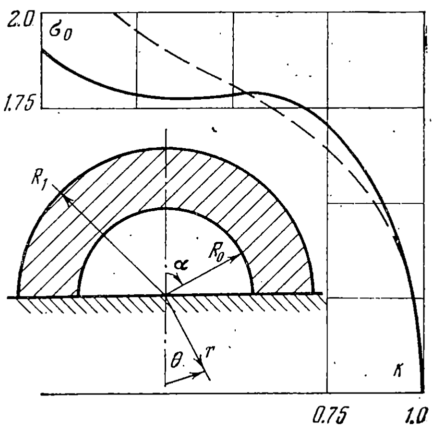
Задача о равновесии весомого толстостенного полусферического купола, покоящегося на жестком горизонтальном основании, рассматривалась ранее в [1]. Предложенный там общий метод решения осложнен необходимостью разложения искомых величин в ряды по неортогональным функциям. Ниже задача о весомом куполе сведена к задаче о невесомой толстостенной замкнутой сфере [2]. Решение имеет форму рядов по полиномам Лежандра. Исследована их сходимость. Приводятся некоторые численные результаты и дается их анализ.

1. Геометрия рассматриваемой задачи ясна из фиг. 1. Исследование проводится в сферической системе координат (r, θ, φ). Обозначения для компонентов вектора перемещения и напряжений те же, что и в [2].

Частное решение уравнений равновесия, соответствующее массовым силам и удовлетворяющее условиям $u_\theta=0$, $\tau_{r\theta}=0$ при $\theta=\pi/2$ имеет вид

$$\mathbf{u}=\frac{(1-2\nu)\rho g}{4(1-\nu)G}r^2\cos^2\theta\times$$
$$\times(-\cos\theta\mathbf{e}_r+\sin\theta\mathbf{e}_\theta) \qquad (1.1)$$

Здесь ρg — удельный вес материала купола, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы касательных к координатным линиям.



Фиг. 1, 2

Соответствующие вектору перемещения (1.1) напряжения равны

$$\left.\begin{matrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{matrix}\right\}=-\frac{\rho g r}{1-\nu}\cos\theta\left[(1-2\nu)\begin{matrix}\cos^2\theta\\ \sin^2\theta\end{matrix}+\nu\right]$$

$$\sigma_\varphi=-\frac{\nu\rho g r}{1-\nu}\cos\theta,\qquad \tau_{r\theta}=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\rho g r\cos^2\theta\sin\theta$$

Это решение оставляет плоским и ненагруженным торец полусферы $\theta=\pi/2$. Вес уравновешен приложенными к ее сферическим поверхностям нормальными и касательными напряжениями.

2. Пусть полусферический купол оперт на гладкое жесткое основание и нагружен только собственным весом.

Очевидно, что решение этой задачи есть сумма построенного выше частного решения и решения задачи о невесомом замкнутом сферическом слое. Последнее решение должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\sigma_r(R_i,\theta)=-\frac{\rho g R_i}{1-\nu}\cos\theta[(1-2\nu)\cos^2\theta+\nu] \quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tau_{r\theta}(R_i,\theta)=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\rho g R_i\cos^2\theta\sin\theta \quad (i=0,1) \tag{2.1}$$

$$\sigma_r(R_i,\pi-\theta)=\sigma_r(R_i,\theta),\quad \tau_{r\theta}(R_i,\pi-\theta)=-\tau_{r\theta}(R_i,\theta)$$

Общее решение задачи о толстостенной замкнутой сфере известно [2]. В соответствии с [2] для перемещений имеем

$$2Gu_r=\sum_{n=0}^{\infty}\left[R_1A_n(n+1)(n-2+4\nu)\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n+1}+R_1B_nn\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-1}+\right.$$
$$\left.+R_0C_nn(n+3-4\nu)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n}-R_0D_n(n+1)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+2}\right]P_n(\cos\theta)$$

$$2Gu_\theta=\sum_{n=1}^{\infty}\left[R_1A_n(n+5-4\nu)\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n+1}+R_1B_n\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-1}+\right. \tag{2.2}$$
$$\left.+R_0C_n(-n+4-4\nu)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n}+R_0D_n\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+2}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}$$

Здесь A_n, B_n, C_n, D_n — произвольные постоянные, $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

Соответствующие этим перемещениям напряжения имеют следующий вид:

$$\sigma_r=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n}+b_n\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-2}-c_n\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1}+d_n\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+3}\right]P_n(\cos\theta)$$

$$\tau_{r\theta}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{\varepsilon_{1n}}{n+1}\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n}+b_n\frac{1}{n}\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-2}+c_n\frac{\varepsilon_{2n}}{n}\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1}-\right. \tag{2.3}$$
$$\left.-d_n\frac{1}{n+1}\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+3}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$\sigma_\theta=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n(n^2+4n+2+2\nu)(n+1)\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n}+B_nn^2\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-2}-\right.$$
$$\left.-C_nn(n^2-2n-1+2\nu)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1}+D_n(n+1)^2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+3}\right]P_n(\cos\theta)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(n+5-4\nu)\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n}+B_n\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-2}+C_n(-n+4-4\nu)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1}+\right.$$
$$\left.+D_n\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+3}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta$$

$$\sigma_\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n(n+1)(n-2-2\nu+4n\nu)\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n}+B_nn\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-2}+\right.$$

$$+ C_n n(n+3-4\nu n-2\nu)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} - D_n(n+1)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+3}\Bigg] P_n(\cos\theta) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(n+5-4\nu)\left(\frac{r}{R_1}\right)^n + B_n\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-2} + C_n(-n+4-4\nu)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1} +\right.$$

$$\left. + D_n\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+3}\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\operatorname{ctg}\theta$$

$$a_n=A_n(n+1)(n^2-n-2-2\nu),\quad b_n=B_n n(n-1)$$

$$c_n=C_n n(n^2+3n-2\nu),\quad d_n=D_n(n+1)(n+2)\quad (n\neq 0)$$

$$\varepsilon_{1n}=\frac{n^2+2n-1+2\nu}{n^2-n-2-2\nu},\qquad \varepsilon_{2n}=\frac{n^2-2+2\nu}{n^2+3n-2\nu}$$

Без ограничения общности можно принять $B_0=b_0=C_0=c_0=0$.

Для решения краевой задачи (2.1) разложим граничные значения напряжений на сферических поверхностях $r=R_i$ в ряды по полиномам Лежандра

$$\sigma_r(R_i,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n^{(i)}P_n(\cos\theta),\quad \tau_{r\theta}(R_i,\theta)=\sum_{n=1}\tau_n^{(i)}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}$$

$$\sigma_n^{(i)}=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}\sigma_r(R_i,\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \tag{2.4}$$

$$\tau_n^{(i)}=\frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_0^{\pi}\tau_{r\theta}(R_i,\theta)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta\,d\theta$$

В силу симметрии задачи относительно экваториальной плоскости имеем

$$\sigma_n^{(i)}=\frac{2n+1}{2}[1+(-1)^n]\int_0^{\pi/2}\sigma_r(R_i,\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \tag{2.5}$$

$$\tau_n^{(i)}=\frac{2n+1}{2n(n+1)}[1+(-1)^n]\int_0^{\pi/2}\tau_{r\theta}(R_i,\theta)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta\,d\theta$$

Как и следовало ожидать, нечетные коэффициенты в рядах (2.4) равны нулю.

Выполним интегрирование в (2.5). Для этого выразим граничные значения (2.1) через полиномы Лежандра

$$\sigma_r(R_i,\theta)=-\frac{\rho g R_i}{5(1-\nu)}[(3-\nu)P_1(\cos\theta)+2(1-2\nu)P_3(\cos\theta)]$$

$$\tau_{r\theta}(R_i,\theta)=-\frac{(1-2\nu)\rho g R_i}{15(1-\nu)}\frac{d}{d\theta}[3P_1(\cos\theta)+2P_3(\cos\theta)]$$

Используем известную формулу [3]:

$$J_{mn}=\int_0^{\pi/2}P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{(-1)^{(m+n+1)/2}m!n!}{2^{m+n-1}(n-m)(m+n+1)\{(n/2)![(m-1)/2]!\}^2} \tag{2.6}$$

а также легко устанавливаемое соотношение

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dP_m(\cos\theta)}{d\theta}\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\sin\theta d\theta=n(n+1)J_{mn}$$

В этих формулах m — нечетное, n — четное. Вместо (2.5) получим

$$\begin{gathered}\sigma_n^{(1)}=\frac{\rho gR_1(2n+1)}{2(1-\nu)}[1+(-1)^n]\frac{6-n(n+1)\nu}{(n-3)(n+4)}J_{1n}\\ \tau_n^{(1)}=\frac{\rho gR_1(1-2\nu)}{1-\nu}(2n+1)\frac{1+(-1)^n}{(n-3)(n+4)}J_{1n}\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\sigma_n^{(0)}=k\sigma_n^{(1)},\quad \tau_n^{(0)}=k\tau_n^{(1)},\quad k=R_0/R_1\quad (n=0,1,2\ldots)$$

Сравнивая ряды (2.3) и (2.4) при $r=R_0$ и $r=R_1$, получаем для определения произвольных постоянных следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}a_n+b_n-c_nk^{n+1}+d_nk^{n+3}=\sigma_n^{(1)}\quad (n\neq 0)\\ a_n\frac{\varepsilon_{1n}}{n+1}+b_n\frac{1}{n}+c_nk^{n+1}\frac{\varepsilon_{2n}}{n}-d_nk^{n+3}\frac{1}{n+1}=\tau_n^{(1)}\\ a_nk^n+b_nk^{n-2}-c_n+d_n=\sigma_n^{(0)}\\ a_nk^n\frac{\varepsilon_{1n}}{n+1}+b_nk^{n-2}\frac{1}{n}+c_n\frac{\varepsilon_{2n}}{n}-d_n\frac{1}{n+1}=\tau_n^{(0)}\end{gathered} \tag{2.8}$$

При $n=0$ имеем

$$a_0=\frac{\sigma_0^{(1)}-k^3\sigma_0^{(0)}}{1-k^3},\quad b_0=c_0=0,\quad d_0=\frac{\sigma_0^{(0)}-\sigma_0^{(1)}}{1-k^3} \tag{2.9}$$

Можно показать, что решение системы (2.8) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}a_n\Delta=\Delta_1(1+\varepsilon_{2n})k^{n+1}(1-k^2)+\Delta_2\left(1-\frac{n+1}{n}\varepsilon_{2n}\right)(1-k^{2n-1})\\ b_n\Delta=\Delta_3\left(\varepsilon_{2n}-\frac{n}{n+1}\right)(1-k^{2n+3})+\Delta_4(1+\varepsilon_{1n})k^{n+1}(1-k^2)\\ c_n\Delta=\Delta_1\left(1-\frac{n}{n+1}\varepsilon_{1n}\right)(1-k^{2n+3})-\Delta_2(1+\varepsilon_{1n})k^{n-2}(1-k^2)\\ d_n\Delta=-\Delta_3(1+\varepsilon_{2n})k^{n-2}(1-k^2)+\Delta_4\left(\varepsilon_{1n}-\frac{n+1}{n}\right)(1-k^{2n-1})\\ \Delta=(1+\varepsilon_{1n})(1+\varepsilon_{2n})k^{2n-1}(1-k^2)^2+\\ +\left(\varepsilon_{1n}-\frac{n+1}{n}\right)\left(\varepsilon_{2n}-\frac{n}{n+1}\right)(1-k^{2n+3})(1-k^{2n-1})\end{gathered} \tag{2.10}$$

$$\Delta_1=[\sigma_n^{(1)}+(n+1)\tau_n^{(1)}]k^{n-2}-[\sigma_n^{(0)}+(n+1)\tau_n^{(0)}]$$

$$\Delta_2=[\sigma_n^{(1)}-n\tau_n^{(1)}]-k^{n+3}[\sigma_n^{(0)}-n\tau_n^{(0)}]$$

$$\Delta_3=[\sigma_n^{(1)}\varepsilon_{1n}-(n+1)\tau_n^{(1)}]-[\sigma_n^{(0)}\varepsilon_{1n}-(n+1)\tau_n^{(0)}]k^{n+1}$$

$$\Delta_4=[\sigma_n^{(0)}\varepsilon_{2n}+n\tau_n^{(0)}]-[\sigma_n^{(1)}\varepsilon_{2n}+n\tau_n^{(1)}]k^n$$

Отметим, что как система (2.8), (2.9), так и ее решение (2.10) имеют место при любой поверхностной нагрузке: если полусфера кроме веса нагружена дополнительно по сферическим поверхностям $r=R_i$, это отразится лишь на значениях правой части системы, т. е. на коэффициентах $\sigma_n^{(i)}$ и $\tau_n^{(i)}$. Если полусфера нагружена только весом, эти коэффициенты имеют вид (2.7) и Δ_j $(j=1-4)$ можно придать следующую форму:

$$\Delta_1=-[\sigma_n^{(1)}+(n+1)\tau_n^{(1)}](k-k^{n-2}),\quad \Delta_2=[\sigma_n^{(1)}-n\tau_n^{(1)}](1-k^{n+4})$$
$$\Delta_3=[\sigma_n^{(1)}\varepsilon_{1n}-(n+1)\tau_n^{(1)}](1-k^{n+2}),\quad \Delta_4=[\sigma_n^{(1)}\varepsilon_{2n}+n\tau_n^{(1)}](k-k^n) \tag{2.11}$$

3. Исследуем сходимость рядов (2.2), (2.3). Для определенности остановимся на задаче о полусфере, нагруженной только собственным весом. Прежде всего выясним асимптотические свойства коэффициентов a_n, b_n, c_n и d_n.

В силу известного соотношения [4]:

$$P_{2k}(0)=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\qquad (k=0,1,2...)$$

из (2.6) находим

$$J_{1n}=-\frac{P_n(0)}{(n-1)(n+2)}\qquad (n=0,2,4,...)$$

Подставляя это значение в (2.7), получаем

$$\sigma_n^{(1)}\to\frac{\rho gR_1}{1-\nu}\frac{2\nu}{n}P_n(0),\qquad n\to\infty$$

$$\tau_n^{(1)}\to-\frac{\rho gR_1(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{4}{n^3}P_n(0)$$

Имея решение системы (2.8) в явном виде (2.10), (2.11), легко установить, что при $n\to\infty$

$$a_n\to-b_n\to c_nk^{-1}\to d_nk^{-1}\to-\frac{n}{2}\sigma_n^{(1)}\to-\frac{\rho gR_1\nu}{1-\nu}P_n(0)$$
$$(a_n+b_n)\to(-c_n+d_n)k^{-1}\to\sigma_n^{(1)}\to\frac{2\rho gR_1\nu}{(1-\nu)n}P_n(0) \tag{3.1}$$

Докажем сначала сходимость ряда, соответствующего нормальным радиальным напряжениям σ_r. Согласно (2.3), имеем

$$\sigma_r=\frac{\rho gR_1\nu}{1-\nu}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{-\left[1-\left(\frac{R_1}{r}\right)^2\right](1+\delta_{1n})\left(\frac{r}{R_1}\right)^n+\right.$$
$$+\frac{2}{n+1}\left(\frac{r}{R_1}\right)^{n-2}(1+\delta_{2n})+k\left[1-\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\right](1+\delta_{3n})\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+1}+$$
$$\left.+\frac{2k}{n+1}\left(\frac{R_0}{r}\right)^{n+3}(1+\delta_{4n})\right\}P_n(0)P_n(\cos\theta)+a_0+\left(\frac{R_0}{r}\right)^3d_0 \tag{3.2}$$

Здесь введены новые постоянные δ_{in}, такие, что

$$a_n=-\frac{\rho g R_1 \nu}{1-\nu}(1+\delta_{1n})P_n(0),\qquad c_n=-\frac{\rho g R_1\nu}{1-\nu}(1+\delta_{3n})P_n(0)k$$

$$a_n+b_n=2\rho g R_1\nu(1+\delta_{2n})P_n(0)\,/\,[(1-\nu)(n+1)]$$

$$d_n-c_n=2k\rho g R_1\nu(1+\delta_{4n})P_n(0)\,/\,[(1-\nu)(n+1)]$$

В силу (2.10) и (3.1) получаем $|\delta_{in}|\leqslant d_i/n$ при $n\geqslant 2$ (d_i=const). Просуммируем главную часть ряда (3.2), т. е. ряд вида

$$s(x,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}x^n P_n(0)P_n(\cos\theta),\qquad x\leqslant 1$$

Такой ряд встречается при решении задач для сферы [2, 5, 6], его сумма равна

$$s(x,\theta)=\frac{2}{\pi}\frac{K(k)}{h}-1,\qquad h^2=1+x^2+2x\sin\theta,\qquad k^2h^2=4x\sin\theta$$

Здесь $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Он имеет логарифмическую особенность при $k=1$ ($x=1$, $\theta=\pi/2$). Кроме того

$$s(x,\theta)=-{}^1\!/_2x^2(1+3\sin^2\theta)+O(x^3)\qquad\text{при } x\to 0$$

Интегрируя ряд s по x, получаем

$$s_1(x,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}P_n(0)P_n(\cos\theta)=(x-1)s(x,\theta)-\int_0^x(x-1)s_x'(x,\theta)\,dx$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле ограничена, и сумма ряда s_1 ограничена всюду в области $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

Заметим, что ряды

$$s_m(x,\theta)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^m}P_n(0)P_n(\cos\theta),\qquad m\geqslant 1$$

сходятся равномерно, так как мажорируются сходящимся числовым рядом

$$|s_m(x,\theta)|<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{1/12n}}{n^{m+1/2}}\qquad(0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

При выводе последнего соотношения использованы неравенства [7]:

$$|P_n(0)|<\sqrt{\frac{2}{\pi n}}e^{1/12n},\qquad |P_n(\cos\theta)|\leqslant 1$$

Подставляя найденные суммы $s(x,\theta)$ и $s_1(x,\theta)$ в (3.2), убеждаемся, что

$$\sigma_r=\frac{\rho g R_1\nu}{1-\nu}\left\{-\left(\frac{R_1}{r}\right)^3\left(1-\frac{r}{R_1}\right)^2\left(2+\frac{r}{R_1}\right)\left[s\left(\frac{r}{R_1},\quad\theta\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R_1}\right)^2(1+3\sin^2\theta)\right]+k\frac{R_0}{r}\left(1-\frac{R_0}{r}\right)^2 s\left(\frac{R_0}{r},\theta\right)\right\}+f(r,\theta)$$

где $f(r,\theta)$ — равномерно сходящийся при $R_0\leqslant r\leqslant R_1$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ ряд.

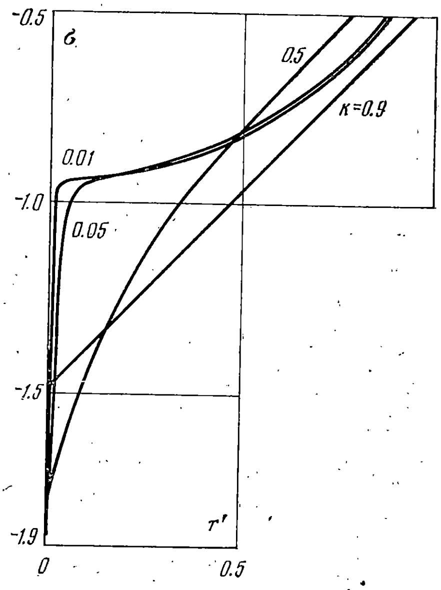
Аналогично можно доказать сходимость рядов, соответствующих остальным напряжениям, а также перемещениям. При этом в рядах, содержащих производную от полиномов Лежандра по θ, следует предварительно выразить ее через полиномы Лежандра по известной формуле [4]:

$$\frac{dP_n(x)}{dx}=\frac{n(n+1)}{(2n+1)(x^2-1)}[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)]$$

4. Приведем некоторые численные результаты, полученные на ЭВМ БЭСМ-4 при $\nu=0.3$.

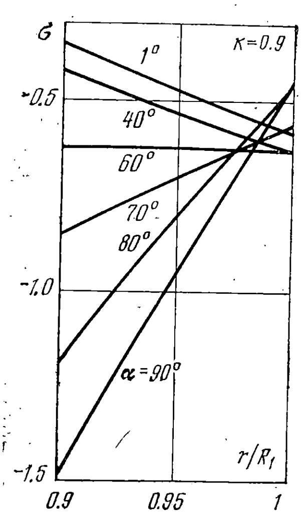
На фиг. 2 представлена зависимость максимальных по модулю контактных напряжений $\sigma_0=-\sigma_\theta(R_0, \pi/2)/(\rho g R_1)$ от отношения $k=R_0/R_1$. Пунктирные линии на этой фигуре получены в соответствии с приближенным асимптотическим решением теории тонких сферических оболочек [8].

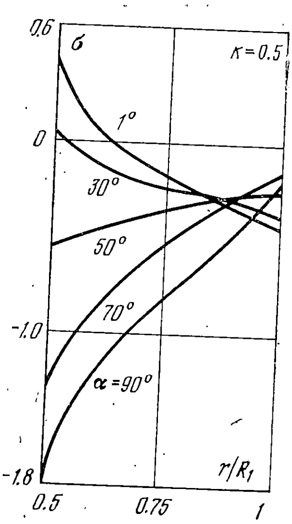
На фиг. 3 представлены распределения контактных напряжений $\sigma=\sigma_\theta(r, \pi/2)/(\rho g R_1)$ по торцу оболочки для различных значений k, $r^1=(r-R_0)(R_1-R_0)^{-1}$. При $k\ll 1$ хорошо видна концентрация напряжений в окрестности малой сферической выточки в центре полусферы. Из графиков следует, что коэффициент концентрации при $k\to 0$ не превышает двух, а концентрация затухает на расстоянии $\sim 2R_0$ от внутренней поверхности полусферы $r=R_0$.

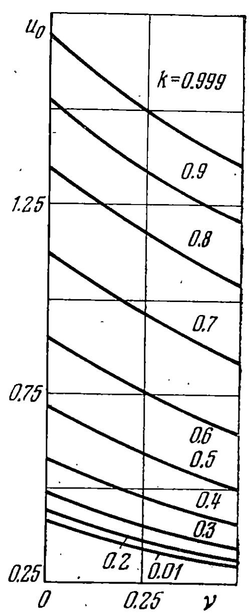


Фиг. 3

На фиг. 4, 5 приведены эпюры нормальных к сечениям $\alpha=\pi-\theta=\text{const}$ напряжений $\sigma_\theta(r, \theta)$ при двух значениях $k=0.9$ и $k=0.5$. Для тонкого полусферического купола ($k=0.9$) распределение нормальных напряжений близко к линейному. С увеличением толщины полусферы линейность нарушается. При обоих







Фиг. 4, 5, 6

значениях параметра k сохраняется моментное напряженное состояние в окрестности полюса полусферы.

Отметим, что при вычислении контактных напряжений предварительно была выделена и просуммирована в элементарных функциях главная часть соответствующего ряда. Эпюры на фиг. 4, 5 получены прямым суммированием укороченного ряда, в котором сохранялись лишь первые $n \leqslant N=20$ членов.

Результаты вычисления перемещений показывают, что максимальными на внешней поверхности полусферы являются вертикальные перемещения ее верхней точки (полюса $r=R_1$, $\theta=\pi$). На фиг. 6 представлена зависимость $u_0=-2Gu_r(R_1, \pi) / (\rho g R_1^2)$ от коэффициента Пуассона ν при различных значениях отношения k.

Аналогичная задача для сплошного весомого полушара без сферической выточки $r=R_0$ допускает замкнутое решение. Оно получено в [9].

Поступила 18 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки. ПММ, 1943, т. 7, вып. 6.
2. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М.– Л., Гостехиздат, 1955.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
4. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансдентные функции. М., «Наука», 1966.
5. *Бондарева В. Ф.* О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
6. *Карпенко В. А.* О замкнутом решении первой краевой задачи теории упругости для пространства с шаровой полостью. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.
7. *Корн Г. А., Корн Т. Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1974.
8. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
9. *Бондарева В. Ф.* Контактная задача для весомого полушара. Тр. метролог. ин-в СССР, Всес. н.-и. ин-т физ.-техн. и радиотехн. измерений, М., Изд-во стандартов, 1974, вып. 119 (179).