МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1980

УДК 539.3

# КВАЗИКОНСТАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ НЕСТАРЕЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

В. И. МАЛЫЙ

(*Москва*)

Использование принципа Вольтерра [1–5] позволяет свести решение широкого круга задач линейной вязкоупругости для материалов, свойства которых не изменяются во времени, к чисто математической проблеме построения линейных операторов, являющихся некоторыми функциями от операторов, характеризующих вязкоупругие свойства материала.

Точные решения вязкоупругих задач удается довести до числа лишь в исключительных случаях. В связи с этим разработаны эффективные приближенные методы расшифровки функций от операторов [2–5], основывающиеся на приближенном обращении преобразования Лапласа, на аппроксимации реальной зависимости решения от коэффициента Пуассона более простыми функциями (например, дробно-линейными или полиномами), аппроксимации реальных операторов вязкоупругости операторами с экспоненциальными, степенными, экспоненциально-степенными ядрами и их табулированными резольвентами, а часто и на замене операторов коэффициентов Пуассона или объемного модуля на константы. Тем не менее даже при использовании указанных приближений необходимые вычисления остаются довольно трудоемкими.

Когда можно ограничиться невысокой точностью и известна норма оператора коэффициента Пуассона, достаточно простые результаты [1] получаются при помощи неравенств для точного решения [6, 7].

В данной работе предлагается еще один приближенный метод решения задач вязкоупругости, основанный на использовании описанного ниже свойства квазиконстантности вязкоупругих операторов. Условия применимости метода (малость показателя квазиконстантности операторов вязкоупругости) имеют простой смысл и могут быть проверены заранее. Метод пригоден как для аналитического, так и для численного решения линейных задач вязкоупругости, приводит к простому алгоритму вычислений, не требующему выполнения предварительной аппроксимации реальных кривых ползучести или зависимости упругого решения от упругих констант упрощенными аналитическими выражениями.

1. Используемые в линейной теории вязкоупругости при отсутствии старения интегральные операторы вида

$$\mathbf{A}\varepsilon(t)=\int_0^t A(\tau)\,\varepsilon'(t-\tau)\,d\tau,\qquad \varepsilon'(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{1.1}$$

характеризуются откликом $A(t)=\mathbf{A}\theta(t)$ на единичную ступенчатую функцию Хевисайда $\theta(t)$.

Оператор $\mathbf{A}$ будем называть квазиконстантным с показателем квазиконстантности $\alpha$, если выполняется условие

$$\left|\frac{tA'(t)}{A(t)}\right|\leqslant\alpha\ll 1\qquad (t>0) \tag{1.2}$$

[1] См. *Малый В. И., Ефимов А. Б.* О приближенных решениях задач вязкоупругости. Аннот. докл. Семинар кафедры теории упругости МГУ. В сб.: Упругость и неупругость, вып. 2, М., Изд-во МГУ, 1971.

Показатель квазиконстантности $\alpha$ легко определить, когда известен отклик $A(t)$.

Оказывается, вязкоупругие операторы довольно многих практически интересных видов материалов можно с большой точностью считать квазиконстантными.

Были обработаны экспериментальные данные [8–14] о вязкоупругих свойствах широкого круга вязкоупругих материалов в линейной области при комнатной температуре и нормальной влажности. Даже в худшем случае, а именно для кривой ползучести слоистого асбестопластика [11], показатель $\alpha=0{,}12$ лишь незначительно превышал 0,1. В остальных случаях оказалось, что величина $\alpha$ была меньше этого значения, причем в большинстве случаев существенно меньше. Например, определенный по данным [8] о релаксации синтетического каучука показатель $\alpha$ оператора $\mathbf{E}$ не превышает 0.044.

Объемная ползучесть полиуретана при постоянном давлении и релаксация при простом растяжении в линейной области описываются выражениями [13, 14]

$$-\varepsilon(t)=\frac{1}{3\mathbf{K}}\theta(t)p=\left[5.99+0.185\left(\frac{t}{t_0}\right)^{0.135}\right]p\cdot10^{-11},\qquad 0.04\leqslant\frac{t}{t_0}\leqslant100 \tag{1.3}$$

$$\sigma(t)=E(t)\varepsilon=\left[3.7-0.293\left(\frac{t}{t_0}\right)^{0.125}\right]\varepsilon\cdot10^{9},\qquad 0.01\leqslant\frac{t}{t_0}\leqslant2 \tag{1.4}$$

где $t_0=1$ ч., а напряжения измеряются в Н/м$^2$, так что для операторов $\mathbf{K}^{-1}$ и $\mathbf{E}$ показатели квазиконстантности равны 0.008 и 0.012 соответственно.

Последний пример интересен тем, что, зная функции (1.3) и (1.4), можно полностью описать вязкоупругие свойства полиуретана.

Необходимо подчеркнуть, что малость показателя квазиконстантности $\alpha$ никак не связана с относительной малостью деформаций ползучести. Например, в случае, когда кривая ползучести описывается степенным законом

$$\varepsilon(t)=\mathbf{E}^{-1}\theta(t)=\varepsilon_0+mt^n \tag{1.5}$$

нетрудно заметить, что для оператора $\mathbf{E}^{-1}$ будет $\alpha<n$ при любой величине упругой деформации $\varepsilon_0$, даже малой в сравнении с деформацией ползучести $mt^n$.

В связи со сказанным отметим, что многие исследователи вслед за Больцманом экспериментальный закон ползучести принимали логарифмическим, т. е. близким к степенной зависимости (1.5) с малым показателем $n$. Из этого известного факта в общих чертах следует, что поведение многих реальных материалов при ползучести, по крайней мере, качественно соответствует выражениям типа (1.5) именно при малых значениях $n$ и соответственно характеризуется малыми показателями квазиконстантности $\alpha$.

2. Далее будем считать показатели квазиконстантности рассматриваемых операторов вязкоупругости малыми и, исходя из этого, проведем асимптотический по этим показателям анализ решений задач вязкоупругости.

Из определения (1.2) нетрудно получить основное неравенство для отклика $A(t)$ квазиконстантного оператора

$$\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha}\leqslant\left|\frac{A(\tau)}{A(t)}\right|\leqslant\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha},\qquad A(t)\neq0\quad{\scriptstyle(0<\tau\leqslant t)} \tag{2.1}$$

из которого следует также неравенство для разности

$$\left|1-\frac{A(\tau)}{A(t)}\right|\leqslant\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha}-1 \qquad (0<\tau\leqslant t) \tag{2.2}$$

Рассмотрим произведение квазиконстантных операторов **A** и **B**, характеризуемых откликами $A(t)$ и $B(t)$ и показателями квазиконстантности $\alpha$ и $\beta$. Покажем, что отклик произведения **AB** таких операторов равен

$$\mathbf{AB}\theta(t)=A(t)B(t)+O(\alpha\beta) \tag{2.3}$$

Действительно, погрешность этого соотношения

$$\Delta(t)=\frac{\mathbf{AB}\theta(t)}{A(t)B(t)}-1=-\int_0^t\frac{B'(t-\tau)}{B(t)}\left[1-\frac{A(\tau)}{A(t)}\right]d\tau \tag{2.4}$$

легко оценивается при помощи неравенств (1.2), (2.1) и (2.2)

$$|\Delta(t)|\leqslant\int_0^t\left|\frac{B(t-\tau)}{B(t)}\frac{B'(t-\tau)}{B(t-\tau)}\right|\left|1-\frac{A(\tau)}{A(t)}\right|d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^t\frac{\beta t^{\beta}}{(t-\tau)^{1+\beta}}\left(\frac{t^{\alpha}}{\tau^{\alpha}}-1\right)d\tau=\beta\int_0^1(1-y)^{-1-\beta}(y^{-\alpha}-1)\,dy=\beta J(\alpha,\beta) \tag{2.5}$$

Так как $\alpha$ и $\beta$ положительны и малы, подынтегральное выражение обладает интегрируемыми особенностями при $y\to0$ и $y\to1$. Можно убедиться, что интеграл $J(\alpha,\beta)$ является аналитической функцией в окрестности точки $\alpha=0$, $\beta=0$, обращающейся в нуль при $\alpha=0$. Поэтому имеет место асимптотическая оценка $J(\alpha,\beta)\sim C\alpha$ $(\alpha\to0,\ \beta\to0)$.

Нетрудно проверить также, например численным интегрированием при $\beta=0$ и малых $\alpha$, что величина константы $C$ порядка единицы. Отсюда следует справедливость асимптотической оценки (2.3).

Таким образом, погрешность определения отклика произведения квазиконстантных операторов, а тем самым и построения самого произведения **AB** согласно соотношению (2.3)

$$\mathbf{AB}\varphi(t)=\int_0^t A(\tau)B(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau+O(\alpha\beta)=(\mathbf{AB})_k\varphi(t)+O(\alpha\beta) \tag{2.6}$$

является величиной второго порядка малости по показателям квазиконстантности сомножителей.

Существенно, что с получившимся в результате оператором $(\mathbf{AB})_k$ далее можно обращаться как с квазиконстантным, так как для его показателя квазиконстантности справедливо неравенство

$$\left|\frac{t}{A(t)B(t)}\frac{d}{dt}[A(t)B(t)]\right|\leqslant\left|\frac{tA'(t)}{A(t)}\right|+\left|\frac{tB'(t)}{B(t)}\right|\leqslant\alpha+\beta \tag{2.7}$$

Рассмотрим далее оператор $\mathbf{A}_k^{-1}$, определяемый следующим выражением для отклика:

$$\mathbf{A}_k^{-1}\theta(t)=1/\mathbf{A}\theta(t)=1/A(t) \tag{2.8}$$

Оператор $\mathbf{A}_k^{-1}$, очевидно, квазиконстантен, и его показатель квазиконстантности равен

$$\max\left|\frac{t}{\mathbf{A}_k^{-1}\theta(t)}\frac{d}{dt}\mathbf{A}_k^{-1}\theta(t)\right|=\max\left|\frac{tA'(t)}{A(t)}\right|=\alpha$$

Поэтому в соотношении (2.6) можно положить $\mathbf{B}=\mathbf{A}_k^{-1}$. Умножив полученное таким образом равенство $\mathbf{A}\mathbf{A}_k^{-1}\theta(t)=\theta(t)+O(\alpha^2)$ на $\mathbf{A}^{-1}$, определим отклик обратного оператора

$$\mathbf{A}^{-1}\theta(t)=\mathbf{A}_k^{-1}\theta(t)+O(\alpha^2) \tag{2.9}$$

Таким образом в квазиконстантном приближении обратный к $\mathbf{A}$ оператор с точностью до величин второго порядка малости определяется соотношением

$$\mathbf{A}^{-1}\varphi(t)=\int_0^t\frac{1}{A(\tau)}\varphi'(t-\tau)\,d\tau+O(\alpha^2) \tag{2.10}$$

Предложения обращать операторы вязкоупругости при помощи простого соотношения

$$\mathbf{A}^{-1}\theta(t)\approx\frac{1}{\mathbf{A}\theta(t)} \tag{2.11}$$

делались давно [15–17]. Однако практическому использованию соотношения (2.11) препятствовало отсутствие его обоснования и конструктивного критерия применимости, в то время как имеются конкретные примеры его явного невыполнения (модель Максвелла, для которой $A(t)=a+bt$, а $\mathbf{A}^{-1}\theta(t)=a^{-1}e^{-bt/a}$).

Имеется, конечно, один полностью понятный и из обычных соображений случай [18], когда можно использовать соотношение (2.11) за счет относительной малости наследственной составляющей оператора $\mathbf{A}$, т. е. когда $A(t)-A_0\ll A_0$, где $A_0=A(+0)$. Однако, как правило, в реальных случаях этого объяснения недостаточно, так как обычно $A(t)-A_0>A_0$ и даже $A(t)-A_0\gg A_0$ при достаточно больших $t$.

В излагаемой здесь теории соотношение (2.11) приобретает смысл как асимптотическое по показателю квазиконстантности $\alpha$ соотношение (2.10), а критерием его практической применимости является условие малости $\alpha$ для оператора $\mathbf{A}$.

При построении решения вязкоупругой задачи в общем случае важную роль будут играть обращения операторов $z-\mathbf{A}$ при значениях параметра $z$, принадлежащих некоторому замкнутому контуру $\Gamma$ в комплексной плоскости. Будет достаточно рассмотреть случай, когда множество значений $A(t)$ ограничено $|A(t)|\leqslant M_A$, а контур $\Gamma$ выбран так, что ограничено снизу и расстояние от него до этого множества, т. е. $|z-A(t)|\geqslant M_\Gamma$, $z\in\Gamma$.

Тогда оператор $z-\mathbf{A}$ будет квазиконстантным вместе с $\mathbf{A}$, если только отношение $M_A/M_\Gamma$ не является большим числом порядка $\alpha^{-1}$, так как

$$\left|\frac{tA'(t)}{z-A(t)}\right|\leqslant\alpha\frac{M_A}{M_\Gamma}=O(\alpha) \tag{2.12}$$

Существенно, что величины $M_A$ и $M_\Gamma$ нетрудно оценить в каждом конкретном случае. Так как полученные здесь неравенства и оценки справедливы и для операторов с комплексным откликом, то оператор $(z-\mathbf{A})^{-1}$ можно построить на основе соотношения (2.10):

$$\frac{1}{z-\mathbf{A}}\varphi(t)=\int_0^t\frac{\varphi'(t-\tau)}{z-A(\tau)}d\tau+\frac{M_A^2}{M_\Gamma^2}O(\alpha^2)=\int_0^t\frac{\varphi'(t-\tau)}{z-A(\tau)}d\tau+O(\alpha^2) \tag{2.13}$$

3. При использовании свойств квазиконстантных операторов можно рассматривать решение вязкоупругой задачи без обычных упрощающих

предположений о характере его зависимости от времени $t$ в однопараметрическом виде или в виде суперпозиции таких выражений и от коэффициента Пуассона $\nu$ в виде полиномов или дробно-рациональных выражений.

Снятие последнего ограничения существенно при аналитическом решении смешанных задач, когда соответствующее упругое решение трансцендентно зависит от $\nu$, и при численном решении, когда вообще не ясен характер его зависимости от $\nu$. Но и в случаях, когда известно, что соответствующее упругое решение должно рационально зависеть от $\nu$, отсутствие необходимости в использовании указанных ограничений также оказывается удобным.

Вязкоупругие свойства нестареющих линейных изотропных материалов будем описывать интегральными операторами модуля Юнга и коэффициента Пуассона

$$\mathbf{E}\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}E(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau,\qquad \boldsymbol{\nu}\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\nu(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \tag{3.1}$$

ядра которых $E(t)$ и $\nu(t)$ совпадают с кривыми релаксации напряжений и поперечной деформации в экспериментах на релаксацию при $\varepsilon_{11}(t)=\theta(t)$. Тогда уравнения и граничные условия основных квазистатических задач о деформировании вязкоупругого тела можно представить в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,\,j}(\mathbf{r},t)+f_i(\mathbf{r},t)=0,\quad \mathbf{r}\in V;\quad \sigma_{ij}(\mathbf{r},t)n_j(\mathbf{r})=F_i(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{r}\in S_\sigma\\ u_i(\mathbf{r},t)=V_i(\mathbf{r},t),\quad \mathbf{r}\in S_u;\quad 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)=u_{i,\,j}(\mathbf{r},t)+u_{j,\,i}(\mathbf{r},t)\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{E}}{1+\boldsymbol{\nu}}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)+\frac{\delta_{ij}\boldsymbol{\nu}\mathbf{E}}{(1+\boldsymbol{\nu})(1-2\boldsymbol{\nu})}\varepsilon_{kk}(\mathbf{r},t) \tag{3.3}$$

Здесь $V$ — занятая телом область пространства, в которой действуют объемные силы $f_i$; $u_i$ — компоненты смещения точек тела; $n_i$ — компоненты нормали к поверхности тела $S$; $S_\sigma$ и $S_u$ — части поверхности $S=S_\sigma US_u$, на которых заданы поверхностные усилия $F_i$ и перемещения $V_i$ соответственно.

Упругая задача, соответствующая вязкоупругой задаче (3.2), (3.3), получается при замене вязкоупругого закона (3.3) законом Гука

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\frac{E\varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)}{1+\nu}+\delta_{ij}\frac{\nu E\varepsilon_{kk}(\mathbf{r},t)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.4}$$

Решение упругой задачи (3.2), (3.4) удобно представлять в виде

$$u_i(\mathbf{r},t)=E^{-1}u_i^\circ(\mathbf{r},\nu,t),\quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)=E^{-1}\varepsilon_{ij}^\circ(\mathbf{r},\nu,t),\quad \sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=\sigma_{ij}^\circ(\mathbf{r},\nu,t) \tag{3.5}$$

в случае первой краевой задачи при $S_\sigma=S$ и в виде

$$u_i(\mathbf{r},t)=u_i^*(\mathbf{r},\nu,t),\quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{r},\nu,t),\quad \sigma_{ij}(\mathbf{r},t)=E\sigma_{ij}^*(\mathbf{r},\nu,t) \tag{3.6}$$

в случае второй краевой задачи при $S_u=S$.

Известно [19], что для первой и второй краевых задач решения (3.5) и (3.6) являются аналитическими по коэффициенту Пуассона $\nu$, по крайней мере в области $-1<\mathrm{Re}\,\nu<0.5$, а поэтому могут быть представлены соответственно в виде

$$\begin{gathered}u_j(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi iE}\oint\limits_{\Gamma}\frac{u_j^\circ(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu}dz,\qquad \varepsilon_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi iE}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\varepsilon_{jk}^\circ(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu}dz\\ \sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\sigma_{jk}^\circ(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu}dz\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$u_j(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{u_j^*(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu}dz,\quad \varepsilon_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{\varepsilon_{jk}^*(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu}dz$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{E}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{\sigma_{jk}^*(\mathbf{r},z,t)}{z-\nu}dz \tag{3.8}$$

при таком выборе контура интегрирования Г, чтобы он был расположен в области аналитичности решения и охватывал точку $z=\nu$. Функции параметра $z$ в (3.7) и (3.8) являются аналитическими продолжениями по $\nu$ упругих решений (3.5) и (3.6), и поэтому они удовлетворяют при всех $z$ соотношениям (3.2), (3.4), в которых $\nu$ заменено на $z$.

Случай смешанной краевой задачи не требует здесь специального рассмотрения, так как для него структура всех соотношений соответствует суперпозиции соотношений первой и второй задач. Необходимо лишь отметить, что вопрос об области аналитичности зависимости упругого решения от коэффициента Пуассона $\nu$ для смешанных задач не исследован до конца [19].

4. Представление упругих решений в виде интегралов Коши (3.7) и (3.8) дает возможность следующим образом реализовать принцип Вольтерра при построении решения вязкоупругой задачи (3.2), (3.3) в случае первой краевой задачи при $S_\sigma=S$:

$$U_j(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{E}^{-1}}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\boldsymbol{\nu}}U_j^\circ(\mathbf{r},z,t)$$

$$\varepsilon_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{E}^{-1}}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\boldsymbol{\nu}}\varepsilon_{jk}^\circ(\mathbf{r},z,t) \tag{4.1}$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\boldsymbol{\nu}}\sigma_{jk}^\circ(\mathbf{r},z,t)$$

и в случае второй краевой задачи при $S_u=S$:

$$U_j(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\boldsymbol{\nu}}U_j^*(\mathbf{r},z,t)$$

$$\varepsilon_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\boldsymbol{\nu}}\varepsilon_{jk}^*(\mathbf{r},z,t) \tag{4.2}$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\frac{\mathbf{E}}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\boldsymbol{\nu}}\sigma_{jk}^*(\mathbf{r},z,t)$$

а также в виде суперпозиции выражений такого типа в случае смешанных задач. Контур Г интегрирования в (4.1) и (4.2) должен охватывать точку $z=\nu_0$, где $\nu_0=\nu(+0)$ — мгновенное значение коэффициента Пуассона, и находиться в области аналитичности упругого решения по $\nu$ (например, может находиться в области $-1<\operatorname{Re} z<0.5$ при решении первой и второй краевых задач).

Доказать справедливость соотношений (4.1) и (4.2) нетрудно непосредственной проверкой, если воспользоваться следующими операторными тождествами:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{dz}{z-\boldsymbol{\nu}}=\mathbf{I} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{1+\mathbf{v}}\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-\mathbf{v}}\Phi(z,t)=\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-\mathbf{v}}\frac{\Phi(z,t)}{1+z}\tag{4.4}$$

$$\frac{\mathbf{v}}{(1+\mathbf{v})(1-2\mathbf{v})}\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-\mathbf{v}}\Phi(z,t)=\oint\limits_{\Gamma}\frac{dz}{z-\mathbf{v}}\frac{z\Phi(z,t)}{(1+z)(1-2z)}\tag{4.5}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичный оператор, контур $\Gamma$ должен удовлетворять указанным выше условиям, а функции $\Phi(z,t)$ должна быть аналитична в рассматриваемой области. Для доказательства тождества (4.3) рассмотрим ряд

$$\frac{1}{z-\mathbf{v}}=\frac{\mathbf{I}}{z-\nu_0}-\frac{\mathbf{v}-\nu_0}{(z-\nu_0)^2}+\frac{(\mathbf{v}-\nu_0)^2}{(z-\nu_0)^3}-\frac{(\mathbf{v}-\nu_0)^3}{(z-\nu_0)^4}+\ldots$$

Он сходится абсолютно, даже если ядро оператора Вольтерра $\mathbf{v}-\nu_0$ слабосингулярно при $t\to 0$ [7, 20]. Поэтому его можно проинтегрировать почленно по контуру $\Gamma$, в результате чего и получаем тождество (4.3). Интегрируя по контуру $\Gamma$ выражение

$$\frac{1}{z-\mathbf{v}}\left(\frac{1}{1+\mathbf{v}}-\frac{1}{1+z}\right)\Phi(z,t)=\frac{1}{1+\mathbf{v}}\frac{\Phi(z,t)}{1+z}$$

получаем нуль, что доказывает тождество (4.4). Аналогично доказывается и тождество (4.5).

Когда упругое решение зависит от времени однопараметрически, т. е. его зависимости от $\nu$ и от $t$ разделяются (а именно, $u_j^\circ(\mathbf{r},\nu,t)=u_j^\circ(\mathbf{r},\nu)\varphi(t)$ и т. д. для других функций), контурные интегралы в (4.1) и (4.2) реализуют известную форму [21] представления аналитической функции от линейного оператора $\nu$, действующей на функцию времени $\varphi(t)$. В рассматриваемом здесь общем случае зависимости упругого решения от времени структура выражений (4.1) и (4.2) существенно иная.

5. Установленные в п. 2 свойства квазиконстантных операторов позволяют без труда строить вязкоупругое решение, исходя из принципа Вольтерра в форме (4.1) и (4.2).

Пусть $\alpha$ — наибольший из показателей квазиконстантности для операторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}$, а отклик $\nu(t)=\mathbf{v}\theta(t)$ оператора $\mathbf{v}$ и контур $\Gamma$ удовлетворяют сформулированным в п. 2 условиям, при которых и оператор $z-\mathbf{v}$ ($z\in\Gamma$) является квазиконстантным. Тогда решение (4.1) первой задачи вязкоупругости при помощи правил построения произведения и обращения квазиконстантных операторов (2.6), (2.10) и (2.13) приводится к виду

$$\begin{aligned}U_j(\mathbf{r},t)&=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}dz\int\limits_0^t\frac{d\tau}{E(\tau)}\frac{1}{z-\nu(\tau)}\frac{\partial}{\partial t}U_j^\circ(\mathbf{r},z,t-\tau)+O(\alpha^2)=\\&=\int\limits_0^t\frac{d\tau}{E(\tau)}\frac{\partial}{\partial t}U_j^\circ(\mathbf{r},\nu(\tau),t-\tau)+O(\alpha^2)\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\varepsilon_{jk}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^t\frac{d\tau}{E(\tau)}\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_{jk}^\circ(\mathbf{r},\nu(\tau),t-\tau)+O(\alpha^2)$$

$$\sigma_{jk}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{jk}^\circ(\mathbf{r},\nu(\tau),t-\tau)+O(\alpha^2)$$

Аналогично по правилам теории квазиконстантных операторов получаем решение второй краевой задачи вязкоупругости

$$
\begin{aligned}
U_i(\mathbf{r}, t) &= \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t} U_i^*(\mathbf{r}, \nu(\tau), t-\tau) + O(\alpha^2) \\
\varepsilon_{ij}(r, t) &= \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{ij}^*(r, \nu(\tau), t-\tau) + O(\alpha^2) \\
\sigma_{ij}(r, t) &= \int_0^t d\tau E(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{ij}^*(r, \nu(\tau), t-\tau) + O(\alpha^2)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Таким образом, использование свойства квазиконстантности вязкоупругих операторов позволяет свести построение решения вязкоупругой задачи к аналитическому или численному построению зависимости решения соответствующей упругой задачи от упругих констант. Особенно следует подчеркнуть, что при этом реализация принципа Вольтерра в случае численного решения оказывается не более сложной, чем в случае аналитического решения, а трансцендентный характер зависимости решения от коэффициента Пуассона не вносит каких-либо специфических трудностей в сравнении со случаем рациональной зависимости.

6. Практический интерес может представлять класс задач, в которых зависимость от времени воздействий на вязкоупругое тело такова, что решения (3.5) или (3.6) соответствующих упругих задач сами будут являться квазиконстантными по времени, т. е. для $u_i^\circ(\mathbf{r}, z, t)$, как и для других функций из (3.5) или (3.6), выполняются соотношения

$$
\left| \frac{t}{u_i^\circ(\mathbf{r}, z, t)} \frac{\partial}{\partial t} U_i^\circ(\mathbf{r}, z, t) \right| \leqslant \alpha \ll 1 \tag{6.1}
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Для такого класса задач результаты (5.1) и (5.2) еще более упрощаются. Например, так как для первой задачи вязкоупругости

$$
U_j(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma dz \int_0^t \frac{d\tau}{E(\tau)} \frac{1}{z-\nu(\tau)} \frac{\partial}{\partial t} U_j^\circ(\mathbf{r}, z, t-\tau) + O(\alpha^2)
$$

то, повторяя здесь рассуждения и оценки п. 2, получаем

$$
U_j(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{E(t)} \frac{U_j^\circ(\mathbf{r}, z, t)}{z-\nu(t)} + O(\alpha^2) = \frac{U_j^\circ(\mathbf{r}, \nu(t), t)}{E(t)} + O(\alpha^2) \tag{6.2}
$$

и, аналогично,

$$
\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_{ij}^\circ(\mathbf{r}, \nu(t), t)}{E(t)} + O(\alpha^2), \qquad \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{ij}^\circ(\mathbf{r}, \nu(t), t) + O(\alpha^2)
$$

Условия (6.1), в частности, тривиальным образом выполняются в условиях ползучести, когда действующие на тело нагрузки постоянны, или в условиях релаксации, когда на поверхности тела мгновенно возникают и далее фиксируются перемещения.

Для второй задачи вязкоупругости при квазиконстантной зависимости от времени решения соответствующей упругой задачи таким же образом получаем

$$u_i(\mathbf{r}, t)=u_i^*(\mathbf{r}, \nu(t), t)+O(\alpha^2), \qquad \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}, t)=\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{r}, \nu(t), t)+O(\alpha^2)$$
$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t)=E(t)\sigma_{ij}^*(\mathbf{r}, \nu(t), t)+O(\alpha^2) \tag{6.3}$$

Таким образом, в рассматриваемом здесь случае проблема построения решения вязкоупругой задачи полностью исчерпывается аналитическим или численным построением зависимости решения соответствующей упругой задачи от времени и от упругих констант, и само вязкоупругое решение получается заменой в соответствующем упругом решении упругих констант на «текущие» значения вязкоупругих откликов.

Полученные в частном случае (6.1) соотношения (6.2) и (6.3) по форме совпадают с результатом использования метода переменных модулей [18, 22]. В этой связи необходимо отметить, что, несмотря на исключительную простоту и имеющиеся примеры удачного использования, этот метод не получил широкого распространения из-за отсутствия критериев его применимости, в то время как в общем случае он приводит к неверным результатам. Так, например, для тела Максвелла при линейном росте напряжений $\sigma(t)=\sigma^{\bullet}(t)$ деформация при достаточно больших временах в два раза превышает значения, получаемые в этом случае по методу переменных модулей.

Соотношения же (6.2) и (6.3), полученные из общих соотношений метода квазиконстантных операторов при квазиконстантной зависимости упругого решения от времени, являются асимптотическими по параметрам квазиконстантности вязкоупругих операторов и упругого решения. Условия их применимости (1.2) для операторов и (6.1) для упругого решения легко проверяются в каждом конкретном случае. Если же условие (6.1) оказывается не выполненным, то необходимо использовать более общую интегральную форму решения (5.1) или (5.2) метода квазиконстантных операторов.

7. В качестве примера использования теории квазиконстантных операторов рассмотрим смешанную задачу о жестком плоском штампе, лежащем со сцеплением на участке $|x|\leqslant l$ границы вязкоупругой полуплоскости.

Если действующая на штамп сила равна $P(t)$, то, используя известное решение соответствующей упругой задачи [23], получим выражение для контактного давления

$$q(x,t)=\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\frac{1+\varkappa}{\sqrt{\varkappa}}\cos\left[\frac{\ln\varkappa}{2\pi}\ln\frac{l+x}{l-x}\right]P(t)$$
$$\varkappa=3\mathrm{I}-4\boldsymbol{\nu}$$

Данная задача интересна тем, что вязкоупругий оператор входит в решение трансцендентным образом.

Выполняя расшифровку выражения для $q(x,t)$ по правилам теории квазиконстантных операторов, получаем

$$q(x,t)=\int_0^t q_0(x,\tau)\frac{d}{dt}P(t-\tau)\,d\tau$$
$$q_0(x,t)=\frac{1}{\pi\sqrt{l^2-x^2}}\frac{1+\varkappa(t)}{\sqrt{\varkappa(t)}}\cos\left[\frac{\ln\varkappa(t)}{2\pi}\ln\frac{l+x}{l-x}\right]+O(\alpha^2) \tag{7.1}$$
$$\varkappa(t)=3-4\nu(t)=3-4\boldsymbol{\nu}\theta(t)$$

Здесь $q_0(x,t)$ является контактным давлением в случае, когда $P(t)=\theta(t)$. Условия применимости теории квазиконстантных операторов легко проверяются, если известна функция $\nu(t)$ для материала вязкоупругой полуплоскости. Например, для полиуретана, используя функцию релаксации (1.4) при растяжении [14] и функцию объемной ползучести (1.3) при гидростатическом давлении [13], получаем ($t_0$=1 ч):

$$\nu(t)=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{E}}{6\mathrm{K}}\theta(t)=$$

$$=10^{-3}\left[389+8.79\left(\frac{t}{t_0}\right)^{0.125}-3.43\left(\frac{t}{t_0}\right)^{0.135}+0.272\left(\frac{t}{t_0}\right)^{0.26}\right],\ 0.04t_0\leqslant t\leqslant 2t_0$$

с ошибкой порядка $10^{-4}$. Показатель квазиконстантности для $\nu$ и константа $M_A$ в оценке (2.12) равны соответственно 0.016 и 0.4. Аналитическое продолжение по $\nu$ упругого решения имеет точку ветвления при $\nu=0.75$, и контур Г может быть выбран так, что отношение $M_A/M_\Gamma$ в оценке (2.12) будет порядка единицы. Поэтому условия, необходимые для использования теории квазиконстантных операторов при построении решения (7.1), выполнены.

Приведенные результаты показывают простоту и эффективность использования теории квазиконстантных операторов при решении сложных задач линейной теории вязкоупругости нестареющих изотропных материалов.

Поступила 2 XI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volterra V.* Leçons sur les fonctions de lignes. Paris, Gauthier—Villard, 1913.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
3. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
4. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
5. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974.
6. *Ефимов А. Б., Малый В. И.* Метод аналитического продолжения в линейной вязкоупругости стареющих материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
7. *Малый В. И.* Об одном приближенном методе решения задач вязкоупругости. Проблемы прочности, 1976, № 8.
8. *Бронский А. П.* Явление последействия в твердом теле. ПММ, 1941, т. 5, вып. 1.
9. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. М., «Высшая школа», 1976.
10. *Брызгалин Г. И.* К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ, 1963, № 6.
11. *Findley W. N.* The effect of temperature and combined stresses on creep of plastics. Proc. 2nd Internat. Reinforced Plastics Gonference, London, British Plastics Federat., 1960.
12. *Onaran K., Findley W. N.* Combined stress-creep experiments on a non linear viscoelastic material to determine the kernel functions for a multiple integral representation of creep. Trans. Soc. Rheology, 1965, vol. 9, pt 2.
13. *Findley W. N., Reed R. M., Stern P.* Hydrostatic creep of solid plastics. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 4.
14. *Lai I. S. Y., Findley W. N.* Stress relaxation of non linear viscoelastic material under uniaxial strain. Trans. Soc. Reology, 1968, vol. 12, pt 2.
15. *Зинер К.* Упругость и неупругость металлов. В сб.: Упругость и неупругость металлов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
16. *Ke T. S.* Experimental evidence of the viscous behavior of grain boundaries in metals. Phys. Rev., 1947, vol. 71, No. 8.
17. *Бронский А. П.* Деформация не совершенно упругих тел. Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1956, т. 49.
18. *Коваленко А. Д., Кильчинский А. А.* О методе переменных модулей в задачах линейной наследственной упругости. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 12.
19. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости. Успехи матем. наук, 1973, т. 28, вып. 3.
20. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
21. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, т. 1. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
22. *Schapery R. A.* A method of viscoelastic stress analysis using elastic solutions. J. Franklin Inst., 1965, vol. 279, No. 4.
23. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.