МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1980

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ СРЕДЫ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В. Ф. КРОТОВ

(*Москва*)

Проводится сравнительный анализ динамики упругой среды и электродинамики. Между этими объектами имеет место аналогия, которая может представить интерес как для механиков, так и для физиков.

1. Пространственно-временное равновесие упругой среды. 1. Рассматривается однородная изотропная упругая среда, не подверженная действию внешних сил, описываемая в терминах: $\mathbf{x}=(x^1, x^2, x^3)$ — вектор декартовых координат точки среды в инерциальной системе отсчета, пробегающий заданную область (тело) X; t — время, пробегающее заданный отрезок $T=[t_0, t_1]$; $\mathbf{u}(t, x)=(u^1, u^2, u^3)$ — вектор-функция пространственного смещения.

Если смещение $\mathbf{u}$ не зависит от времени, то деформированное состояние должно обладать свойством равновесия, которое в рамках линейной теории упругости [1] можно записать в виде вариационного принципа, выделяющего равновесное состояние $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ из других кинематически допустимых

$$\delta J(\mathbf{u}_0)=0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x})\in M \tag{1.1}$$

Здесь $J(\mathbf{u})$ — энергия деформации (полная свободная энергия)

$$J(\mathbf{u})=\int\limits_X U\,dx, \qquad U=\mu V_1^2-2V_2 \tag{1.2}$$

где μ — положительный опытный коэффициент; V_1, V_2 — первый и второй инварианты тензора деформации $\varepsilon=\|\varepsilon_j^i\|$:

$$\varepsilon_j^i={}^1/_2(u_x^{ji}+u_x^{ij}), \quad V_1=\varepsilon_i^i, \quad V_2={}^1/_2\delta_{lm}^{ij}\varepsilon_i^l\varepsilon_j^m \tag{1.3}$$

δ_{lm}^{ij} — коэффициент, равный нулю, если $i=j$ или $l=m$, или если множества верхних и нижних индексов не совпадают; в остальных случаях он равен ±1 в соответствии с совпадением или несовпадением порядка, в каком стоят нижние индексы, с порядком верхних [2]. По одинаковым значкам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Варьирование проводится среди множества M всех достаточно гладких вектор-функций $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{u}_S(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in S$, где $\mathbf{u}_S(\mathbf{x})$ — заданная вектор-функция, S — граница области X. Если речь идет о несжимаемой среде, то множество M ограничено дополнительным условием $V_1=0$. Ниже будет рассматриваться только несжимаемая среда.

Если смещение $\mathbf{u}$ зависит от времени, то статический принцип стационарности энергии деформации заменяется динамическим принципом стационарности гамильтонова действия

$$\delta I(\mathbf{u})=0, \quad \mathbf{u}(t, \mathbf{x})\in M_1 \tag{1.4}$$

Здесь (с точностью до постоянного множителя)

$$I(\mathbf{u}) = \int\limits_T \int\limits_X \left(\frac{\mathbf{u}_t^2}{2a^2} - U \right) dx\, dt \tag{1.5}$$

где a — опытная положительная константа, имеющая физический смысл скорости распространения возмущений в данной среде.

Варьирование проводится на множестве M_1 всех достаточно гладких функций $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, таких, что при каждом фиксированном $t \in (t_0, t_1)$ $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in \in M$, а значения $\mathbf{u}(t_0, \mathbf{x})$ и $\mathbf{u}(t_1, \mathbf{x})$ заданы. Каждой функции $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in M_1$ отвечает воображаемое динамическое деформированное состояние (движение) среды, такое, что каждая ее материальная точка, занимающая в недеформированном состоянии положение $\mathbf{x}$ в момент времени t, занимает в этот момент положение $\mathbf{x} + \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$.

Подчеркнем, что здесь при варьировании сравниваются динамические состояния среды, ставящие в соответствие одним и тем же значениям t разные положения ее материальных точек (так называемое синхронное варьирование); из всех таких воображаемых движений принцип (1.4) выделяет действительное движение, т. е. такое, которое может наблюдаться в действительности согласно принятым процедурам наблюдения. Аналогично, факт равновесия есть математический признак действительного статического состояния.

Принцип (1.4) представляет собой самостоятельный динамический постулат, объединяющий законы ньютоновой механики и не вытекающий из принципа (1.1). Можно предложить, однако, иную формулировку основного закона движения среды рассматриваемого вида, представляющую последний как непосредственное обобщение статического вариационного принципа (1.1) и содержащую время в качестве переменной, симметричной пространственным координатам (в уравнении (1.5) роль этих переменных существенно различна).

2. Введем в рассмотрение мнимую координату $x^4 = \imath at$ и соответствующее смещение $u^4(x^1, x^2, x^3, x^4) = iv(t, x^1, x^2, x^3)$, а также четырехмерное евклидово пространство E_a^4 с элементами $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3, x^4)$. Здесь v — действительная функция. Четыре-вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ назовем пространственно-временным деформированным состоянием. Определим для последнего тензор деформации ε, энергию деформации $J(\mathbf{u})$ и равновесное состояние $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ той же записью (1.1) — (1.3), что и для трехмерного случая, но понимая под $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, X, S, V_1, V_2, U, M соответствующие четырехмерные образы. Далее всюду эти термины будут пониматься в этом последнем смысле. В отличие от них совокупности пространственных компонент векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ будем обозначать $\mathbf{x}^\circ$, $\mathbf{u}^\circ$ и соответственно X°, S° и т. д.

Конструкция пространства E_a^4 близка пространству Минковского в теории относительности. Подобно последнему, оно описывает континуум событий. Физический смысл смещения $u(x)$ в таком пространстве состоит в том, что событие, отвечающее в недеформированном состоянии моменту времени t и положению x°, в деформированном переходит в событие, отвечающее моменту $t + v(t, \mathbf{x}^\circ)/a$ и положению $\mathbf{x}^\circ + \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}^\circ)$.

Воображаемые динамические состояния, фигурирующие в (1.4), отвечают случаю, когда временной сдвиг отсутствует ($v = 0$). Вектор-функция $\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}^\circ)$ при этом описывает движение среды. Таким образом, перечисленные понятия теории упругости, будучи формально доопределены на четырехмерный вариант теми же формулами (1.1) — (1.3), имеют существенно иной физический смысл статики пространственно-временной упругой среды. Под последней будем понимать континуум событий, для которого определено пространственно-временное деформированное состояние $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, и функционал $J(\mathbf{u})$ — энергия деформации. Задание $J(\mathbf{u})$ в виде (1.2), (1.3) является следствием доопределения на E_a^4 свойств однородности и изотропности, а также предположения о малости деформаций. Свойство пространственной несжимаемости $V_1^\circ \equiv \operatorname{div} u^\circ(t, x) = 0$ заменяется теперь пространственно-временной несжимаемостью

$$V_1 \equiv u_x{}^{i}{}^{i}(x) \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}) + a^{-1} v_t(t, x^\circ) = 0 \tag{1.6}$$

3. Изучим подробнее энергию пространственно-временных деформаций $J(\mathbf{u})$. Очевидно, для изучаемой здесь несжимаемой среды

$$U = -2V_2, \qquad J(\mathbf{u}) = -ia2 \int\limits_T \int\limits_{X^\circ} V_2 \, dx^\circ \, dt \tag{1.7}$$

В силу правила подсчета V_2 можно записать

$$2V_2 = 2W + 2V_2^\circ = 2W - U^\circ \tag{1.8}$$

где U° — плотность энергии пространственных деформаций; W — совокупность слагаемых в (1.3), содержащих четверку в верхнем или нижнем ряду индексов, т. е. содержащих такие сомножители, как

$$\varepsilon_4{}^4 = u_x{}^4{}^4 = \frac{1}{a} v_t, \qquad \varepsilon_4{}^j = \varepsilon_j{}^4 = \frac{1}{2}(u_x{}^j{}^4 + u_x{}^4{}^j) = \frac{i}{2}\left(v_{x^j} - \frac{u_t^j}{a}\right) \quad (j=1,2,3) \tag{1.9}$$

Более подробно, согласно правилу подсчета V_2:

$$2W = 2\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} 2[\varepsilon_4{}^4 \varepsilon_k{}^k - (\varepsilon_k{}^4)^2] = \frac{2}{a} v_t \operatorname{div} \mathbf{u}^\circ + \frac{1}{2}\left(v_{\mathbf{x}^\circ} - \frac{\mathbf{u}_t^\circ}{a}\right)^2 \tag{1.10}$$

Двойка под знаком суммы связана с тем, что каждое слагаемое (1.10) входит в сумму (1.3) дважды. Например, $\varepsilon_4{}^4\varepsilon_k{}^k$ отвечает двум позициям в (1.3): $i=l=4$, $i=m\neq k$ и $i=l=k$, $j=m=4$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_T \int\limits_{X^\circ} v_t \operatorname{div} \mathbf{u}^\circ \, dx^\circ \, dt = -\int\limits_T \int\limits_{X^\circ} v \operatorname{div} \mathbf{u}_t^\circ \, dx^\circ \, dt + \int\limits_{X^\circ} v \operatorname{div} \mathbf{u}^\circ \Big|_{t_0}^{t_1} d\mathbf{x}^\circ =$$

$$= \int\limits_T \int\limits_{X^\circ} \mathbf{u}_t^\circ v_{\mathbf{x}^\circ} \, d\mathbf{x}^\circ \, dt - \int\limits_T \int\limits_{S^\circ} v \mathbf{u}_t^\circ \, d\mathbf{s} \, dt + \int\limits_{X^\circ} v \operatorname{div} \mathbf{u}^\circ \Big|_{t_0}^{t_1} d\mathbf{x}^\circ$$

где t_0, t_1 — концы отрезка T; $d\mathbf{s}$ — направленный элемент поверхности S°; $\mathbf{u}_t^\circ v_{\mathbf{x}^\circ}$, $\mathbf{u}_t^\circ d\mathbf{s}$ — скалярное произведение соответствующих векторов. Отметим, что последние два слагаемых здесь зависят только от значений $\mathbf{u}(\mathbf{x} \in S) = \mathbf{u}_S(\mathbf{x})$, не варьируемых в пределах M.

Учитывая последнее равенство, а также (1.7), (1.8) и (1.10), получим с точностью до постоянного множителя и неварьируемых слагаемых

$$J(\mathbf{u}) = \int\limits_T \int\limits_{X^\circ} \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 - U^\circ\right) d\mathbf{x}^\circ \, dt, \qquad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{u}_t^\circ}{a} - v_{\mathbf{x}^\circ} \tag{1.11}$$

Обратим внимание, что при $v(t, \mathbf{x}^\circ) = \mathrm{const}$ энергия пространственно-временных деформаций совпадает с гамильтоновым действием $I(\mathbf{u}^\circ)$ движения $\mathbf{u}^\circ(t, x^\circ)$ среды, обладающей скоростью распространения колебаний, равной a.

Потенциальная энергия пространственных деформаций U°, как известно, с точностью до слагаемых, не существенных при варьировании, может быть записана в виде

$$U^\circ = \frac{1}{2}\mathbf{H}^2, \qquad \mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}^\circ) \tag{1.12}$$

Докажем это, уточнив, что несущественные слагаемые зависят только от значений $\mathbf{u}_S(\mathbf{x})=\mathbf{u}(\mathbf{x}\in S)$. Согласно правилу подсчета V_2°:

$$U^\circ=-2V_2^\circ=-2\frac{1}{2}\left[2\varepsilon_1{}^1\varepsilon_2{}^2+2\varepsilon_1{}^1\varepsilon_3{}^3+2\varepsilon_2{}^2\varepsilon_3{}^3-\frac{2}{4}[(\varepsilon_2{}^1)^2+(\varepsilon_3{}^1)^2+(\varepsilon_3{}^2)^2]\right]=$$

$$=-2u_{x^1}{}^1u_{x^2}{}^2-2u_{x^1}{}^1u_{x^3}{}^3-2u_{x^2}{}^2u_{x^3}{}^3+\frac{1}{2}[(u_{x^2}{}^1+u_{x^1}{}^2)^2+(u_{x^3}{}^1+u_{x^1}{}^3)^2+(u_{x^3}{}^2+u_{x^2}{}^3)^2] \tag{1.13}$$

Обозначим через X_{ij} проекцию области X° на плоскость x^i, x^j; $x_+{}^1(x^2, x^3)$ и $x_-{}^1(x^2, x^3)$ — верхнюю и нижнюю границы значений x^1 при фиксированных x^2, x^3, таких, что $(x^1, x^2, x^3)\in X^\circ$; аналогично определяются $x_+{}^2$, $x_-{}^2$, $x_+{}^3$, $x_-{}^3$. Полагая область X° односвязной и применяя интегрирование по частям, можно записать:

$$\int\limits_{X^\circ} u^1_{x^1}u^2_{x^2}\,dx^\circ = \int\limits_{X_{23}} u^1(t, x^\circ)\,u^2_{x^2}(t, x^\circ)\Big|_{x_-^1}^{x_+^1} dx^2\,dx^3 -$$

$$-\int\limits_{X^\circ} u^1u^2_{x^2x^1}\,dx^\circ = \int\limits_{X^\circ} u^1_{x^2}u^2_{x^1}\,dx^\circ + \int\limits_{X_{23}} u^1u^2_{x^2}\Big|_{x_-^1}^{x_+^1} dx^2\,dx^3 - \int\limits_{X_{13}} u^1u^2_{x^1}\Big|_{x_-^2}^{x_+^2} dx^1\,dx^3$$

Последние два слагаемых здесь зависят только от значений $\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}^\circ\in S^\circ)$. Учитывая это равенство, а также аналогичные равенства для $u_{x^1}{}^1u_{x^3}{}^3$, $u_{x^2}{}^2u_{x^3}{}^3$ и (1.13), получим с точностью до слагаемых, зависящих от $\mathbf{u}(\mathbf{x}\in S)$,

$$\int\limits_{X^\circ} U^\circ\,d\mathbf{x}^\circ = \int\limits_{X^\circ}\frac{1}{2}[(u_{x^2}{}^1-u_{x^1}{}^2)^2+(u_{x^3}{}^1-u_{x^1}{}^3)^2+(u_{x^3}{}^2-u_{x^2}{}^3)^2]\,dx^\circ = \frac{1}{2}\int\limits_{X^\circ}\mathbf{H}^2\,dx^\circ$$

Учитывая (1.12) и (1.11), можем записать

$$J(\mathbf{u}) = \int\limits_T\int\limits_{X^\circ}\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2)\,d\mathbf{x}^\circ\,dt \tag{1.14}$$

4. Равновесное состояние $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ является решением задачи (1.1) об условном экстремуме функционала $J(\mathbf{u})$ при наличии дифференциальной связи $V_1=0$. Оказывается, в пределах рассматриваемого здесь линейного приближения оно может быть получено в качестве решения более простой задачи о безусловном экстремуме $J(\mathbf{u})$ на множестве M', удовлетворяющем всем условиям M, кроме связи $V_1=0$. Именно, справедлива

Лемма 1.1. Решение задачи

$$\delta J(\mathbf{u})=0, \quad \mathbf{u}\in M' \tag{1.15}$$

удовлетворяет связи $V_1=0$ и (1.1) при соответствующих граничных условиях: $V_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}\in S))=0$.

Этот факт будет доказан ниже, здесь же воспользуемся им для того, чтобы выписать дифференциальные уравнения равновесного деформированного состояния. Последние в силу леммы 1.1 представляют уравнения Эйлера для вариационной задачи (1.15):

$$(U_{u_t^l})_t+(U_{u_x^l}{}^i)_{x^i}=0 \quad (i=1, 2, 3), \quad (U_{v_t})_t+(U_{v_x{}^i})_{x^i}=0 \tag{1.16}$$

по $i=1$, 2, 3 подразумевается суммирование. Используя выражение (1.14) для $J(\mathbf{u})$, имеем: $a^{-1}E_t=-{}^1/_2[(\mathbf{H}^2)_{u_x^\circ i}]_{x^t}$, $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$. Используя известное тождество $-{}^1/_2[(\mathbf{H}^2)_{u_x^\circ i}]_{x^t}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}^\circ=\operatorname{rot}\mathbf{H}$, получим

$$a^{-1}\mathbf{E}_t=\operatorname{rot}\mathbf{H},\quad \operatorname{div}E=0,\quad a^{-1}\mathbf{H}_t=-\operatorname{rot}\mathbf{E} \tag{1.17}$$

Последнее равенство (1.17) получается следующим тождественным преобразованием. Из определения $\mathbf{H}$ имеем

$$\mathbf{H}_t=\operatorname{rot}\mathbf{u}_t^\circ=-a\operatorname{rot}\mathbf{E}+a\operatorname{rot}v_{x^\circ}=-a\operatorname{rot}\mathbf{E}$$

Из семи уравнений (1.17) только четыре независимых, например первое (векторное) и второе. С другой стороны, шесть компонент векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ выражаются через четыре независимые компоненты четыре-вектора смещения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Учитывая, что в силу леммы 1 эти уравнения совместны со связью (1.6), а также учитывая тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{u}^\circ=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}^\circ-\Delta\mathbf{u}^\circ$, нетрудно из двух первых уравнений (1.17) получить уравнения непосредственно для компонент деформированного состояния:

$$a^{-2}\overset{l}{u}_{tt}=\overset{l}{u}_{x^tx^t}\quad (l=1,2,3),\quad a^{-2}v_{tt}=v_{x^tx^t} \tag{1.18}$$

5. Докажем лемму 1.1. Волновые уравнения (1.18) суть следствия (1.15) и (1.6). Пусть $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ удовлетворяет (1.18) и граничные условия таковы, что $V_1[\mathbf{u}^*(\mathbf{x}\in S)]=0$. Покажем, что в этом случае $\mathbf{u}^*(x)$ удовлетворяет (1.6) и (1.15). Дифференцируя по $\mathbf{x}_l$ обе части l-го уравнения (1.18) и по t — последнего уравнения (1.18), умножая это последнее на a^{-1} и суммируя, получим: $V_{1tt}-a^2V_{1x^tx^t}=0$. Но при граничном условии $V_1(\mathbf{x}\in S)=0$ решение этого уравнения: $V_1\equiv 0$.

Учитывая этот факт, выкладками, обратными приведенным выше, легко показать, что $\mathbf{u}^*$ удовлетворяет равенствам (1.17), эквивалентным (1.15).

Таким образом, если граничные условия таковы, что $V_1[\mathbf{u}(\mathbf{x}\in S)]=0$, то решение вариационной задачи (1.15) сводится к решению соответствующих независимых краевых задач для волновых уравнений (1.18), которые, как известно, разрешимы в достаточно гладких функциях для достаточно широкого класса краевых условий (не углубляясь в эту, в данном случае не существенную проблему, будем полагать, что рассматриваемые здесь краевые условия относятся к этому классу). При этом полученное решение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ удовлетворяет (1.6) и, следовательно, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\in M$, а также удовлетворяет (1.1). Последнее следует из следующего известного в вариационном исчислении факта: если элемент некоторого множества M' удовлетворяет условию $\delta J(\mathbf{u}_0)=0$ при $\mathbf{u}\in M'$, то он удовлетворяет этому условию и на любом подмножестве MM', содержащем $\mathbf{u}_0$, и таком, что на нем определена линейная вариация функционала $J(\mathbf{u})$. Таким образом, лемма доказана.

6. Следующая теорема устанавливает связь принципа стационарности энергии (1.1) в его пространственно-временном толковании и закона движения (1.4) ньютоновой динамики. При этом следует отметить, что вариационные принципы определяют состояние (движение) с точностью до граничных условий $\mathbf{u}(\mathbf{x}\in S)$. Последние же задаются независимо, и, в частности, их задание отражает априорно постулируемые свойства среды и способы ее описания. Так, в исследуемом здесь случае условие несжимаемости постулируется на границе $V_1(\mathbf{u}(\mathbf{x}\in S))=0$ и следует из рассматриваемых уравнений внутри области X.

Аналогично, если желательно применить принцип пространственно-временного равновесия к исследованию объектов ньютоновой механики, то следует положить $\mathbf{u}^4(\mathbf{x}\in S)=0$, с одной стороны, и ожидать в качестве свойства равновесия факта $\mathbf{u}^4(\mathbf{x})\equiv 0$ с другой.

Теорема 1.1 Пусть $\mathbf{u}_S^4(\mathbf{x})=0$. Тогда равновесное деформированное состояние $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ обладает следующими свойствами: временной сдвиг отсутствует всюду, $\mathbf{u}_0^4(\mathbf{x})\equiv 0$; пространственная часть деформированного состояния $\mathbf{u}_0^\circ(t, \mathbf{x})$ совпадает с движением среды согласно закону (1.4) ньютоновой механики.

Доказательство. Равновесное деформированное состояние удовлетворяет (1.18). Из последнего уравнения (1.18) следует, что при $v(\mathbf{x}\in S)=0$ функция $v(t, \mathbf{x}^\circ)\equiv 0$. Выражение (1.11) для энергии деформации $J(\mathbf{u})$ совпадает при $v\equiv 0$, как было отмечено выше, с гамильтоновым действием $I(\mathbf{u}^\circ)$ движения $\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}^\circ)$. Подмножество множества M, обусловленное связью $v\equiv 0$, эквивалентно множеству M_1, фигурирующему в (1.4). Если некоторый объект стационарен на множестве M, то он стационарен и на любом его подмножестве M_1, для которого определена линейная вариация $\delta J(\mathbf{u})$ и $\mathbf{u}_0\in M_1\subset M$. Поэтому $\delta I(\mathbf{u}^\circ)=0$ при $\mathbf{u}^\circ\in M_1$. Теорема доказана.

Из теоремы 1.1 следует, что статика пространственно-временной упругой среды, полученная формальным доопределением пространственной статики на пространство событий E_a^4, имеет, оказывается, реальный физический смысл. Пространственно-временное равновесие является, подобно трехмерной статике, математическим признаком действительно наблюдаемого состояния, по крайней мере для некоторых граничных условий, а именно для условий, принятых в ньютоновой механике: $\mathbf{u}^4(\mathbf{x}\in S)=0$. При этом условия пространственно-временного равновесия совпадают с уравнениями движения ньютоновой динамики. В этом смысле между статическим равновесием упругой среды и ее движением имеет место полная формальная аналогия. Интересно, что в данном случае можно получить механические уравнения движения, не используя второе начало Ньютона, а используя эту аналогию.

Таким образом, введение деформации времени $\mathbf{u}^4(\mathbf{x})$ в уравнения движения среды позволило выявить симметрию времени и пространства в этих уравнениях и соответственно единство статики и динамики упругой среды, в рамках которого переход от статического деформированного состояния к движению аналогичен переходу от плоского деформированного состояния к пространственному.

Отметим, что в тех случаях, когда имеются проверенные опытом математические признаки действительного состояния (пространственная статика, а также пространственно-временная при $\mathbf{u}^4(\mathbf{x}\in S)=0$), последние совпадают с условием равновесия (1.1). Учитывая это совпадение, естественно предположить, что оно имеет место и при пространственно-временных деформациях с $\mathbf{u}^4(\mathbf{x}\in S)\neq 0$, т. е. принцип (1.1) доопределяет (1.4) на эти случаи.

В настоящее время известна единственная причина временного смещения $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}^\circ)\neq 0$: релятивистские эффекты, появляющиеся либо из-за больших скоростей деформации, либо вследствие относительного движения. Первая из этих причин исключена инфинитезимальностью рассматриваемой модели. Поэтому при исследовании явлений, связанных с фиксированной системой координат, мы не выйдем за рамки случая $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}^\circ)=0$.

И только при исследовании явлений, связанных с относительным движением, следует учитывать появление временного смещения.

Следует учесть, что применение принципа равновесия в конкретном виде (1.1)–(1.3) для изучения относительного движения ограничено требованием малости деформаций. Однако имеется один случай, к которому этот аппарат применим и который составляет предмет дальнейшего исследования.

2. Пространственно-временная упругость и поле. 1. Пространственно-временные деформации имеют, таким образом, реальный физический смысл, возникая в среде согласно теории относительности при движении системы отсчета.

Исследуем свойства гипотической среды рассматриваемого здесь вида при $a=c$, c — скорость света, т. е. последняя есть упругий, однородный, изотропный, несжимаемый в пространстве Минковского континуум событий.

Задание U в виде (1.2) обеспечивает инвариантность уравнений равновесия, содержащихся в (1.1), относительно поворота системы координат. Инвариантно и условие несжимаемости $V_1=0$. Поворот системы координат в пространстве Минковского является преобразованием Лоренца, физической реализацией которого, согласно теории относительности, является равномерное прямолинейное движение наблюдателя относительно исходной системы координат. Отсюда следует следующее свойство такой среды: ее уравнения движения, содержащиеся в (1.1), инвариантны на множестве всех систем координат, движущихся прямолинейно и равномерно, и, в частности, скорость распространения колебаний в среде относительно наблюдателя, согласно этим уравнениям, не зависит от величины и направления скорости последнего и равна по величине c.

Пусть деформированное состояние $\mathbf{u}'(\mathbf{x}')$ задано в некоторой системе координат $\mathbf{x}'$, в которой состояние $\mathbf{u}'\equiv 0$ — естественное для данного тела и $\mathbf{u}_0'(\mathbf{x}')$ — равновесное. Пусть пространственная часть этой системы отсчета движется поступательно со скоростью $V=\mathrm{const}$ относительно некоторой системы $\mathbf{x}$ параллельно оси x^1. Тогда имеем

$$x^{o1}=[(x^{o1})'+Vt']\beta^{-1},\qquad x^{o1,2}=(x^{o1,2})'$$

$$t=\left[t'+\frac{V}{c^2}(x^1)'\right]\beta^{-1},\qquad \beta=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

Непосредственной подстановкой этих значений в уравнения (1.6), (1.18) нетрудно убедиться, что равновесное пространственно-временное деформированное состояние в новой системе координат имеет вид

$$\begin{gathered}u_0{}^{o1}(t,x^o)=\left[u_0{}^{o1\prime}(t',\mathbf{x}^{o\prime})+\frac{V}{c}v_0(t,\mathbf{x}^o)\right]\beta^{-1},\qquad (u_0{}^{o2,3})'=u_0{}^{o2,3}\\ v_0(t,x^o)=\left[v_0'(t',\mathbf{x}')+\frac{V}{c}u_0{}^{o1}(t',\mathbf{x}^{o\prime})\right]\beta^{-1}\end{gathered}\tag{2.1}$$

И обратно, состояние $\mathbf{u}'(\mathbf{x}')$ выражается через $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ согласно формулам

$$\begin{gathered}u_0{}^{o1\prime}(t',\mathbf{x}^{o\prime})=\left[u_0{}^{o}(t,\mathbf{x}^o)-\frac{V}{c}v_0(t,\mathbf{x}^o)\right]\beta^{-1},\qquad (u_0{}^{o2,3})'=u_0{}^{o2,3}\\ v_0'(t',\mathbf{x}^{o\prime})=\left[v_0(t,\mathbf{x}^o)-\frac{V}{c}u_0{}^{o1}(t,\mathbf{x}^o)\right]\beta^{-1}\end{gathered}\tag{2.2}$$

т. е. равновесное состояние преобразуется по тому же закону, что и вектор $\mathbf{x}$. Это значит, что деформации, возникшие в эфире при его поступательном движении, не нарушат его равновесия.

Обратим внимание на два факта: если $v_0'=0$, то $v_0\neq 0$, т. е. относительное движение приводит к деформации времени в равновесном состоянии; при $v_0'=0$ равновесные пространственные смещения среды совпадают с точностью до множителя β в обеих системах отсчета, т. е. смещение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, малое в некоторой системе отсчета, остается малым в любой другой системе из рассматриваемого семейства. Это свойство имеет место только при $a=c$, при $a<c$ оно нарушается.

2. Бросается в глаза аналогия свойств пространственно-временного равновесия при $a=c$ и электромагнитного поля. Учитывая (1.14), легко видеть, что энергия деформации J совпадает с действием электромагнитного поля [3], если пространственное смещение $\mathbf{u}^\circ$ отождествить с магнитным потенциалом поля, а v — с электрическим. Условие несжимаемости $V_1=0$ совпадает с известным в электродинамике условием Лоренца, а векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — с векторами электрической и магнитной напряженности.

Уравнение (1.15) при $J(\mathbf{u})$, заданном (1.14), а также уравнения (1.16), (1.18) совпадают с различными вариантами уравнений поля [3].

Четыре-вектор-потенциал электромагнитного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, определенный указанными уравнениями, как известно, недоопределен, и всегда можно потребовать от него, не уменьшая общности, выполнения условия Лоренца, которое совместно с уравнениями поля. Сверх того, всегда можно положить электрический потенциал v равным нулю в какой-либо системе координат, принятой за покоющуюся, считая его, подобно временному смещению механической среды, следствием относительного движения. Тогда в покоящейся системе напряженность поля $\mathbf{E}=-\mathbf{u}_t^\circ/c$ с точностью до постоянного множителя совпадает со скоростью эфира. Слагаемое $\mathbf{E}^2$ в выражении для действия электромагнитного поля соответствует кинетической энергии, а $\mathbf{H}^2$ — потенциальной энергии деформации эфира.

Аналогия поля с рассматриваемым здесь пространственно-временным состоянием механической среды распространяется в равной степени как на покоющуюся, так и на движущуюся систему отсчета. Преобразование (2.1) равновесного пространственно-временного состояния эфира совпадает с преобразованием четыре-вектора электромагнитного потенциала [3], и уравнения равновесия при $a=c$ инвариантны относительно лоренцева преобразования так же, как и уравнения поля.

Интересно отметить, что эти факты делают не противоречивыми представления о механическом носителе поля, господствовавшие в XIX в. [4], на основе данного определения эфира, а именно находит объяснение факт независимости скорости света от движения наблюдателя.

3. Уравнения поля совпадают, таким образом, с инфинитезимальным приближением уравнений равновесия рассматриваемой упругой среды. Если предположить, что установленная аналогия справедлива не только для малых $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, то уравнения Максвелла следует считать инфинитезимальным приближением нелинейных уравнений поля, которые можно получить, доопределив статику конечных упругих деформаций [1, 5] на четырехмерный вариант так же, как это было сделано для малых деформаций. При всей недоопределенности таких уравнений можно указать некоторые особенности, существенно отличающие их от конструкций нелинейной электродинамики [6–8]: наличие дифференциальной связи в виде условия несжимаемости и конкретная нелинейность тензора ε, обусловленная его геометрическим смыслом тензора деформаций

$$\varepsilon_j^i = {}^1/_2 (u_{x^j}^i + u_{x^i}^j + u_{x^i}^k u_{x^j}^k) \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

4. Аналогия электродинамики и пространственно-временного равновесия упругой среды не исчерпывается совпадением уравнений, описывающих электромагнитный потенциал и деформированное состояние. Можно, оказывается, ее углубить, указав деформированное состояние, которое в ее рамках моделирует заряженную частицу.

Назовем источником в точке $\mathbf{y}$ следующее деформированное состояние: $v(t, \mathbf{x}^\circ)\equiv 0$; $\mathbf{u}^\circ(t, \mathbf{x}^\circ) = cet\,\mathrm{grad}\,\gamma(|\mathbf{x}^\circ - \mathbf{y}|)$, где e — число (положительное или отрицательное), называемое величиной источника; функция $\gamma(\xi)$, называемая формой источника, определена, непрерывна и дифференцируема при $\xi \geqslant 0$, причем $\gamma'(\xi) < 0$ при $\xi > 0$, $\gamma'(0) = 0$; и $\gamma(\xi) = \xi^{-1}$ при $\xi > \rho$. Число

$\rho>0$ назовем радиусом источника. Источник есть равновесное в линейном приближении состояние всюду, за исключением области $Q: |\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|<\rho$, где подразумевается наличие физических явлений, не учитываемых данной постановкой: больших деформаций и т. д. Уравнения равновесия эфира (1.1), таким образом, в области Q нарушаются. В частности, здесь $\operatorname{div} u_t^\circ\neq\neq 0$, так как

$$\int\limits_Q \operatorname{div}\mathbf{u}_t^\circ\, dx^\circ = \int\limits_{|x^\circ-y|=\rho} \mathbf{u}_t^\circ\, d\mathbf{s} = -4\pi ec\neq 0$$

где $d\mathbf{s}$ — направленный вовне элемент поверхности сферы $|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|=\rho$.

Имеем для источника

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\mathbf{u}_t^\circ=e\gamma'(|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|)\frac{\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|},\qquad \mathbf{H}=0,\qquad \int\limits_{x^\circ} V_2^\circ\, d\mathbf{x}^\circ=0$$

$$J=\int\limits_T\alpha\,dt,\qquad \alpha=\int\limits_{x^\circ}\mathbf{E}^2\,d\mathbf{x}^\circ=8\pi e^2c^2\alpha',\qquad \alpha'=\frac{1}{2c^2}\int\limits_0^\infty\gamma'^2(r)r^2d \tag{2.3}$$

при $|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|>\rho$ напряженность $\mathbf{E}=e(\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y})/|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|^3$.

При отождествлении смещения среды с электромагнитным потенциалом источник при $|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|>\rho$ совпадает с полем заряда величины e. Разница лишь в том, что точка, где нарушаются уравнения поля ($\operatorname{div}\mathbf{E}=0$), размывается в область Q и энергия деформации источника α конечна.

Таким образом, источник является механическим аналогом заряда. Такой аналог, очевидно, неединствен. Более соответствует принятым в теории поля конструкциям деформированное состояние $v(t,\mathbf{x}^\circ)=e\gamma(|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|)$, $\mathbf{u}^\circ(t,\mathbf{x}^\circ)\equiv 0$, где $\gamma(\xi)$ определено выше.

Такое задание нарушает, однако, принятый здесь принцип: оставаться, когда это возможно, в рамках классической механики, задаваясь при рассмотрениях, связанных с фиксированной системой координат, значением $v=0$. Отметим, что в области Q это правило может оказаться невыполнимым в силу больших скоростей деформации и сопутствующих им релятивистских эффектов. Здесь, однако, ограничимся описанной выше конструкцией источника, так как она обладает преимуществом наглядного физического смысла.

5. Сложение источника с равновесным состоянием $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ дает также равновесное состояние (всюду, кроме области Q). Состояние $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ назовем внешним по отношению к источнику полем деформаций. Будем полагать при таком сложении, что радиус источника достаточно мал, чтобы положить

$$\mathbf{u}^\circ(t,\mathbf{x}^\circ)\approx\mathbf{u}^\circ(t,\mathbf{y}),\qquad v(t,\mathbf{x}^\circ)\approx v(t,\mathbf{y}),\qquad \forall\mathbf{x}^\circ\in Q \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. Пусть $\mathbf{u}(x)=\mathbf{u}'+\mathbf{u}_+(x)$, где $\mathbf{u}'(x)$ — источник, u_+ — внешнее поле. Энергию такой деформации можно записать в виде

$$J(\mathbf{u})=J(\mathbf{u}_+)+\int\limits_T[\alpha+8\pi e\mathbf{v}_+(t,\mathbf{y})]\,dt \tag{2.5}$$

Действительно, имеем, учитывая (1.11), (1.12), (2.3):

$$J(\mathbf{u})=J(\mathbf{u}'+\mathbf{u}_+)=J(\mathbf{u}_+)+\int\limits_T\alpha\,dt+2\int\limits_{Tx^\circ}\mathbf{E}'\mathbf{E}_+\,d\mathbf{x}^\circ\,dt$$

$$\int\limits_{T,x^\circ}\mathbf{E}'\mathbf{E}_+\,d\mathbf{x}^\circ\,dt=\frac{1}{c^2}\int\limits_{T,x^\circ}\mathbf{u}_t^{\circ\prime}\mathbf{u}_{+t}^\circ\,d\mathbf{x}^\circ\,dt+\frac{1}{c}\int\limits_{T,x^\circ}\mathbf{u}_t^{\circ\prime}\mathbf{v}_{tx^\circ}\,d\mathbf{x}^\circ\,dt=$$

$$=\frac{1}{c^2}\int\limits_{X^\circ}\mathbf{u}_t^{\circ\prime}\mathbf{u}_+^\circ\Big|_{t_0}^{t_1}d\mathbf{x}^\circ+\frac{1}{c}\int\limits_{T,S^\circ}u_t^{\circ\prime}v_+(t,\mathbf{x}^\circ)\,d\mathbf{s}\,dt-$$

$$-\int\limits_{T,X^\circ}\left(\frac{1}{c^2}\mathbf{u}_{tt}^{\circ\prime}\mathbf{u}_+^\circ+\frac{1}{c}v_+\operatorname{div}\mathbf{u}_t^{\circ\prime}\right)d\mathbf{x}^\circ\,dt$$

Далее следует учесть, что граничные значения состояния $\mathbf{u}^\circ(t_0, x)$ и $\mathbf{u}(t_1, x)$ заданы, т. е. заданы $\mathbf{u}_+(t_0, x)$, $\mathbf{u}_+(t_1, x)$ и y. Это значит, что первое слагаемое постоянно, т. е. несущественно при варьировании состояния. Далее можно положить

$$\mathbf{u}_t^{\circ\prime}=ec(\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y})/|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|^3=0 \qquad \text{при } \mathbf{x}\in S^\circ$$

считая, что граница S° тела X° достаточно удалена от источника, т. е. второе слагаемое равно нулю. Равно нулю и третье слагаемое, так как $u_{tt}^{\circ\prime}\equiv 0$. Поэтому, учитывая (3.2) и принимая во внимание, что $\operatorname{div}\mathbf{u}_t^{\circ\prime}=0$ при $|\mathbf{x}^\circ-\mathbf{y}|>\rho$, можем записать с точностью до членов, несущественных при варьировании

$$J(\mathbf{u})=J(\mathbf{u}_+)+\int\limits_T\left[\alpha-v_+(t,\mathbf{y})\int\limits_Q\frac{2}{c}\operatorname{div}\mathbf{u}_t^{\circ\prime}(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}^\circ\right]dt$$

или (2.5).

6. Движущимся источником назовем деформированное состояние, обладающее свойствами источника в некоторой системе координат движущейся поступательно относительно данной системы $\mathbf{x}$. Будем полагать, что траектория $\mathbf{y}(t)$ непрерывна, дважды дифференцируема, причем ускорение $\mathbf{y}^{\cdot\cdot}$ достаточно мало, чтобы систему считать инерциальной.

Лемма 2.2. Для движущегося источника во внешнем равновесном поле деформации $\mathbf{u}_+(x)$ энергия пространственно-временных деформаций имеет вид

$$J(\mathbf{u})=J(\mathbf{u}_+)+8\pi S[\mathbf{y}(t)]$$

$$S[\mathbf{y}(t)]=\int\limits_T\left\{\frac{\alpha}{8\pi}\sqrt{1-\frac{\mathbf{y}^{\cdot 2}}{c^2}}+ev(t,\mathbf{y})-\frac{e}{c}\mathbf{y}^{\cdot}\mathbf{u}_+^\circ(t,\mathbf{y})\right\}dt \tag{2.6}$$

где $\mathbf{y}^{\cdot}\mathbf{u}_+^\circ$ — скалярное произведение.

Доказательство. В системе координат x', связанной с источником, энергия деформации записывается согласно (2.5):

$$J(\mathbf{u})=J[\mathbf{u}_+'(t',\mathbf{x}^{\circ\prime})]+8\pi\int\limits_{t_0'}^{t_1'}\left[\frac{\alpha}{8\pi}+ev'(t',\mathbf{y}')\right]dt' \tag{2.7}$$

Переходя к исходной системе координат t, $\mathbf{x}^\circ$ и учитывая принятые здесь допущения, а также (2.2) и равновесность состояния $\mathbf{u}_+(\mathbf{x})$, будем иметь

$$dt'=\sqrt{1-\mathbf{y}^{\cdot 2}/c^2}\,dt, \qquad J[\mathbf{u}_+'(x')]=J[\mathbf{u}_+(\mathbf{x})]$$

$$v_+'(t,x^{\circ\prime})=\{v_+(t,x^\circ)-y^{\cdot}u^\circ(t,x^\circ)/c\}(1-y^{\cdot 2}/c^2)^{-1/2}$$

Подставляя последние равенства в (2.7), получим соотношение (2.6).

При заданном внешнем поле $\mathbf{u}_+(\mathbf{x})$ энергия деформации $J(\mathbf{u})$ зависит только от траектории $\mathbf{y}(t)$. Поэтому при сделанных допущениях справедлива следующая

Теорема 2.1. Движущийся источник в равновесном внешнем поле деформации $\mathbf{u}_+(\mathbf{x})$ есть равновесное деформированное состояние в том и только в том случае, если его траектория $\mathbf{y}(t)$ удовлетворяет условию

$$\delta S[\mathbf{y}(t)]=0, \quad \mathbf{y}(t)\in M \tag{2.8}$$

где S задается (2.6); M — множество всех достаточно гладких траекторий $\mathbf{y}(t)$, удовлетворяющих граничным условиям $\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}(t_1)=\mathbf{y}_1$.

Сравнивая $S(\mathbf{y})$ с действием для заряженной частицы во внешнем поле $\mathbf{u}_+(\mathbf{x})$ [3], можно сформулировать такое

Следствие. Равновесная траектория $\mathbf{y}(t)$ источника в заданном равновесном внешнем поле деформации $\mathbf{u}_+(\mathbf{x})$ совпадает при заданных граничных условиях $\mathbf{y}(t_0)$, $\mathbf{y}(t_1)$ с траекторией заряженной частицы с массой $\alpha' e^2$ и зарядом e, движущейся в электромагнитном поле с магнитным потенциалом $\mathbf{u}_+^\circ(t, \mathbf{x}^\circ)$ и электрическим $v^\circ(t, \mathbf{x}^\circ)$.

Это значит, что в лице источника мы нашли деформированное состояние, обладающее свойствами, идентифицирующими заряд в теории поля при отождествлении потенциала поля с деформированным состоянием. Эти свойства: взаимодействие заряда с полем и конструкция собственного поля заряда.

Отметим, что при выводе сил, действующих на источник, здесь использовались некоторые идеи нелинейной электродинамики [6–8], связанные с получением пондеромоторных сил из уравнений Максвелла.

7. Полученные факты выявляют полную аналогию статики пространственно-временных деформаций и феноменологической электродинамики.

Действительно, предположим, что мировой пространственно-временной континуум есть упругая однородная, изотропная в пространстве Минковского, несжимаемая среда, которая находится в равновесии и может иметь особенности типа источников.

Нетрудно видеть, что к числу наблюдаемых следствий этого предположения относится совокупность физических явлений, составляющая основу современной феноменологической электродинамики: наличие тел (зарядов), на которые действуют определенного вида силовые поля и которые сами создают поля определенной конструкции, а также совокупность свойств этих полей (электромагнитных), содержащиеся в уравнениях Максвелла. При этом магнитный вектор-потенциал оказывается тождественным пространственному смещению среды $\mathbf{u}^\circ(\mathbf{x})$, а электрический потенциал — временному смещению $v(t, \mathbf{x}^\circ)$. Уравнения электромагнитного поля Максвелла в пустоте совпадают с уравнениями пространственно-временного равновесия среды в их инфинитезимальном приближении. Феномен заряда оказывается тождественным особенности деформированного состояния среды типа источника.

При этом, следуя постулату об атомарном строении электричества, следует считать источниками лишь некоторые элементарные заряды, остальные же рассматривать как результат накапливания последних.

8. В рамках этого же предположения находит объяснение феномен механических тел, рассматриваемых как нейтральные совокупности (суммы) источников и обладающих, в силу теоремы 2.1, свойством инерции. Более того, так определенные механические тела обладают, оказывается, свойством взаимного притяжения, которое подчиняется ньютоновым законам тяготения [1].

Поступила 12 VI 1979

[1] См. *Кротов В. Ф.* Упругие свойства пространственно-временного континуума. М., Ин-т проблем механики АН СССР, 1979, препринт № 131.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кутилин Д. И.* Теория конечных деформаций. М.– Л., Гостехиздат, 1947.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., «Мир», 1975.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М., Физматгиз, 1962.
4. *Shaefer A.* Nineteenth-century aether theories. Perg. press. Oxford. New York, 1972.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. II. М., «Наука», 1976.
6. *Born M.* Quantum theory of elektromagnetik field. Proc. Roy. Soc. Ser. A, London, 1934, vol. 143, No. A849.
7. *Born M., Infeld L.* Foundations of new field theory. Proc. Roy. Soc. Ser. A, London, 1934, vol. 144.
8. *Mie G.* Annalen der Physik. Leipzig, 1912, vol. 37, p. 511; vol. 39, p. 1; vol. 40, p. 7.