

область, примыкающая к началу координат, где расхождение достаточно велико. Вместе с тем условие (3.2) не отражает сложной структуры области стабилизации.

Поведение мультипликаторов при движении вдоль прямой  $\nu=16$  показано на фиг. 5, где использованы те же обозначения, что и на фиг. 3. На графике видно, что между клиньями стабилизации имеет место неустойчивость с достаточно большими по модулю значениями одного из мультипликаторов. Это указывает на то, что к условию (3.2) следует подходить с осторожностью.

Увеличение демпфирования, как правило, благоприятствует параметрической стабилизации. Это видно, в частности, на фиг. 6, где представлена область стабилизации при  $\kappa=11/10$ ,  $\gamma=0.5$ .

Поступила 22 III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
2. Болотин В. В. Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики (к 60-летию акад. В. Н. Челомея). М., ВИНТИ, 1974, стр. 155-166.
3. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.

УДК 531.8

### РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ РЕЛЬСОВОГО ЭКИПАЖА

И. В. НОВОЖИЛОВ

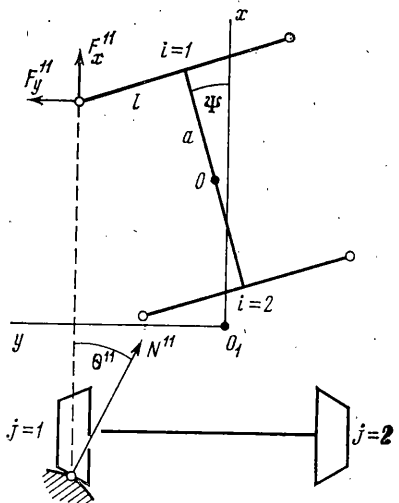
(Москва)

Рельсовый экипаж является сложной механической системой со многими степенями свободы, для которой характерно большое разнесение собственных частот движения. Результаты численного моделирования конкретных экипажей, разброс собственных частот которых достигает трех порядков, приведены в [1]. Это сильно осложняет численное моделирование задачи. Высокий порядок дифференциальных уравнений движения делает практически невозможным их аналитическое исследование.

Поэтому в теории рельсовых экипажей установился ряд упрощенных постановок, позволяющих облегчить задачу. Так, при изучении боковых движений продольная скорость считается постоянным параметром [1, 2] и динамика продольного движения не учитывается. Принимается допущение о неголономном характере связей в точке контакта колеса с рельсом [2, 3]. Вопрос об области применимости таких упрощенных постановок в настоящее время во многом остается открытым. Законность допущения о неголономных связях оговорена в [2] для случая стремления к нулю массы экипажа или его продольной скорости. В [3] рассматриваются динамические уравнения движения экипажа под действием сил крива в точках контакта совместно с уравнениями неголономных связей в этих точках. Такую постановку задачи вряд ли можно считать механически оправданной.

В данной работе на примере двухосного экипажа проводится разделение движений на «быстрые» и «медленные» составляющие, что позволяет оговорить условия применимости упрощенных постановок.

Рассмотрим двухосный рельсовый экипаж, движущийся по прямолинейному, горизонтальному участку пути. Конструкцию экипажа считаем абсолютно жесткой, кроме малых окрестностей точек контакта, где допускается «псевдоскольжение» [2]. Зададим неподвижную систему отсчета  $O_1xy$ ; ось  $x$  делит расстояние между рельсами пополам и направлена по движению экипажа, ось  $y$  направлена влево по движению (фигура). Пренебрегая малыми изменениями высоты корпуса экипажа, будем считать движение корпуса плоским. Положение экипажа зададим координатами  $X, Y$  его центра масс, углом



поворота  $\Psi$  корпуса и углами поворота  $\alpha_i$  ( $i=1, 2$ ) колесных пар. Здесь и далее индекс  $i=1$  придан передней,  $i=2$  задней колесным парам. На фигуре и далее индекс  $j=1$  придан левым, а  $j=2$  правым по ходу движения колесам экипажа; через  $\theta^{ij}$  обозначен угол между вертикальным направлением и нормалью в точке касания ( $ij$ )-го колеса с рельсом, через  $N^{ij}$  обозначена величина нормальной реакции в этой точке. Далее для малых  $\theta^{ij}$  и симметричной конструкции экипажа будем считать  $N^{ij}=P$ , где  $P$  — четверть веса экипажа.

Следуя [1, 2], запишем уравнения движения, пренебрегая квадратичными и более высокого порядка малости членами по малым переменным  $Y, \Psi, \theta^{ij}$ .

$$\begin{aligned} mV^* &= \sum_{i,j}^2 F_x^{ij}, & mY^{**} &= \sum_{i,j}^2 F_y^{ij} - \sum_i^2 P(\theta^{i1} - \theta^{i2}) \\ I_0\Psi^{**} &= l \sum_i^2 (F_x^{i2} - F_x^{i1}) - a \sum_j^2 (F_y^{1j} - F_y^{2j}) - aP \sum_i^2 (-1)^i (\theta^{i2} - \theta^{i1}) \\ \theta^{i1} - \theta^{i2} &= \delta [Y - (-1)^i a\Psi], & I\alpha_1^{**} &= - \sum_j^2 F_x^{1j} r_{1j} - M + M_1 \\ I\alpha_2^{**} &= - \sum_j^2 F_x^{2j} r_{2j} - M, & r_{ij} &= r \{1 + (-1)^j \gamma r^{-1} [Y - (-1)^i a\Psi]\} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени  $T$ ,  $m$  — масса экипажа,  $V$  — продольная скорость,  $I_0$  — момент инерции экипажа относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс экипажа точку  $O$ ,  $2l$  — расстояние между рельсами,  $2a$  — между осями колесных пар,  $I$  — момент инерции пары относительно своей оси,  $r_{ij}$  — расстояние от оси ( $ij$ )-го колеса до точки контакта,  $r$  — его среднее значение при  $Y, \Psi=0$ ;  $\gamma, \delta$  — константы, характеризующие форму поверхности колеса ( $\gamma$  — коничность,  $\delta$  — коэффициент износа),  $M$  — момент трения в осях пар,  $M_1$  — момент, приводящий экипаж в движение и приложенный для определенности к первой паре.

Через  $(F_x^{ij}, F_y^{ij})$  в (1) обозначены проекции на оси  $x, y$  силы крипа в точках контакта. Запишем их выражения согласно [1, 2]:

$$\begin{aligned} F_x^{ij} &= -k\varepsilon_x^{ij}, & \varepsilon_x^{ij} &= (V_x^{ij} - r_{ij}\alpha_i^*)/r_{ij}\alpha_i^* \\ F_y^{ij} &= -k\varepsilon_y^{ij}, & \varepsilon_y^{ij} &= (V_y^{ij} - r_{ij}\alpha_i^*\Psi)/r_{ij}\alpha_i^* \\ V_x^{ij} &= V + (-1)^j V^*, & V_y^{ij} &= Y^* - (-1)^i a\Psi^* \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon_x^{ij}, \varepsilon_y^{ij}$  — проекции псевдоскольжения,  $V_x^{ij}, V_y^{ij}$  — проекции скоростей точек контакта в их относительном движении вместе с корпусом,  $k$  — коэффициент крипа.

Отличие поверхности качения колес от цилиндрической, а также псевдоскольжение в точках контакта приводят к тому, что угловые скорости колесных пар  $\alpha_i^* = \omega_i$  отличаются на малые величины от значения средней угловой скорости  $V/r$ . Проведем в (1), (2) замену  $\omega_i = (V/r) + \Delta\omega_i$ , проведем исключение ряда вспомогательных переменных и запишем полученную систему в линейном по  $Y, \Psi, \Delta\omega_i$  приближении

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{2kr}{mV} (\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2) \\ \mu_1 \Delta\omega_1^* &= -\frac{2k}{mV} [(1 + \mu_1)\Delta\omega_1 + \mu_1 \Delta\omega_2] + \frac{M_1 - M}{mr^2} \\ \mu_1 \Delta\omega_2^* &= -\frac{2k}{mV} [(1 + \mu_1)\Delta\omega_2 + \mu_1 \Delta\omega_1] - \frac{M}{mr^2} \\ mY^{**} &= -4k(Y^*/V - \Psi) - 2\delta P Y \\ I\Psi^{**} &= -4k \left( \frac{a^2 + l^2}{V} \Psi^* + \frac{\gamma l}{r} Y \right) - 2\delta P a^2 \Psi \end{aligned} \quad (3)$$

Первая часть (3) системы, описывающая продольное движение, не зависит от уравнений (4), описывающих боковое движение.

В (3) введен безразмерный параметр  $\mu_1 = I/mr^2 = m_1 \rho_1^2/mr^2$ , где  $m_1$  — масса колесной пары,  $\rho_1$  — ее радиус инерции. Будем рассматривать далее экипажи, для которых выполнено условие  $m_1 \ll m$ . Учитывая неравенство  $\rho_1^2 < r^2$ , имеем  $\mu_1 \ll 1$ .

Старшие производные второго и третьего уравнений системы (3) имеют малый множитель  $\mu_1 \ll 1$ . Запишем вырожденную [4, 5] по этому параметру систему уравнений, описывающую с погрешностью порядка  $\mu_1$  медленные составляющие продольного движения. Полагая  $\mu_1 = 0$ , получим

$$V^* = \frac{2k}{mV} (\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)$$

$$0 = -\frac{2k}{mV} \Delta\omega_1 + \frac{M_1 - M}{mr^2}, \quad 0 = -\frac{2k}{mV} \Delta\omega_2 - \frac{M}{mr^2}$$

Отсюда, исключив  $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2$ , имеем

$$V^* = (M_1 - 2M) / mr^2 \quad (5)$$

Уравнением (5) описывается процесс разгона экипажа под действием момента двигателя и моментов трения. Характерное время  $T_1$  развития этого процесса определяется соотношением  $T_1^2 = mr^2/M_{1*}$ ,  $M_{1*} = \max M_1$ .

Условием, гарантирующим оговоренную точность приближения, является условие асимптотической устойчивости положений равновесия так называемой «присоединенной» системы [4, 5]. Эта система получится из (3), если в ней перейти к «быстрому» времени  $\tau = T/\mu_1$  и положить затем  $\mu_1 = 0$ :

$$\frac{d\Delta\omega_1}{d\tau} = -\frac{2k}{mV} \Delta\omega_1 + \frac{M_1 - M}{mr^2}$$

$$\frac{d\Delta\omega_2}{d\tau} = -\frac{2k}{mV} \Delta\omega_2 - \frac{M}{mr^2} \quad (6)$$

В (6) медленная переменная  $V$  по [4, 5] считается параметром. Условие асимптотической устойчивости положений равновесия системы (6) легко проверяется для широкого класса зависимостей  $M_1, M$  от  $\omega_1, \omega_2$  и  $T$ . Системой (6) описываются быстрые движения колесных пар по псевдоскольжениям под действием моментов сил крипа.

Рассмотрим уравнения бокового движения. Запишем их в форме Коши, положив дополнительно  $P = mg/4$ :

$$\frac{mV(T/T_1)}{4k} V_y^* = -(V_y - V\Psi) - \frac{mV(T/T_1)\delta g}{8k} Y$$

$$\frac{mV(T/T_1)}{4k} \rho^2 \Omega^* = - \left[ (a^2 + l^2) \Omega + \frac{\gamma l V(T/T_1)}{r} Y \right] -$$

$$- \frac{mV(T/T_1)\delta g}{8k} a^2 \Psi, \quad Y^* = V_y, \quad \Psi^* = \Omega \quad (7)$$

Здесь  $\rho$  — радиус инерции экипажа,  $V(T/T_1)$  — явная функция времени — решение уравнения (5), развивающееся во временном масштабе  $T_1$ . Подстановка в (7) вместо решения исходных уравнений (3) решения  $V(T/T_1)$  вырожденной системы (5) оправдана тем, что решения систем (5) и (3) отличаются на величину порядка  $\mu_1$ . Добавки такого порядка в коэффициентах системы (7) приводят, по крайней мере на конечном интервале времени, к добавкам в решении такой же величины.

Возможность разделения движений в (7) связана, прежде всего, с тем, что характерное время  $T_2$  бокового движения обычно существенно меньше характерного времени  $T_1$  разгона экипажа. (Выражение для  $T_2$  через параметры системы будет получено ниже.)

Проведем нормализацию [6, 7] уравнений (7):

$$t = \frac{T}{T_*}, \quad v_y = \frac{V_y}{V_{y*}}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Omega_*}, \quad \psi = \frac{\Psi}{\Psi_*}, \quad y = \frac{Y}{Y_*}, \quad v = \frac{V}{V_*} \quad (8)$$

Здесь  $T_*$ ,  $V_{y*}$ ,  $\Omega_*$ ,  $\Psi_*$ ,  $Y_*$ ,  $V_*$  — характерные для рассматриваемого класса движения значения соответствующих величин, выбираемые так, чтобы нормализованные переменные  $t, v_y, \omega, \psi, y, v$  не превосходили значений порядка единицы. Свяжем

характерные значения величин соотношениями

$$Y_* = V_y T_*, \quad \Psi_* = \Omega_* T_*, \quad V_{y*} = V_* T_*, \quad T_* = T_2 \quad (9)$$

При подстановке (8), (9) в (7) функция  $V(T/T_1)$  преобразуется следующим образом:  $V(T/T_1) = V_* v(T_2 t/T_1) = V_* v(\mu_2 t)$ . Здесь  $\mu_2 = T_2/T_1$ . Ограничимся далее классом экипажей, для которых  $\mu_2 \ll 1$ . При этом коэффициенты нормализованной системы (7) являются функциями медленного времени  $\mu_2 t$ . Традиционное «замораживание» коэффициентов этой системы приводит на конечных интервалах времени  $t \sim 1$  к погрешностям порядка  $\mu_2$ .

Пренебрегая такими погрешностями, будем далее считать  $V$  в (7) параметром. Тогда в (8), (9) естественно принять  $V_* = V$ ,  $v = 1$ . Нормализованная с учетом последнего замечания система (7) примет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_3}{T_2}\right) \frac{dv_y}{dt} &= -v_y + \psi - \frac{1}{2} \left(\frac{T_3 T_2}{T_4^2}\right) y \quad (10) \\ \left(\frac{T_3}{T_2}\right) \frac{d\omega}{dt} &= - \left[ (a^2 + l^2) \omega - \frac{\gamma l}{r} (VT_2)^2 y \right] \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{T_3 T_2}{T_4^2}\right) \frac{a^2}{\rho^2} \psi \\ dy/dt &= v_y, \quad d\psi/dt = \omega, \quad T_3 = mV/4k, \quad T_4^2 = 1/g\delta \end{aligned}$$

Постоянная времени  $T_3$  характеризует скорость протекания переходных процессов в движении корпуса экипажа под действием сил крива,  $T_4$  — постоянная времени, характеризующая движение экипажа под действием боковых составляющих нормальных реакций  $N_{ij} = P$ .

Коэффициент крива  $k$  является весьма большой величиной. Будем рассматривать класс экипажей, для которых постоянная времени  $T_3$ , обратно пропорциональная  $k$ , является малой величиной:  $T_3 \ll T_2$ . Примем  $T_2 \sim T_4$ . Тогда систему (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mu_3 \frac{dv_y}{dt} &= -v_y + \psi - \frac{1}{2} \kappa \mu_3 y \quad (11) \\ \mu_3 \frac{d\omega}{dt} &= - \left[ (a^2 + l^2) \omega - \frac{\gamma l}{r} (VT_2)^2 y \right] \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2} \kappa \mu_3 \frac{a^2}{\rho^2} \psi \\ \frac{dy}{dt} &= v_y, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega, \quad \mu_3 = \frac{T_3}{T_2} \ll 1, \quad \kappa = \frac{T_2}{T_4} \sim 1 \end{aligned}$$

Вид системы (11) позволяет применить методы разделения движений в форме [4, 5]: Вырожденная система получается из (11) при  $\mu_3 = 0$ .

$$\frac{dy}{dt} - \psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} + \frac{\gamma l (VT_2)^2}{r(a^2 + l^2)} y = 0 \quad (12)$$

Системой (12) описывается так называемое «кинематическое влияние» рельсового экипажа, возникающее при наложении неголономных связей в точках контакта колес и рельсов.

В рассматриваемом случае неголономные связи реализуются за счет сил крива с большой жесткостью аналогично тому, как в [8] неголономные связи реализуются за счет сил кулонова трения.

Для того чтобы найти характерное время  $T_2$  незатухающих колебаний, описываемых уравнением (12), приравняем единице безразмерную частоту этих колебаний. Тогда  $T_2^2 = (a^2 + l^2) r / \gamma l V^2$ .

Таким образом, для рельсового экипажа выделяются несколько составляющих движения, которые характеризуются следующими постоянными времени:  $T_1 = (mr/M_{i*})^{1/2}$  — постоянная времени процесса разгона в продольном движении;  $T_2 = [(a^2 + l^2) r / \gamma l V^2]^{1/2}$  — постоянная времени бокового движения типа «кинематического влияния», определяемого коничностью колес;  $T_3 = mV/4k$  — постоянная времени составляющей бокового движения, вызванной силами крива;  $T_4 = (1/g\delta)^{1/2}$  — постоянная времени, характеризующая влияние изношенности профиля колеса;  $T_5 = \mu_1 T_3$  — постоянная времени, характеризующая, как видно из (3), составляющую движения колесных пар за счет псевдоскольжения.

Допущение о постоянстве продольной скорости при изучении бокового движения оправдано, если выполнено условие  $T_1 \gg T_2, T_3, T_4$ .

Допущение о неголономных связях в точках контакта оправдано при  $T_2 \gg T_3$ . Пренебрежение динамикой колесных пар на псевдоскольжениях оправдано при  $\mu_1 \ll 1$ .

Поступила 21 III 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лазарян В. А., Длугач Л. А., Коротенко М. Л. Устойчивость движения рельсовых экипажей. Киев, «Наукова думка», 1972.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
3. Кондратьев В. Ф. О влиянии неголономных связей на устойчивость и колебания одной механической системы. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2.
4. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31, № 3.
5. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 3.
6. Клайн С. Дж. Подобие и приближенные методы. М., «Мир», 1968.
7. Новожилов И. В. Приближенные методы исследования гироскопических систем. В сб.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973.
8. Новожилов И. В. О заносе при торможении. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.