

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСАХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В. А. СЕМЕНОВ

(Москва)

Исследуется структура областей неустойчивости для системы с одной степенью свободы, параметрически возбуждаемой полигармоническим воздействием. Подробно рассматривается случай, когда воздействие представляется в виде суммы двух синусоидальных процессов, частоты которых находятся в простом кратном отношении. Показывается существование дополнительных клиньев областей неустойчивости, соответствующих параметрическим резонансам на коллективной частоте параметрического воздействия. Изучается поведение мультипликаторов системы при пересечении областей неустойчивости.

1. Рассмотрим систему с одной степенью свободы с линеаризованным уравнением движения

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma\omega_0 \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 [1 + \mu \Phi(t)] q = 0 \quad (1.1)$$

Здесь $q(t)$ — обобщенная координата, $\gamma \geq 0$ — коэффициент демпфирования, ω_0 — собственная частота системы, $\mu > 0$ — коэффициент возбуждения. Функцию $\Phi(t)$ представим в виде ряда

$$\Phi(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} \mu_k e^{i\theta_k t} \quad (1.2)$$

где μ_k — комплексные коэффициенты, причем $\mu_{-k} = \mu_k^*$, $\theta_{-k} = -\theta_k$. Положительные числа $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N$ будем называть парциальными частотами параметрического воздействия. К уравнению (1.1) приводит многие задачи параметрических колебаний, динамической устойчивости упругих систем и т. д. [1].

Будем считать, что парциальные частоты связаны соотношениями $\theta_k = r_k \theta_1 / s_k$, где r_k и s_k — положительные целые несократимые числа. Тогда функция (1.2) будет периодической с периодом $T = 2\pi/\theta$ и частотой $\theta = \theta_1/s$, где s — наименьшее общее кратное чисел s_2, s_3, \dots, s_N . Будем называть θ коллективной частотой параметрического воздействия. Парциальные частоты связаны с коллективной частотой соотношением $\theta_k = m_k \theta$, где $m_k = r_k s / s_k$.

Уравнение (1.1) при $\gamma = 0$ представляет собой уравнение Хилла. Как известно [1], область неустойчивости решения $q = 0$ этого уравнения на плоскости параметров μ, θ имеет счетное множество клиньев, примыкающих к оси $\mu = 0$. Эти клинья соответствуют частотным отношениям параметрического резонанса

$$\theta = 2\omega_0/p \quad (p=1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

В силу непрерывности при достаточно малых γ клиновидная структура должна сохраниться. В этом смысле частотные отношения (1.3) являются критическими также и при $\gamma \neq 0$.

Трагую низшую частоту θ_1 в разложении (1.2) как основную, рассмотрим структуру области неустойчивости плоскости μ, θ_1 .

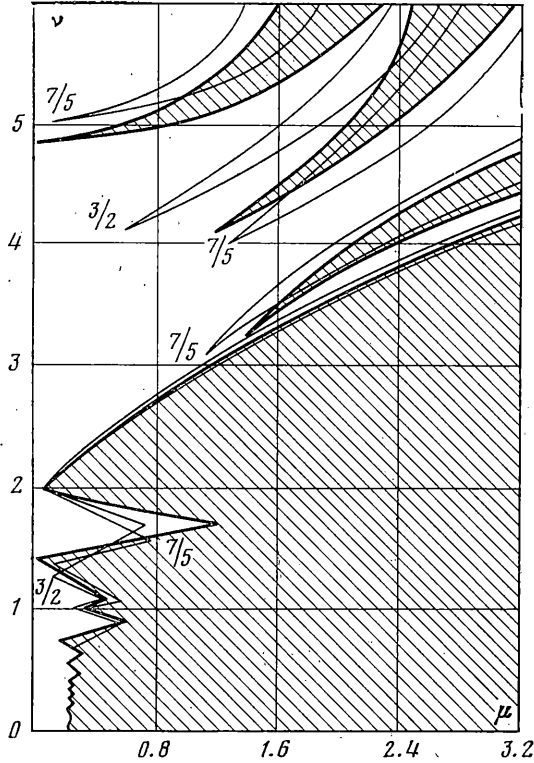
Целесообразно различать два типа параметрических резонансов при полигармоническом возбуждении. Во-первых, это резонансы (1.3) при $p = p_k m_k$, где p_k — положительные целые числа. Соответствующие частотные соотношения имеют вид

$$\theta_k = 2\omega_0/p_k \quad (k=1, 2, \dots, N; p_k=1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

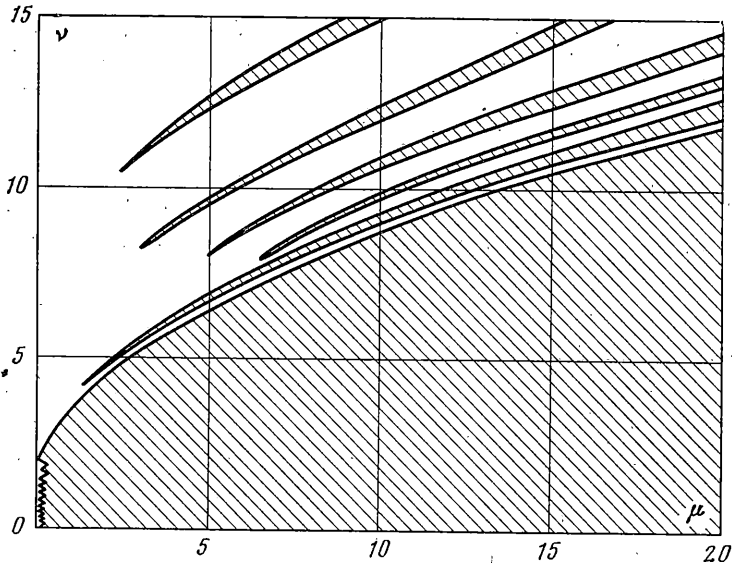
и отвечают парциальному воздействию отдельных составляющих в разложении (1.2). Эти резонансы будем называть парциальными. Остальные резонансы, для которых p в соотношении (1.3) не кратно ни одному из целых чисел m_k , будем называть коллективными. При $p > s$ соответствующие точки принадлежат тому же отрезку частотной оси, что и парциальные резонансы (1.4). Поэтому наибольший интерес вызывают коллективные резонансы, для которых $p < s$. Если выразить соответствующие частотные соотношения через основную частоту θ_1 , то получим, что для этих резонансов

$$\theta_1 = 2\omega_0 s/p \quad (p=1, 2, \dots, s-1) \quad (1.5)$$

Из приведенного выше вытекает следующее предположение о структуре области неустойчивости. При $\theta_1 < 2\omega_0$ область неустойчивости имеет бесконечное счетное

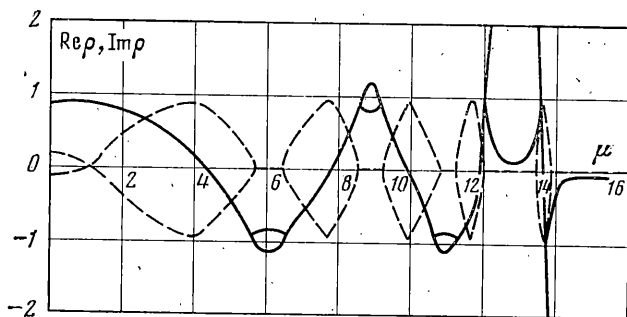


Фиг. 1

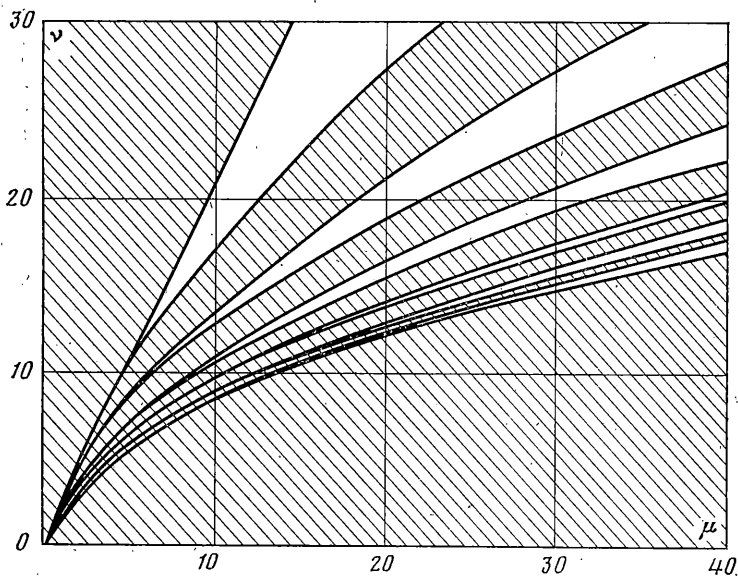


Фиг. 2

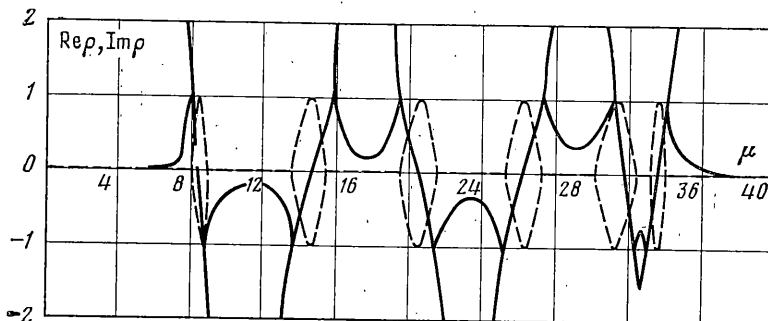
число клиньев, плотность которых увеличивается с уменьшением частоты θ_1 . Если $\gamma > 0$ и μ не мало, то эти клинья накладываются друг на друга и сливаются в сплошную область. При $\theta_1 > 2\omega_0$ имеется конечное число клиньев, не превышающее $s-1$, где s — наименьшее общее кратное чисел s_2, \dots, s_N . Эти клинья расположены с большими интервалами и могут сохраниться при $\gamma > 0$ и при достаточно больших μ .



Фиг. 3



Фиг. 4



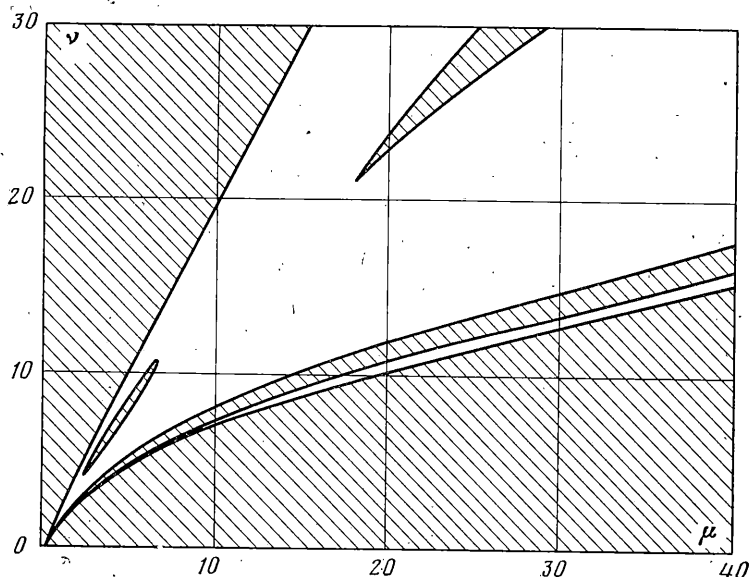
Фиг. 5

2. Подтвердим высказанные предположения непосредственным построением областей неустойчивости уравнения (1.1) для различных функций (1.2). Для этого используем численный метод из [2], основанный на теории Флоке-Ляпунова и состоящий в численном интегрировании уравнения (1.1) на отрезке $[0, T]$ и непосредственном вычислении мультипликаторов. Был подробно изучен случай

$$\Phi(t) = 2(\cos \theta_1 t + \cos \theta_2 t) \quad (2.1)$$

при различных соотношениях между парциальными частотами $\kappa = \theta_2/\theta_1$.

На фиг. 1 представлены области неустойчивости на плоскости $\mu, \nu = \theta_1/\omega_0$, построенные при $\kappa = 3/2, 7/5$ и $17/12$. Эти отношения можно трактовать как последова-



Фиг. 6

тельные приближения подходящими рациональными дробями к отношению $\kappa = \sqrt{2}$ с погрешностью 6.06, 1.00 и 0.17% соответственно. Коэффициент демпфирования в уравнении (1.1) принят $\gamma = 0.01$. Области неустойчивости для случая $\kappa = \sqrt{17/12}$ заштрихованы.

На фиг. 1 ясно видны клинья, отвечающие основным парциальным резонансам (1.4), а также коллективным резонансам (1.5). При этом в случае $\kappa = 3/2$ наблюдается один дополнительный клин области неустойчивости, примыкающий к частотной оси вблизи $\nu = 4$, при $\kappa = 7/5, \sqrt{17/12}$ — по три дополнительных клина. Вообще говоря, число этих клиньев может быть меньше, чем $s-1$ как из-за влияния демпфирования, так и из-за возможности слияния отдельных клиньев.

Фигура 2 соответствует случаю, когда $\kappa = \sqrt{14/10}$, $\gamma = 0.01$. Параметрическое воздействие (2.1) представляет собой в этом случае процесс биений с основной частотой θ_1 и с коллективной частотой $\theta = \theta_1/10$. Область неустойчивости четко разделяется на сплошную область, верхний клин которой примыкает к оси частот вблизи $\nu = 2$ и ряда отдельных клиньев, соответствующих резонансам (1.5).

Изменение мультипликаторов системы при пересечении этих клиньев показано на фиг. 3, где сплошные линии отвечают действительным частям, штриховые линии — мнимым частям мультипликаторов. График получен при движении на плоскости параметров по прямой $\nu = 10$. Эта прямая пересекает четыре клина, отвечающих коллективным резонансам. При пересечении первых трех клиньев ни один из мультипликаторов не удаляется далеко от единичного круга. В пределах четвертого клина и в основной области неустойчивости один из мультипликаторов существенно превышает по модулю единицу.

3. Рассмотрим случай стабилизации неустойчивого положения равновесия при помощи параметрического воздействия [3, 4]. В уравнении

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\gamma\omega_0 \frac{dq}{dt} - \omega_0^2 [1 + \mu \Phi(t)] q = 0 \quad (3.1)$$

в отличие от (1.1) последний член взят с противоположным знаком.

На фиг. 4 показаны области стабилизации (оставлены незаштрихованными) для случая, когда функция $\Phi(t)$ взята в виде (2.1). Принято, что $\kappa = \sqrt{14/10}$, $\gamma = 0.01$. Область стабилизации разделяется на ряд клиньев (в поле фигуры показаны шесть клиньев). Заметим, что метод усреднения [4] дает в случае полигармонического воздействия приближенное условие стабилизации

$$\nu^2 < 2\mu^2 \sum_{k=1}^N \left(\frac{\theta_k}{\theta_1} \right)^2 |\mu_k|^2 \quad (3.2)$$

Условие (3.2), взятое со знаком равенства, дает границу стабилизации, достаточно близкую к левой границе левого клина на фиг. 4. Исключение составляет

область, примыкающая к началу координат, где расхождение достаточно велико. Вместе с тем условие (3.2) не отражает сложной структуры области стабилизации.

Поведение мультипликаторов при движении вдоль прямой $\nu=16$ показано на фиг. 5, где использованы те же обозначения, что и на фиг. 3. На графике видно, что между клиньями стабилизации имеет место неустойчивость с достаточно большими по модулю значениями одного из мультипликаторов. Это указывает на то, что к условию (3.2) следует подходить с осторожностью.

Увеличение демпфирования, как правило, благоприятствует параметрической стабилизации. Это видно, в частности, на фиг. 6, где представлена область стабилизации при $\kappa=11/10$, $\gamma=0.5$.

Поступила 22 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1956.
2. Болотин В. В. Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики (к 60-летию акад. В. Н. Челомея). М., ВИНТИ, 1974, стр. 155-166.
3. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 3.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.

УДК 531.8

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ РЕЛЬСОВОГО ЭКИПАЖА

И. В. НОВОЖИЛОВ

(Москва)

Рельсовый экипаж является сложной механической системой со многими степенями свободы, для которой характерно большое разнесение собственных частот движения. Результаты численного моделирования конкретных экипажей, разброс собственных частот которых достигает трех порядков, приведены в [1]. Это сильно осложняет численное моделирование задачи. Высокий порядок дифференциальных уравнений движения делает практически невозможным их аналитическое исследование.

Поэтому в теории рельсовых экипажей установился ряд упрощенных постановок, позволяющих облегчить задачу. Так, при изучении боковых движений продольная скорость считается постоянным параметром [1, 2] и динамика продольного движения не учитывается. Принимается допущение о неголономном характере связей в точке контакта колеса с рельсом [2, 3]. Вопрос об области применимости таких упрощенных постановок в настоящее время во многом остается открытым. Законность допущения о неголономных связях оговорена в [2] для случая стремления к нулю массы экипажа или его продольной скорости. В [3] рассматриваются динамические уравнения движения экипажа под действием сил крива в точках контакта совместно с уравнениями неголономных связей в этих точках. Такую постановку задачи вряд ли можно считать механически оправданной.

В данной работе на примере двухосного экипажа проводится разделение движений на «быстрые» и «медленные» составляющие, что позволяет оговорить условия применимости упрощенных постановок.

Рассмотрим двухосный рельсовый экипаж, движущийся по прямолинейному, горизонтальному участку пути. Конструкцию экипажа считаем абсолютно жесткой, кроме малых окрестностей точек контакта, где допускается «псевдоскольжение» [2]. Зададим неподвижную систему отсчета O_1xy ; ось x делит расстояние между рельсами пополам и направлена по движению экипажа, ось y направлена влево по движению (фигура). Пренебрегая малыми изменениями высоты корпуса экипажа, будем считать движение корпуса плоским. Положение экипажа зададим координатами X, Y его центра масс, углом

