УДК 531.383

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХСТЕПЕННОГО ГИРОСКОПА НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

В. П. ИЛЬЧАНИНОВ, В. Г. ТЕРЕШИН

(*Уфа*)

Рассматривается поведение двухстепенного гироскопа, установленного на равномерно вращающемся основании, при наличии статической неуравновешенности кольца подвеса. Проведено точное аналитическое исследование нелинейной механической системы.

Рассмотрим двухстепенной гироскоп, установленный на основании так, что между осью поворота кольца подвеса и осью вращения основания имеется некоторый произвольный угол $\varkappa$ (фигура). Будем предполагать, что ось вращения основания направлена по вертикали, силы трения относительно оси поворота кольца отсутствуют, а единственный учитываемый момент есть момент сил тяжести, обусловленный наличием статической неуравновешенности Pl кольца подвеса, где P – вес кольца, а l – смещение центра тяжести кольца вдоль оси ротора. Положение системы координат $Ox_1y_1z_1$, связанной с основанием относительно неподвижной системы $O\xi\eta\zeta$, определяется углом $\Phi=\Omega t$, где $\Omega=\mathrm{const}$ – угловая скорость собственного вращения основания. Система координат $Ox_2y_2z_2$ связана с корпусом двухстепенного гироскопа, а $Ox_3y_3z_3$ – с его кольцом. В качестве обобщенных координат выбраны угол поворота кольца относительно корпуса α и угол поворота ротора относительно кольца подвеса φ.

Изучаемая механическая система является полуреономной и ее кинетическая энергия складывается из квадратичного, линейного относительно обобщенных скоростей и независящего от них многочленов, в которые время t явно не входит. В подобных системах имеет место интеграл Якоби – Пенлеве [1], имеющий вид

$$H={}^1/_2I_z\alpha^{\cdot 2}+{}^1/_2\varphi^{\cdot 2}I_{1y}-{}^1/_2I_z\Omega^2\cos^2\varkappa-{}^1/_2I_x\Omega^2\sin^2\varkappa\cos^2\alpha+$$
$$+Pl\sin\alpha\sin\varkappa-{}^1/_2I_y\Omega^2\sin^2\varkappa\sin^2\alpha=h_1=\mathrm{const} \tag{1}$$

Здесь $I_x=I_{1x}+I_{2x}$, $I_y=I_{1y}+I_{2y}$, $I_z=I_{1z}+I_{2z}$; I_{1x}, I_{1y}, I_{1z} – моменты инерции ротора относительно соответствующих осей $Ox_3y_3z_3$, причем $I_{1x}=I_{1z}$; I_{2x}, I_{2y}, I_{2z} – моменты инерции кольца относительно тех же осей. Движение гироскопа полностью характеризуется системой канонических уравнений Гамильтона

$$\alpha^{\cdot}=p_\alpha/I_z-\Omega\cos\varkappa,\quad \varphi^{\cdot}=p_\varphi/I_{1y}-\Omega\sin\varkappa\sin\alpha,\quad p_\varphi^{\cdot}=0$$
$$p_\alpha^{\cdot}=p_\varphi\Omega\sin\varkappa\cos\alpha-I_x\Omega^2\sin^2\varkappa\sin\alpha\cos\alpha-Pl\sin\varkappa\cos\alpha-I_{2y}\Omega^2\sin^2\varkappa\sin\alpha\cos\alpha \tag{2}$$

Из данных уравнений (2) следует существование циклического интеграла

$$I_{1y}(\varphi^{\cdot}+\Omega\sin\varkappa\sin\alpha)=h_2=\mathrm{const} \tag{3}$$

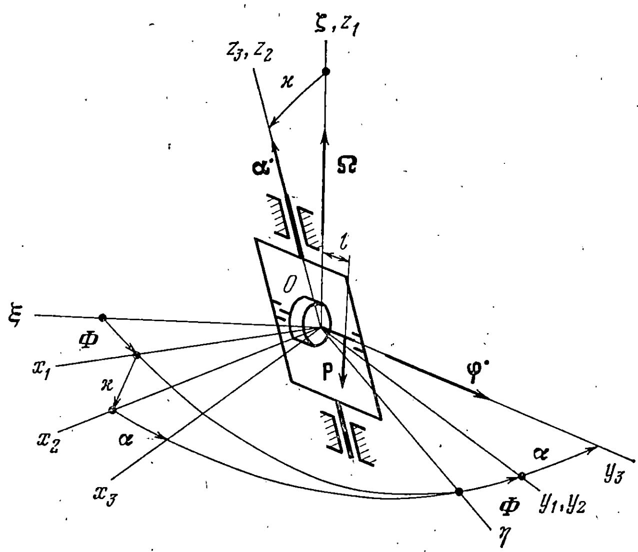
который представляет кинетический момент ротора гироскопа в неподвижной системе координат.

Так как система имеет две степени свободы, то двух интегралов движений (1), (3) достаточно для определения в квадратурах решения нелинейных уравнений (2). После некоторых преобразований с учетом начальных условий α_0, $\alpha_0^{\cdot}$, φ_0, $\varphi_0^{\cdot}$ имеем

$$(t-t_0)=\frac{[(I_x-I_{2y})^{-1}I_z]^{1/2}}{\Omega\sin\varkappa}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{(\sin\alpha-A_1)^{1/2}(A_2-\sin\alpha)^{1/2}} \tag{4}$$

$$\varphi_0=\varphi+\frac{[(I_x-I_{2y})^{-1}I_z]^{1/2}}{\Omega\sin\varkappa}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{(\Omega\sin\varkappa\sin\alpha-h_2I_{1y}^{-1})}{(\sin\alpha-A_1)^{1/2}(A_2-\sin\alpha)^{1/2}}d\alpha \tag{5}$$

$$A_{1,2}=\frac{(h_2\Omega-Pl)}{(I_x-I_{2y})\Omega^2\sin\varkappa}\mp\frac{(h_2\Omega-Pl)}{(I_x-I_{2y})\Omega^2\sin\varkappa}\times$$
$$\times\left\{1+\frac{\Omega^2(I_x-I_{2y})}{(h_2\Omega-Pl)^2}[I_z\alpha_0^{\cdot 2}+(I_x-I_{2y})\Omega^2\sin^2\varkappa\sin^2\alpha_0-2(h_2\Omega-Pl)\sin\alpha_0\sin\varkappa]\right\}^{1/2} \tag{6}$$



Выражения (4) и (5) полностью характеризуют движение двухстепенного гироскопа, установленного на равномерно вращающемся основании, причем (4) определяет закон изменения угла поворота кольца с течением времени, а (5) дает конечную связь между координатами α и φ, позволяя выразить зависимость угла поворота ротора относительно кольца подвеса в функции времени.

Однако, поскольку основной интерес представляет движение кольца гироскопа, в дальнейшем рассматривается только решение (4), которое можно преобразовать при помощи подстановки

$$z=\sin\alpha \tag{7}$$

к виду

$$\Omega[(I_x-I_{2y})I_z^{-1}]^{1/2}(t-t_0)\sin\varkappa=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{(1-z^2)^{1/2}(z-A_1)^{1/2}(A_2-z)^{1/2}} \tag{8}$$

Из формулы (8) следует, что в рассматриваемом случае имеет место эллиптический интеграл [2]. Для наглядной иллюстрации полученного результата приведем данный интеграл к нормальной форме, например, аналогично тому, как это было сделано в работе [3]. Для этой цели воспользуемся комплексной заменой переменной z:

$$z=\frac{m_1n_2x+m_2n_1}{(A_1+A_2)(n_2x+n_1)},\qquad n_{1,2}=(1-A_1^2)^{1/2}\pm i(A_2^2-1)^{1/2}$$

$$m_{1,2}=1+A_1A_2\pm i(1-A_1)^{1/2}(A_2-1)^{1/2} \tag{9}$$

После необходимых математических преобразований будем иметь соотношение, выраженное через неполные эллиптические интегралы первого рода в нормальной форме Лежандра $F(\varphi_0^*, k_0)$ и $F(\varphi^*, k_0)$:

$$\frac{n_1\Omega}{(A_1+A_2)}(t-t_0)\left(\frac{I_x-I_{2y}}{2I_zm_2^{-1}}\right)^{1/2}\sin\varkappa=F(\varphi^*,k_0)-F(\varphi_0^*,k_0) \tag{10}$$

Здесь амплитуда и модуль интегралов определяются выражениями

$$\varphi^*=\arcsin x,\quad \varphi_0^*=\arcsin x_0,\quad k_0=n_2n_1^{-1}(m_1/m_2)^{1/2} \tag{11}$$

Обращение интеграла $F(\varphi^*, k_0)$ в (10) с учетом замен (7) и (9) приводит к искомому решению в эллиптических функциях

$$\alpha=\arcsin\frac{m_1n_2\,\mathrm{sn}[\tau+F(\varphi_0^*,k_0)]+m_2n_1}{(A_1+A_2)\{n_2\,\mathrm{sn}[\tau+F(\varphi_0^*,k_0)]+n_1\}} \tag{12}$$

$$\tau=n_1\Omega(A_1+A_2)^{-1}(t-t_0)[(I_x-I_{2y})m_2/2I_z]^{1/2}\sin\varkappa$$

sn $[\tau+F(\varphi_0^*,\ k_0)]$ – синус амплитуды $[\tau+F(\varphi_0^*,\ k_0)]$, τ – безразмерное время. Выражение (12), полученное без предположения о малости угла поворота кольца подвеса, характеризует движение двухстепенного гироскопа, установленного на равномерно вращающемся основании так, что между осью поворота неуравновешенного кольца подвеса и осью вращения основания имеется произвольный угол при любых начальных условиях и для любого промежутка времени.

Для иллюстрации движения главной оси гироскопа на фазовой плоскости $(\alpha, \alpha^\cdot)$ необходимо при помощи интеграла (3) исключить переменную $\varphi^\cdot$ из интеграла Якоби – Пенлеве (1). В этом случае имеем следующую зависимость обобщенной скорости $\alpha^\cdot$ от угла поворота кольца подвеса:

$$\alpha^\cdot=\Omega[I_z^{-1}(I_x-I_{2y})(\sin\alpha-A_1)(A_2-\sin\alpha)]^{1/2}\sin\varkappa \tag{13}$$

Для реальных условий работы гироскопа на вращающемся основании угловая скорость Ω значительно меньше скорости собственного вращения ротора $\varphi^\cdot$, и всегда имеет место следующее неравенство:

$$|2(h_2\Omega-Pl)\sin\alpha_0\sin\varkappa|\gg I_z\alpha_0^{\cdot 2}+(I_x-I_{2y})\Omega^2\sin^2\varkappa\sin^2\alpha_0 \tag{14}$$

Тогда соотношения (6) для A_1 и A_2 с учетом (14) принимают вид

$$A_1\approx\sin\alpha_0,\quad A_2\approx[2(h_2\Omega-Pl)]/[(I_x-I_{2y})\Omega^2\sin\varkappa] \tag{15}$$

подставляя которые в (13), будем иметь

$$\alpha^\cdot=q(\sin\alpha-\sin\alpha_0)^{1/2},\quad q=[2I_z^{-1}(h_2\Omega-Pl)\sin\varkappa]^{1/2} \tag{16}$$

По формуле (16) для определенных начальных условий могут быть построены фазовые траектории, образующие континуум концентрических кривых и соответствующие одномерным периодическим движениям гироскопа вокруг особой точки типа «центр» с координатами $(^1/_2\pi,\ 0)$. Полагая в (12) $\alpha={}^1/_2\pi+\alpha_1$, с учетом (6), (7), (9) запишем выражение, характеризующее малые колебания кольца гироскопа вокруг рассматриваемого положения равновесия, совпадающего с проекцией вектора собственного вращения основания на плоскость, перпендикулярную к оси поворота кольца подвеса

$$\alpha_1=(\alpha_{01}^2+\alpha_{01}^{\cdot 2}\omega_0^{-2})^{1/2}\sin\left[\omega_0(t-t_0)+\arcsin\frac{\alpha_{01}}{(\alpha_{01}^2+\alpha_{01}^{\cdot 2}\omega_0^{-2})^{1/2}}\right] \tag{17}$$

$$\alpha_{01}=\alpha_0-{}^1/_2\pi,\quad \omega_0^2=[(h_2\Omega-Pl)\sin\varkappa-(I_{2y}-I_x)\Omega^2\sin^2\varkappa]I_z^{-1}$$

Отсюда видно, что частота собственных колебаний подвижной части двухстепенного гироскопа ω_0 определяется моментом статической неуравновешенности кольца подвеса, а также псевдоупругими членами, возникающими при вращении основания, и зависит от произвольного угла $\varkappa$ между осью поворота кольца и осью вращения основания. Для случая $\varkappa={}^1/_2\pi$ формулы (17) совпадают с решением дифференциального уравнения, характеризующего собственное движение двухстепенного гироскопа, приведенное в работе [4].

Поступила 16 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
2. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1977.
3. *Климов Д. М., Степаненко Н. П.* Об интегрировании уравнений движения гироскопа в кардановом подвесе. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
4. *Ильчанинов В. П., Терешин В. Г.* О динамике неуравновешенного двухстепенного гироскопа на вращающемся основании. В сб.: Электроника и автоматика, вып. 1. Тр. Уфимск. авиац. ин-та, 1976.