

УПРАВЛЕНИЕ ПРЫГАЮЩИМ АППАРАТОМ. II.
 СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

В. Б. ЛАРИН

(Киев)

Рассматривается задача синтеза системы стабилизации прыгающего аппарата. Приводятся результаты численного моделирования. Работа является непосредственным продолжением [1].

1. Стабилизация поступательного движения прыгающего аппарата. Исследуем задачу стабилизации установившегося (периодического) движения аппарата¹, рассмотренного в [1]. Пусть масса аппарата должна двигаться по периодической (по координате x) траектории, определяемой на фазе опирания параметрами v, l, h, z' [1]. На фактической траектории имеют место малые отклонения: $z_- = h + \varepsilon_-$, $z_+ = h + \varepsilon_+$, $z'_- = -z' + \delta_-$, $z'_+ = z' + \delta_+$, $v_- = v + \Delta v_-$, $v_+ = v + \Delta v_+$.

Будем предполагать, как и в задаче п. 1 [1], что соответствующим выбором x_+, x_-, φ можно управлять величинами $\varepsilon_+, \delta_+, \Delta v_+$. Здесь, однако, следует отметить, что кажущаяся на первый взгляд целесообразной стратегия, состоящая в обращении в нуль $\varepsilon_+, \delta_+, \Delta v_+$ путем выбора, согласно (1.7)–(1.9) [1] x_+, x_-, φ , может оказаться неприемлемой (даже в случае существования такого решения) ввиду конечного отклонения параметров x_+, x_-, φ от их программных значений при малых отклонениях $\delta_-, \Delta v_-, \varepsilon_-$. Действительно, согласно (1.8) [1], при $\Delta v_+ = \varepsilon_+ = \delta_+ = 0$:

$$x_+ - x_- = -\varepsilon_- (2v + \Delta v_-) (\delta_- v - z' \Delta v_- + \Delta v_- \delta_-)^{-1}$$

и, следовательно, эта величина может как угодно отличаться от своего программного значения $2l$ при достаточно малых $\Delta v_-, \varepsilon_-, \delta_-$. Другой путь решения задачи стабилизации состоит в линеаризации соотношений, связывающих малые отклонения как управляемых, так и управляющих параметров и последующем использовании процедур синтеза линейного регулятора. Определим линейные соотношения, связывающие отклонения $\varepsilon_+, \varepsilon_-, \Delta v_+, \Delta v_-, \delta_+, \delta_-$ и управляющие воздействия $\Delta \varphi, \Delta x_+, \Delta x_-$, считая все эти величины малыми.

Линеаризация уравнений (1.7), (1.8) [1] относительно программного движения приводит к следующим линейным (с точностью до малых второго порядка) соотношениям:

$$(\varphi l / v) (\Delta x_+ + \Delta x_-) = \Delta v_+ - \Delta v_- \quad (1.1)$$

$$l(\delta_+ + \delta_-) - \varepsilon_+ + \varepsilon_- + (z' l / v) (\Delta v_+ - \Delta v_-) = 0 \quad (1.2)$$

Для получения третьего соотношения удобно линеаризовать не (1.9) [1], а следующее равенство:

$$z_+' + z_-' = 2C_1 + C_2 \varphi (x_+ / v_+ + x_- / v_-)$$

¹ Используемые здесь обозначения соответствуют принятым в [1].

Согласно (1.5) и (2.1) [1], при программном значении параметров константа $C_2 = (h - g/\varphi)/v = z'/v(\varphi l)$. Как отмечалось при выводе формулы (2.1) [1] в рассматриваемом случае, константа $C_1 = 0$. Таким образом, имеем

$$\delta_+ + \delta_- = 2 \left[\frac{\partial C_1}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial C_1}{\partial z'} \delta_- + \frac{\partial C_1}{\partial x_-} \Delta x_- + \frac{\partial C_1}{\partial v_-} \Delta v_- + \frac{\partial C_1}{\partial z_-} \varepsilon_- \right] + \\ + \frac{z'}{l} \left[\Delta x_+ + \Delta x_- + \frac{l}{v} (\Delta v_- - \Delta v_+) \right]$$

Частные производные от C_1 выглядят так:

$$\frac{\partial C_1}{\partial \varphi} = \frac{hl}{v^2 - \varphi l^2}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial z'} = \frac{v^2}{v^2 - \varphi l^2}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial x_-} = \frac{g - h\varphi}{v^2 - \varphi l^2} \\ \frac{\partial C_1}{\partial z_-} = \frac{\varphi l}{v^2 - \varphi l^2}, \quad \frac{\partial C_1}{\partial v_-} = -\frac{2vz'}{v^2 - \varphi l^2}$$

Исключив с помощью (1.2) из последнего соотношения $\delta_+ + \delta_-$, можно записать следующие уравнения, связывающие параметры движения в начале и конце фазы опирания:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_+ \\ \delta_+ \\ \Delta v_+ \end{pmatrix} = \Psi_- \begin{pmatrix} \varepsilon_- \\ \delta_- \\ \Delta v_- \end{pmatrix} + \Gamma_- \begin{pmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta x_+ \\ \Delta x_- \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

В этом уравнении Ψ_- и Γ_- обозначают следующие матрицы:

$$\Gamma_- = \begin{pmatrix} \frac{2hl^2}{v^2 - \varphi l^2} & z & -z' \frac{v^2 + \varphi l^2}{v^2 - \varphi l^2} \\ \frac{2hl}{v^2 - \varphi l^2} & \frac{z'}{v^2 l} (v^2 - \varphi l^2) & \left[\frac{z'}{v^2 l} (v^2 - \varphi l^2) + \frac{2\partial C_1}{\partial x_-} \right] \\ 0 & \frac{\varphi l}{v} & \frac{\varphi l}{v} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$\Psi_- = \frac{1}{v^2 - \varphi l^2} \begin{pmatrix} v^2 + \varphi l^2 & 2lv^2 & -4\varphi lvz' \\ 2\varphi l & \varphi l^2 + v^2 & -4\varphi vz' \\ 0 & 0 & v^2 - \varphi l^2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Собственные числа $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ матрицы Ψ_- все действительные:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{v + l\sqrt{\varphi}}{v - l\sqrt{\varphi}} > 1, \quad \lambda_3 = \frac{v - l\sqrt{\varphi}}{v + l\sqrt{\varphi}} < 1$$

и не зависят от h . Вырожденность матрицы Γ_- объясняет отмеченную выше невозможность в линейном приближении полной компенсации на фазе опирания отклонений ε_+ , δ_+ , Δv_+ .

Для того чтобы описать изменение величин ε , δ , Δv , происходящее за один шаг, систему (1.3) следует дополнить соотношениями, описывающими изменение этих величин на фазе свободного полета. Имевшее место в конце фазы опирания k -го шага отклонение от программного значения горизонтальной скорости $\Delta v_+(k)$ будет равно этой же величине к началу фазы опирания следующего $(k+1)$ -го шага $\Delta v_-(k+1) = \Delta v_+(k)$.

Рассмотрим изменение поправки $\varepsilon_+(k)$. При отсутствии фазы прыжка как результат непрерывности траектории $\varepsilon_+(k) = \varepsilon_-(k+1)$. Если же движение происходит с прыжками, то предположим, что $\varepsilon_-(k+1)$ может отличаться от $\varepsilon_+(k)$ на некоторую величину p , которую будем рассматривать как управляющее воздействие.¹ $\varepsilon_-(k+1) = \varepsilon_+(k) + p$.

¹ Разумеется, при передвижениях, когда фаза прыжка почти отсутствует, величина p должна быть достаточно малой. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться ниже.

Последнее уравнение, связывающее $\delta_+(k)$ и $\delta_-(k+1)$, получим, линеаризовав соотношение, описывающее сохранение энергии на участке свободного полета

$$[(z'_+)^2 v_+^2 + 2gz_+]_k = [(z'_-)^2 v_-^2 + 2gz_-]_{k+1}$$

В результате линеаризации имеем

$$g\varepsilon_-(k+1) - v^2 z' \delta_-(k+1) = v^2 z' \delta_+(k) + g\varepsilon_+(k)$$

или

$$-\delta_-(k+1) = \delta_+(k) + gp/(v^2 z') \quad (1.6)$$

Если ввести векторы поправок к программным значениям фазовых координат

$$\eta_-(k) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_-(k) \\ \delta_-(k) \\ \Delta v_-(k) \end{Bmatrix}, \quad \eta_+(k) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_+(k) \\ \delta_+(k) \\ \Delta v_+(k) \end{Bmatrix}$$

то уравнения, описывающие процесс стабилизации программной траектории на k -м шаге, можно записать так:

$$\eta_+(k) = \Psi_- \eta_-(k) + \Gamma_- \xi_-(k), \quad \eta_-(k) = \Psi_+ \eta_+(k) + \Gamma_+ \xi_+(k) \quad (1.7)$$

Матрицы Ψ_- , Γ_- определяются (1.4), (1.5), а матрицы

$$\Gamma_+ = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g/(v^2 z') \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \Psi_+ = \text{diag}\{1, -1, 1\} \quad (1.8)$$

Векторы управляющих воздействий $\xi_+(k)$, $\xi_-(k)$ имеют следующие компоненты:

$$\xi_-(k) = \begin{Bmatrix} \Delta\varphi(k) \\ \Delta x_+(k) \\ \Delta x_-(k) \end{Bmatrix}, \quad \xi_+(k) = \begin{Bmatrix} \gamma_1(k) \\ \gamma_2(k) \\ p(k) \end{Bmatrix}$$

Отметим, что значение компонент $\gamma_1(k)$, $\gamma_2(k)$ несущественно ввиду структуры матрицы Γ_+ .

Таким образом, система (1.7) описывает в линейном приближении прыгающий аппарат как объект управления. Периодичность структуры этой системы (матрицы Ψ_+ , Ψ_- , Γ_+ , Γ_- не зависят от k) говорит о том, что для решения задачи синтеза системы стабилизации прыгающего аппарата можно использовать методы оптимизации периодических систем. Следует иметь в виду, что в данном случае среди собственных чисел матрицы, связывающей при отсутствии управления ($\xi_+(k) = \xi_-(k) = 0$) векторы $\eta_-(k)$ и $\eta_-(k+1)$ (матрицы Ψ_+ , Ψ_-), есть собственное число, равное единице ($\lambda_1 = 1$). Поэтому для данного аппарата задачу синтеза системы стабилизации нельзя формулировать, не накладывая ограничения на фазовые координаты⁴, а используя более общую постановку, приведенную в п. 1 [2].

Отметим, что уравнение (1.6) получено в предположении малости как $\delta_-(k+1)$, так и $\delta_+(k)$, т. е. малости члена $gp/(v^2 z')$. Поэтому, когда программное движение практически не содержит фазы прыжка ($z' \simeq 0$), управляющее воздействие p должно быть достаточно малым ($p \sim z'$), если задачу стабилизации предполагается рассматривать в линейной постановке.

Если передвижение происходит без прыжков ($z' = 0$, $\varphi = g/h$), то $\partial C_1 / \partial v_- = \partial C_1 / \partial x_- = 0$ и матрицы Ψ_- и Γ_- имеют блочно-диагональную структуру, что вместе с условием $p(k) = 0$ указывает на независимость в

⁴ См. Ларин В. Б. Стабилизация горизонтального движения двуногого шагающего аппарата. Киев, Ин-т математики АН УССР, 1977, препринт № 77.4, § 2, стр. 45.

первом приближении задачи синтеза системы вертикальной стабилизации (управление ϵ и δ путем изменения усилия в ноге $\Delta\phi$) и задачи стабилизации горизонтального движения (управление поправкой Δv_+ путем изменения параметров шага Δx_+ и Δx_-).

2. Стабилизация бокового движения. Как будет показано ниже, в случае малых отклонений от заданной плоскости основного (программного) движения задача синтеза системы боковой стабилизации может быть рассмотрена независимо от исследованной в п. 1 задачи стабилизации основного движения.

Запишем уравнения бокового движения аппарата. Предположим, что точка опоры ноги имеет координаты $(0, y_0, 0)$. Сохраняя сделанное в п. 1 [1] предположение о том, что сила F направлена вдоль опорной ноги, дополним систему (1.1) [1] уравнениями, описывающими движение вдоль оси y (которая перпендикулярна плоскости программного движения) ¹

$$y' = r, \quad r' = \varphi(y - y_0) \quad (2.1)$$

Совершая переход от переменной t к переменной x , перепишем систему (2.1) в виде, аналогичном первым двум уравнениям системы (1.2) [1]:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r}{v}, \quad r' = \frac{dr}{dx} = \frac{\varphi y - \varphi y_0}{v} \quad (2.2)$$

Общее решение этой системы определяется соотношениями, аналогичными (1.5), (1.6) [1]:

$$y = y_0 + K_1 x + K_2 v \quad (2.3)$$

$$K_1 = \frac{y' - v_1^2 - \varphi x_- (y - y_0)}{v_-^2 - \varphi x_-^2} \quad K_2 = \frac{(y_- - y_0 - y_-' x_-) v_-}{v_-^2 - \varphi x_-^2}$$

Здесь, как и далее, индексы «плюс» и «минус» имеют такой же смысл, как и в [1], т. е. определяют параметры в начале и в конце фазы опирания.

Предположим, что стабилизация аппарата по оси y осуществляется путем выбора координаты y_0 . Сохраняя сделанное ранее предположение о малости таких величин, как Δv_+ , Δv_- , $\Delta\phi$, и, кроме того, считая малыми величинами y , y' и y_0 , воспользовавшись соотношениями (2.3), запишем линейные соотношения, связывающие параметры бокового движения в начале и в конце фазы опирания,

$$\begin{aligned} y_+ &= \frac{v^2 + \varphi l^2}{v^2 - \varphi l^2} y_- + 2 \frac{v^2 l}{v^2 - \varphi l^2} y_-' - \frac{2\varphi l^2}{v^2 - \varphi l^2} y_0 \\ y_+' &= \frac{2\varphi l}{v^2 - \varphi l^2} y_- + \frac{v^2 + \varphi l^2}{v^2 - \varphi l^2} y_-' - \frac{2\varphi l}{v^2 - \varphi l^2} y_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, на фазе опирания k -го шага аппарат, как объект стабилизации, описывается соотношениями (2.4), которые перепишем так:

$$\begin{aligned} w_+(k) &= \Phi_- w_-(k) + G y_0(k) \\ w_{\pm}(k) &= \begin{Bmatrix} y_{\pm}(k) \\ y_{\pm}'(k) \end{Bmatrix}, \quad G = \frac{2\varphi l}{2l^2 - v^2} \begin{Bmatrix} l \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \Phi_- &= \frac{1}{v^2 - \varphi l^2} \begin{Bmatrix} v^2 + \varphi l^2 & 2v^2 l \\ 2\varphi l & v^2 + \varphi l^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $y_0(k)$ — координата точки опоры ноги на k -м шаге. Во время безопорного движения аппарата координаты y и y' преобразуются следующим

¹ Этой системе уравнений соответствует второе уравнение в (1.1) [3].

образом:

$$y_-(k+1) = y_+(k) + y_+'(k)\tau, \quad y_-'(k+1) = y_+'(k)$$

В этих соотношениях τ — время свободного полета, $y_+'(k)$ — скорость аппарата вдоль оси y к концу фазы опирания k -го шага. С точностью до малых более высокого порядка (еще раз отметим, что отклонения от программной траектории считаются малыми) имеем $\tau = 2L/v$, $y_+'(k) = y_+'(k)v$, где $2L$ — перемещение аппарата за время свободного полета.

Поэтому

$$w_-(k+1) = \Phi_+ w_+(k), \quad \Phi_+ = \begin{vmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Отметим, что уравнения (2.5), (2.6), описывающие изменения боковых отклонений аппарата от плоскости программного движения не связаны с системой (1.7); таким образом показано, что в первом приближении задача стабилизации основного движения и задача боковой стабилизации могут рассматриваться независимо.

Согласно (2.5), (2.6), изменение вектора $w_-(k)$ при изменении номера шага k можно записать в виде одного уравнения

$$w_-(k+1) = \Phi_+ \Phi_- w_-(k) + \Phi_+ G y_0(k) \quad (2.7)$$

Задача синтеза системы стабилизации для объекта, который описывается этим уравнением, довольно проста, и поэтому подробно останавливаться на ее решении не будем. Отметим, в частности, что, так как характеристический полином матрицы $\Phi_+ \Phi_-$

$$\det \|\Phi_+ \Phi_- - \lambda E\| = \lambda^2 - 2 \left(\frac{v^2 + 2\phi l L}{v^2 - \phi l^2} \right) \lambda + 1$$

не имеет собственных чисел, модули которых равны единице, то в данном случае возможна рассмотренная в п. 4 [3] постановка задачи стабилизации бокового движения минимальными управляющими воздействиями.

3. Пример синтеза системы стабилизации прыгающего аппарата. Соотношения, полученные в этой работе, конкретизируем на числовом примере синтеза системы стабилизации движения вдоль оси x , рассмотренной в [1] модели прыгающего аппарата. Начнем с выбора параметров программной траектории. Выбор этих параметров будем производить при следующих данных. Вертикальная координата массы m и горизонтальная составляющая скорости в начале фазы опирания принимаются следующими: $h = 1$ м, $v = 5$ м/с. Воспользовавшись неравенством (2.3) [1], получим границу для допустимой протяженности фазы опирания $l^2 \leq v^2 h / g = 2.56$ м², т. е. $l \leq 1.6$ м. В дальнейших расчетах принимаем $l = 0.4$ м.

Пусть расстояние, на которое перемещается масса m во время свободного полета (прыжка), в 2 раза превосходит соответствующее расстояние на фазе опирания, т. е. принимаем $L/l = 2$. Таким образом, за один шаг (фаза опирания и фаза прыжка) аппарат перемещается на расстояние $2(L+l) = 2.4$ м. Согласно (3.2) [1], для выбранного значения L/l имеем $\phi = g/h(1+L/l) = 3g/h = 29.4$ с⁻².

Так как усилие, прикладываемое к массе аппарата, пропорционально длине ноги, то в период фазы опирания максимальная величина силы, прикладываемой к единице массы (перегрузка), будет равна $w = [(\phi l)^2 + (\phi h)^2]^{1/2} \approx 3g$.

Далее, воспользовавшись (2.1) [1], найдем $z' = -z_-' = (\phi - g/h)hl/v^2 = 2gl/v^2 = 0.31$.

Заканчивая определение траекторных параметров, вычислим максимальную H и минимальную z_0 высоту траекторий массы m (на фигуре размерность по осям в м): $H = h + u^2/(2g) = h + (z'v)^2/(2g) = 1.127$ м.

Проделив необходимые вычисления, найдем, согласно (2.2) [1], что $z_0^\circ = z_0/h$ удовлетворяет следующему уравнению: $(z_0^\circ)^2 - 2/3 z_0^\circ - 1/4 = 0$.

Интересующий нас корень этого уравнения ($z_0^\circ > 0$) $z_0^\circ = 0.935$, т. е. $z_0 = 0.935$ м. Приведенные выше характеристики траектории программного движения достаточны для вычисления исходных данных задачи стабилизации.

Согласно (1.4), (1.5), (1.8), найдем значения матриц $\psi_-, \Gamma_-, \Gamma_+$:

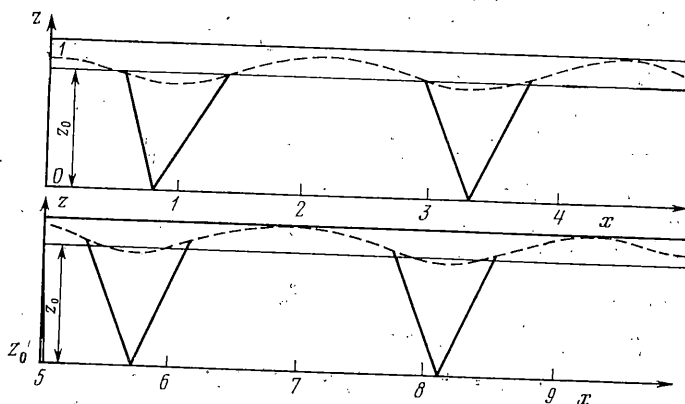
$$\psi_- = \begin{vmatrix} 1.46 & 0.985 & -0.122 \\ 1.16 & 1.46 & -0.306 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

$$\Gamma_- = \begin{vmatrix} 1.57 \cdot 10^{-2} & 0.31 & -0.45 \\ 3.95 \cdot 10 & 0.63 & -1.29 \\ 0 & 2.37 & 2.37 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1.26 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Критерий качества принимаем в виде

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_+'(k) Q_+(k) \eta_+(k) + \eta_-'(k) Q_-(k) \eta_-(k) + \xi_+'(k) B_+(k) \xi_+(k) + \xi_-'(k) B_-(k) \xi_-(k)) \quad (3.2)$$

Здесь матрицы $Q_{\pm}'(k) = Q_{\pm}(k) \geq 0$, $B_{\pm}'(k) = B_{\pm}(k) > 0$.



Для решения задачи синтеза системы управления объектом, движение которого описывается конечно-разностными уравнениями (1.7), необходимо, как отмечено в п. 1, использовать алгоритм, который приведен в [2].

Ввиду различия обозначений, принятых в [2] и в п. 1 данной работы, для использования в этом примере результатов [2] требуется установить необходимое соответствие между обозначениями. Сравнивая систему (1.7) и (1.1) [2], найдем

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \psi_-, & \psi(2) &= \psi_+ = \text{diag} \{1, -1, 1\}, & \psi(3) &= \psi_-, & \psi(4) &= \psi_+, \dots \\ \Gamma(1) &= \Gamma_-, & \Gamma(2) &= \Gamma_+, & \Gamma(3) &= \Gamma_-, & \Gamma(4) &= \Gamma_+, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$x(1) = \eta_-(1), \quad x(2) = \eta_+(1), \quad x(3) = \eta_-(2), \quad x(4) = \eta_+(2), \dots$$

$$u(1) = \xi_-(1), \quad u(2) = \xi_+(1), \quad u(3) = \xi_-(2), \quad u(4) = \xi_+(2), \dots$$

Система (1.7) имеет период 2. Соответственно будем считать, что матрицы, входящие в критерий (3.2), имеют тоже период 2. Поэтому для

¹ Как отмечено в п. 1, матрица $\psi_+ = \text{diag} \{1, -1, 1\}$ не зависит от исходных данных задачи.

конкретизации критерия (3.2) необходимо задать следующие четыре матрицы:

$$Q_-(k) = Q_- = Q_1 = Q_3 = Q_{2n-1}, \quad Q_+(k) = Q_+ = Q_2 = Q_4 = Q_{2n}$$

$$B_-(k) = B_- = B_1 = B_3 = B_{2n-1}, \quad B_+(k) = B_+ = B_2 = B_4 = B_{2n}$$

(n=1, 2, ...)

Согласно (1.3) [2], искомый алгоритм стабилизации (в обозначениях (1.7)) имеет вид [2]

$$\xi_-(k) = -[\Gamma_- 'S(2)\Gamma_- + B_-]^{-1}\Gamma_- 'S(2)\psi_-\eta_-(k) \quad (3.4)$$

$$\xi_+(k) = -[\Gamma_+ 'S(1)\Gamma_+ + B_+]^{-1}\Gamma_+ 'S(1)\psi_+\eta_+(k)$$

Входящие в эти соотношения матрицы $S(1)$ и $S(2)$ определяются, согласно [2], так. Матрица $S(2)$ находится, как решение уравнения

$$S(2) = \Phi_2(2) \{S(2) - S(2)H_2(2)[H_2'(2)S(2)H_2(2) - N_2^{-1}]^{-1}H_2(2)S(2)\} \Phi_2'(2) - R_2(2) \quad (3.5)$$

которое является конкретизацией соответствующего уравнения п. 1 [2] при $i=p=2$. После нахождения этой матрицы матрица $S(1)$ определяется по формуле (1.4) [2]. С учетом соответствия (3.3)

$$S(1) = \psi_- '[S(2) - S(2)\Gamma_- (B_- + \Gamma_- 'S(2)\Gamma_-)^{-1}\Gamma_- 'S(2)]\psi_- + Q_- \quad (3.6)$$

Согласно приведенным в п. 1 [2] рекуррентным соотношениям, матрицы, фигурирующие в (3.5), определяются по формулам

$$\Phi_2(1) = \Phi_2(0) (E - Q(2)U_2(0))^{-1}\psi'(1)$$

$$U_2(1) = \psi(1)U_2(0) (E - Q(2)U_2(0))^{-1}\psi'(1) - \Gamma(1)B^{-1}(1)\Gamma'(1)$$

$$R_2(1) = R_2(0) - \Phi_2(0) (E - Q(2)U_2(0))^{-1}Q(2) (\Phi_2(0))'$$

Так как $\Phi_2(0) = E$, $U_2(0) = 0$, $R_2(0) = 0$, то $\Phi_2(1) = \psi'(1)$, $U_2(1) = -\Gamma(1)B^{-1}(1)\Gamma'(1)$, $R_2(1) = -Q(2)$.

Далее будем иметь

$$\Phi_2(2) = \psi'(1) (E + Q(1)\Gamma(1)B^{-1}(1)\Gamma'(1))^{-1}\psi'(2)$$

$$U_2(2) = \psi(2)\Gamma(1)B^{-1}(1)\Gamma'(1) (E + Q(1)\Gamma(1)B^{-1}(1)\Gamma'(1))^{-1}\psi'(2) - \Gamma(2)B^{-1}(2)\Gamma'(2)$$

$$R_2(2) = -Q(2) - \psi'(1) (E + Q(1)\Gamma(1)B^{-1}(1)\Gamma'(1))^{-1}Q(1)\psi(1)$$

В обозначениях (1.7) эти соотношения можно переписать следующим образом:

$$\Phi_2(2) = \psi_- '(E + Q_- \Gamma_- B_-^{-1} \Gamma_- ') \psi_+$$

$$U_2(2) = -\psi_+ \Gamma_- B_-^{-1} \Gamma_- '(E + Q_- \Gamma_- B_-^{-1} \Gamma_- ')^{-1} \psi_- - \Gamma_+ B_+^{-1} \Gamma_+ ' \quad (3.7)$$

$$R_2(2) = -Q_+ - \psi_- '(E + Q_- \Gamma_- B_-^{-1} \Gamma_- ')^{-1} Q_- \psi_-$$

Кроме того, входящие в (3.5) матрицы $H_2(2)$, $N_2(2)$ определяются как результат факторизации матрицы $U_2(2)$:

$$U_2(2) = H_2(2)N_2(2)(H_2(2))' \quad (3.8)$$

причем в данном случае можно принять $N_2(2) = -E$. Таким образом, соотношения (3.5)–(3.8) полностью определяют искомый алгоритм (соотношения (3.4)) системы продольной стабилизации прыгающего аппарата, если заданы четыре матрицы B_+ , B_- , Q_+ , Q_- .

Приведем результаты вычислений параметров системы стабилизации. В данном примере матрицы Q_+ , Q_- , B_+ , B_- были выбраны такими: $Q_+ = -Q_- = \text{diag}\{1, 2.5, 0.1\}$, $B_+ = \text{diag}\{1, 1, 10\}$, $B_- = \text{diag}\{0.01, 1, 1\}$.

Матрицы $S(1)$ и $S(2)$, согласно (3.5) и (3.6), имеют вид:

$$S(1) = \begin{vmatrix} 5.39 & 2.419 & -0.224 \\ 2.419 & 4.177 & -0.182 \\ -0.224 & -0.182 & 0.189 \end{vmatrix}, \quad S(2) = \begin{vmatrix} 3.858 & -0.113 & -0.0884 \\ 0.113 & 4.578 & 0.0578 \\ -0.0884 & 0.0578 & 0.281 \end{vmatrix}$$

Матрицы, определяющие в соответствии с (3.6) алгоритм стабилизации, таковы

$$-[\Gamma_- S(2) \Gamma_- + B_-]^{-1} \Gamma_- S(2) \psi_- = \begin{vmatrix} -2.554 & -2.782 & 0.362 \\ -0.565 & -0.621 & -0.0789 \\ 0.665 & 0.726 & -0.225 \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

$$-[\Gamma_+ S(1) \Gamma_+ + B_+]^{-1} \Gamma_+ S(1) \psi_+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0.273 & 0.0161 \end{vmatrix}$$

При таком алгоритме стабилизации матрица $(E - U_2(2)S(2))^{-1} \Phi_2'(2)$, которая описывает изменение вектора $\eta_+(k)$ в замкнутой системе (1.7), (3.4), имеет следующие собственные значения: $\mu_1 = 0.505$, $\mu_2 = 0.225$, $\mu_3 = -0.0657$, которые характеризуют в линейном приближении затухание переходного процесса в замкнутой системе «объект — регулятор».

Таблица 1

	$\eta_+(0)$	$\eta_-(1)$	$\eta_+(1)$	$\eta_-(2)$	$\eta_+(2)$	$\eta_-(3)$	$\eta_+(3)$	$\eta_-(4)$	$\eta_+(4)$	$\eta_-(5)$	$\eta_+(5)$	
ε	1	0.0	-0.085	-0.055	-0.033	-0.025	-0.014	-0.0092	-0.0036	-0.0014	0.0015	0.0026
	2	0.0	-0.1	-0.076	-0.045	-0.35	-0.021	-0.014	-0.007	-0.004	-0.00024	0.0000
	3	-0.05	-0.014	-0.1	-0.067	-0.048	-0.03	-0.021	-0.012	-0.0075	-0.0025	-0.00055
δ	1	-0.31	0.052	0.020	0.0067	0.013	0.0048	0.011	-0.0037	-0.0091	-0.0055	0.0082
	2	-0.31	-0.042	0.037	0.0015	0.016	0.0021	0.012	-0.028	-0.0097	-0.005	0.002
	3	-0.31	-0.014	0.029	0.019	0.018	0.0061	0.013	-0.00094	0.01	-0.0042	0.0089
Δv	1	0.0	0.0	-0.0074	-0.0074	-0.0077	-0.0077	-0.0048	-0.0048	-0.0028	-0.0028	-0.0016
	2	-1.0	-1.0	-0.148	-0.148	-0.036	-0.036	-0.012	-0.012	-0.0047	-0.0047	0.0000
	3	-1.0	-1.0	-0.143	-0.143	-0.036	-0.036	-0.013	-0.013	-0.0055	-0.0055	-0.0028

Таблица 2

	$\xi_-(1)$	$\xi_-(2)$	$\xi_-(3)$	$\xi_-(4)$	$\xi_-(5)$	
$\Delta \varphi$	1	0.07111	0.062	0.031	0.018	0.011
	2	0.0111	0.057	0.034	0.021	0.013
	3	0.025	0.065	0.046	0.028	0.016
Δx_+	1	0.015	0.015	0.0081	0.0047	0.0028
	2	0.16	0.036	0.013	0.0068	0.0036
	3	0.16	0.037	0.016	0.0081	0.0045
Δx_-	1	-0.018	-0.015	-0.0069	-0.0039	-0.0023
	2	0.16	0.0087	-0.003	0.0337	-0.0026
	3	0.15	0.0059	-0.0063	-0.0052	-0.0033

Таблица 3

	$\xi_+(0)$	$\xi_+(1)$	$\xi_+(2)$	$\xi_+(3)$	$\xi_+(4)$	$\xi_+(5)$	
p	1	-0.085	0.022	0.011	0.0056	0.0028	0.0014
	2	-0.1	0.03	0.014	0.0074	0.0038	0.0018
	3	-0.086	0.037	0.019	0.0098	0.005	0.0026

В табл. 1—3 приведены результаты численного моделирования работы синтезированной системы стабилизации с объектом, движение которого описывается не линеаризованной системой (1.7), а исходным уравнением (1.3)¹ [1] для трех вариантов начальных рассогласований:

$$\eta_+^1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.31 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_+^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.31 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_+^3(0) = \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.31 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Во всех случаях система из режима горизонтального движения массы переходила на режим движения, траекторные параметры которого были определены в начале п. 3. Таким образом, в первом варианте рассогласование обусловлено только отсутствием вертикальной составляющей скорости массы, во втором — к этому добавляется рассогласование по величине горизонтальной скорости (скорость массы m равна 4 м/с вместо программного значения 5 м/с). Кроме этих рассогласований в третьем варианте предполагалось, что в начальный момент рассогласование по вертикали равно 5 см (система начинает прыгать на площадке, которая возвышается на 5 см над прежним уровнем).

На фигуре изображена траектория массы аппарата в процессе отработки системой стабилизации возмущения $\eta_+^2(0)$. Сплошными линиями показаны положения опорной ноги в моменты начала и конца фазы опирания.

Поступила 26 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. Ларин В. Б. Управление прыгающим аппаратом. I. Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6.
2. Ларин В. Б. Оптимизация периодических систем. Докл. АН СССР, 1978, т. 239, № 1.
3. Ларин В. Б. Стабилизация двуногого шагающего аппарата. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 5.

¹ На фазе свободного полета в этом уравнении $\varphi=0$, и эта фаза k -го шага продолжается до тех пор, пока координата массы z не будет равной $h+p(k)$. Протяженность фазы опирания и значение коэффициента $\varphi(k)$: полностью характеризуется программными значениями $\varphi=29.4 \text{ с}^{-2}$, $l=0.4 \text{ м}$ и элементами вектора $\xi_-(k)$: $x_-(k) = -l + \Delta x_-(k)$, $x_+(k) = l + \Delta x_+(k)$, $\varphi(k) = \varphi + \Delta\varphi(k)$.