

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИИ РОТОРА ДВИГАТЕЛЯ НА СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ УХОД ТРЕХОСНОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО СТАБИЛИЗАТОРА

А. А. АЛЬДЯКОВ, В. И. БОРЗОВ

(Москва)

Исследованию систематических уходов трехосного гироскопического стабилизатора посвящено большое число работ. Подробная библиография имеется в [1]. Во многих работах считаются заданными либо колебания колец карданова подвеса гиросtabilизатора, либо моменты внешних сил, действующих на гироскопический стабилизатор. В данной работе заданными считаются колебания основания. Наличие двигателей стабилизации, связанных со стабилизируемыми телами посредством редукторов, при колебаниях основания приводит к возмущающим воздействиям [1]. При периодических колебаниях основания найдена скорость систематического ухода трехосного гироскопического стабилизатора. Исследование проводится методом последовательных приближений. Учитываются вредные моменты сил по осям стабилизации, вызванные инерционностью роторов двигателей стабилизации.

1. Рассмотрим трехосный гироскопический стабилизатор, кинематическая схема которого представлена на фиг. 1. Все тела, входящие в рассматриваемую механическую систему, будем считать абсолютно твердыми. С основанием, на котором установлен гироскопический стабилизатор, свяжем систему координат $\xi\eta\zeta$. С внешним кольцом стабилизатора свяжем систему координат $x_2y_2z_2$, с внутренним — $x_1y_1z_1$, с гиросtabilизированной платформой — $x_3y_3z_3$. Будем предполагать, что начала всех введенных систем координат находятся в одной точке.

Переход от одной системы координат к другой характеризуется следующей схемой:

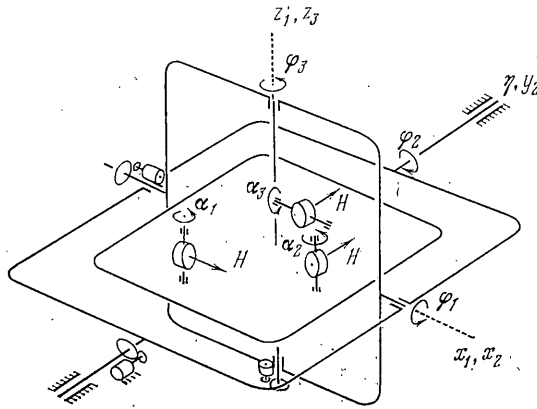
$$\xi\eta\zeta \xrightarrow[\eta, y_2]{\varphi_2} x_2y_2z_2 \xrightarrow[x_2, x_1]{\varphi_1} x_1y_1z_1 \xrightarrow[z_1, z_2]{\varphi_3} x_3y_3z_3$$

Здесь над стрелкой указан угол поворота, а под стрелкой — ось, вокруг которой поворот совершается. На гиросtabilизированной платформе установлены три гироблока. С кожухами гироблоков связаны системы координат $x_iy_iz_i$ ($i=4, 5, 6$). Собственные кинетические моменты роторов гироблоков будем считать постоянными и равными H . Оси x_i, y_i, z_i направим по соответствующим осям вращения роторов гироблоков. Взаимное расположение систем координат $x_3y_3z_3$ и $x_iy_iz_i$ ($i=4, 5, 6$) определяется схемой

$$x_3y_3z_3 \xrightarrow[z_3, z_4]{\alpha_1} x_4y_4z_4, \quad x_3y_3z_3 \xrightarrow[z_3, z_5]{\alpha_2} x_5y_5z_5, \quad x_3y_3z_3 \xrightarrow[z_3, z_6]{\alpha_3} x_6y_6z_6$$

На основании, внешнем и внутреннем кольцах карданова подвеса установлены двигатели, которые посредством редукторов создают моменты стабилизации, направленные соответственно по осям y_2, x_1, z_3 . В дальнейшем моменты инерции роторов двигателей и передаточные числа редукторов будем считать одинаковыми и равными D и j .

Составим уравнения движения рассматриваемой механической системы. Обозначим абсолютные угловые скорости систем координат, связанных с основанием, внешним кольцом, внутренним, платформой и кожухами гироскопов соответственно u , Ω_2 , Ω_1 , Ω_3 , Ω_4 , Ω_5 , Ω_6 . Проекции абсолютных угловых скоростей указанных систем координат на их собственные коор-



динатные оси обозначим через u_1 , u_2 , u_3 и p_i , q_i , r_i ($i=2, 1, 3, 4, 5, 6$) соответственно. Имеем

$$\Omega_2 = u + \dot{\varphi}_2, \quad \Omega_1 = u + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 \quad (1.1)$$

$$\Omega_3 = u + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_3, \quad \Omega_{i+3} = \Omega_3 + \alpha_i \quad (i=1, 2, 3)$$

Третье из кинематических соотношений (1.1) можно разрешить относительно $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$. В результате получим

$$\dot{\varphi}_1 = p_3 \cos \varphi_3 - q_3 \sin \varphi_3 - u_1 \cos \varphi_2 + u_3 \sin \varphi_2 \quad (1.2)$$

$$\dot{\varphi}_2 = (p_3 \sin \varphi_3 + q_3 \cos \varphi_3) \cos^{-1} \varphi_1 - u_1 \sin \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1 - u_2 - u_3 \cos \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_1$$

$$\dot{\varphi}_3 = p_3 \sin \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1 + q_3 \cos \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1 + r_3 - (u_1 \sin \varphi_2 + u_3 \cos \varphi_2) \cos^{-1} \varphi_1$$

В дальнейшем вместо обобщенных координат — производных $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_3$ будем использовать проекции абсолютной угловой скорости платформы p_3 , q_3 , r_3 . При этом формулы (1.2) будем рассматривать в качестве замены переменных. Используя их, перейдем в формулах (1.1) для угловых скоростей к переменным p_3 , q_3 , r_3 . В случае малых углов и малых угловых скоростей с точностью до квадратичных членов можно найти

$$\Omega_2 = \begin{vmatrix} u_1 - u_3 \varphi_2 \\ q_3 - u_3 \varphi_1 + p_3 \varphi_3 \\ u_3 + u_1 \varphi_2 \end{vmatrix}, \quad \Omega_1 = \begin{vmatrix} p_3 - q_3 \varphi_3 \\ q_3 + p_3 \varphi_3 \\ u_3 - q_3 \varphi_1 + u_1 \varphi_2 \end{vmatrix}$$

$$\dot{\varphi}_1 = p_3 - u_1 - q_3 \varphi_3 + u_3 \varphi_2$$

$$\dot{\varphi}_2 = q_3 - u_2 - p_3 \varphi_3 - u_3 \varphi_1$$

$$\dot{\varphi}_3 = r_3 - u_3 + q_3 \varphi_1 - u_1 \varphi_2$$

(1.3)

Будем предполагать, что оси введенных систем координат совпадают с главными осями инерции тел, с которыми они связаны. Обозначим через A и C экваториальный и полярный моменты инерции ротора гироскопа; C_0 , B_0 , A_0 — моменты инерции кожуха гироскопа относительно оси ротора,

оси прецессии и перпендикулярной к ним оси соответственно. Через N_i ($i=4, 5, 6$) обозначим тензоры инерции, совпадающие с тензорами инерции гироблоков при условии $C=0$.

Обозначим через N_3 диагональный тензор инерции платформы с учетом масс гироблоков, через N_1, N_2 — диагональные тензоры инерции внутреннего и наружного колец карданова подвеса вместе с укрепленными на них двигателями. Элементы диагональных тензоров N_i обозначим A_i, B_i, C_i ($i=1, 2, 3$). Выпишем кинетические моменты K_i ($i=4, 5, 6, 3, 1, 2$) следующих механических систем: гироблоков, платформы вместе с гироблоками, внутреннего кольца вместе с двигателем, платформой и гироблоками, гиросtabilизатора в целом, но без двигателя стабилизации, установленного на основании

$$K_i = N_i \Omega_i + H_{i-3} \quad (i=4, 5, 6), \quad K_3 = N_3 \Omega_3 + \sum_{i=4}^6 K_i$$

$$K_1 = K_3 + N_1 \Omega_1 - D_j \varphi_3$$

$$K_2 = K_1 + N_2 \Omega_2 - D_j \varphi_1$$

$$\Omega_i = (p_i, q_i, r_i)^T \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

Верхний индекс «т» здесь и далее — знак транспонирования, $H_1 = Hx_4^\circ$, $H_2 = Hy_5^\circ$, $H_3 = Hz_6^\circ$, а $x_4^\circ, y_5^\circ, z_6^\circ$ — единичные орты осей x_4, y_5, z_6 вращения роторов гироблоков. Проекции вектора K_i ($i=1, 2, \dots, 6$) на оси системы координат $x_i y_i z_i$ обозначим через $K_{x_i}, K_{y_i}, K_{z_i}$. Предполагая, что система статически сбалансирована, а моменты сил трения достаточно малы и ими можно пренебречь, уравнения движения гиросtabilизатора составим в форме уравнений кинетических моментов указанных систем относительно осей, вокруг которых они могут вращаться

$$\begin{aligned} (A+B_0)r_4^\cdot - Hq_4 + (A+A_0-C_0)p_4q_4 &= 0 \\ (A+B_0)r_5^\cdot + Hp_5 - (A+A_0-C_0)p_5q_5 &= 0 \\ (A+B_0)p_6^\cdot - Hr_6 + (A+A_0-C_0)q_6r_6 &= 0 \\ K_{x_1}^\cdot + q_1K_{z_1} - r_1K_{y_1} &= M_{x_1} \\ K_{y_2}^\cdot + r_2K_{x_2} - p_2K_{z_2} &= M_{y_2} \\ K_{z_3}^\cdot + p_3K_{y_3} - q_3K_{x_3} &= M_{z_3} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Стоящие в правых частях величины $M_{x_1}, M_{y_2}, M_{z_3}$ — моменты, действующие на стабилизируемые тела со стороны редукторов. Их величины можно определить из уравнений кинетических моментов роторов двигателей стабилизации

$$\begin{aligned} D(p_2^\cdot - j\varphi_1^{\cdot\cdot}) &= kv_1 + M_{x_1} / j \\ D(u_2^\cdot - j\varphi_2^{\cdot\cdot}) &= kv_2 + M_{y_2} / j \\ D(r_1^\cdot - j\varphi_3^{\cdot\cdot}) &= kv_3 + M_{z_3} / j \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь kv_i ($i=1, 2, 3$) — моменты электромагнитного взаимодействия между ротором и статором двигателя, v_i — управляющее напряжение, подаваемое на двигатель, k — коэффициент пропорциональности, а вместо $\varphi_1^{\cdot\cdot}, \varphi_2^{\cdot\cdot}, \varphi_3^{\cdot\cdot}$ необходимо подставить производные от правых частей кинематических уравнений (1.2) и исключить из них $\varphi_1^\cdot, \varphi_2^\cdot, \varphi_3^\cdot$, используя (1.2). Будем предполагать, что v_1, v_2, v_3 формируются в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= W(p) (-\alpha_2 \cos \varphi_3 - \alpha_1 \sin \varphi_3) \\ v_2 &= W(p) (-\alpha_2 \sin \varphi_3 + \alpha_1 \cos \varphi_3), \quad v_3 = W(p) \alpha_3, \quad p = d / dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $W(p) = P_0(p) / Q(p)$ — фильтры в цепях стабилизации, P_0 и Q — полиномы оператора дифференцирования.

Система уравнений (1.4) вместе с (1.5), (1.6) и кинематическими уравнениями (1.2) описывают достаточно широкий класс движений гиросtabilизатора. Ограничимся исследованием случая периодических колебаний основания с малой амплитудой. Легко убедиться, что уравнения (1.2), (1.4) допускают решение $\alpha_i = \varphi_i = 0$ ($i=1, 2, 3$) в случае неподвижного основания.

Вследствие предположения о малости амплитуды колебаний основания будем считать величины $\alpha_i, \varphi_i, p_i, q_i, r_i$ малыми и выпишем уравнения (1.4) с точностью до квадратичных членов. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} B^0(r_3^* + \alpha_1^{**}) - Hq_3 &= -Hp_3\alpha_1 - (A + A_0 - C_0)p_3q_3 \\ B^0(r_3^* + \alpha_2^{**}) + Hp_3 &= -Hq_3\alpha_2 + (A + A_0 - C_0)p_3q_3 \\ B^0(p_3^* + \alpha_3^{**}) - Hr_3 &= -Hq_3\alpha_3 - (A + A_0 - C_0)q_3r_3 \\ I_1p_3^* - H\alpha_2^* - Hr_3 - kjW(p)\alpha_2 &= Dj(j+1)u_1^* + f_1 + g_1 \\ I_2q_3^* + H\alpha_1^* + Hr_3 + kjW(p)\alpha_1 &= Dj(j+1)u_2^* + f_2 + g_2 \\ I_3r_3^* + H\alpha_3^* + Hp_3 + kjW(p)\alpha_3 &= Dj(j+1)u_3^* + f_3 + g_3 \\ B^0 &= A + B_0, \quad I_1 = A_1 + A_3 + A + A_0 + C_0 + Dj^2 \\ I_2 &= B_1 + B_2 + B_3 + 2C_0 + A_0 + A + Dj^2 \\ I_3 &= C_3 + A + A_0 + Dj^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

В правых частях уравнений (1.7) через f_i, g_i ($i=1, 2, 3$) обозначены квадратичные члены

$$\begin{aligned} f_1 &= -g_3r_3(C_3 + 2B^0 + C_0) - q_3(\alpha_1^* + \alpha_2^*)B^0 + u_3(\alpha_1 + \varphi_3)H - \\ &\quad - q_3u_3(C_1 - B_1 - B_3 - A - A_0 - 2C_0 + Dj) + jkW(p)(\alpha_1\varphi_3) \\ g_1 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\alpha_1^2}{2} H + (B_3^* + A_1 + A + A_0 + 2C_0 + Dj^2)q_3\varphi_3 + H\alpha_1\varphi_3 - Dj(j+1)u_3\varphi_2 \right] \\ f_2 &= -u_3p_3(A_1 + A_3 + A_0 + B_0 + C_0 + 2A - Dj) + u_1r_3(C_3 + 2B^0 + A + A_0 - Dj) + \\ &\quad + u_1u_3(C_1 + C_2 - A_2) - B^0(u_3\alpha_3^* - u_1\alpha_1^* - u_1\alpha_2^*) + \\ &\quad + (u_3\alpha_2 + u_1\alpha_3 - q_3\varphi_1)H + jkW(p)(\alpha_2\varphi_3) \\ g_2 &= \frac{d}{dt} \left[(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \frac{H}{2} + (\alpha_2\varphi_3 + \alpha_3\varphi_1)H - (\alpha_3^*\varphi_3 - \alpha_1^*\varphi_1 - \alpha_2^*\varphi_1)B^0 - \right. \\ &\quad \left. - p_3\varphi_3(A_3 + B_1 + B_2 + C_0 + A_0 + B_0 + 2A + Dj^2) + r_3\varphi_1(C_3 + 2B^0 + A + A_0 - Dj) \right] \\ f_3 &= p_3q_3(A_3 - B_3 + B^0 - C_0) + B^0q_3\alpha_3^* \\ g_3 &= Dj(j+1) \frac{d}{dt} (u_1\varphi_2 - q_3\varphi_1) \end{aligned}$$

Систему уравнений (1.7) необходимо дополнить уравнениями (1.3).

2. Исследование уравнений (1.3), (1.7) может быть проведено асимптотическими методами. Для того чтобы привести систему уравнений (1.2), (1.7) к стандартному виду, следует перейти к безразмерному времени и ввести малый параметр, в качестве которого можно взять амплитуду угловых колебаний основания. Используя известную методику [2], во втором

приближении можно найти скорость систематического ухода. С целью уменьшения выкладок воспользуемся более простым способом определения скорости систематического ухода — методом последовательных приближений. Для этого найдем вначале решение линейной части системы. Запишем линейные уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} B^\circ(\alpha_2^{**} + r_3) + Hp_3 &= 0 \\ I_1 p_3 - H(\alpha_2^{**} + r_3) - kjW(p)\alpha_2 &= D(1+j)ju_1 \\ B^\circ(\alpha_1^{**} + r_3) - Hq_3 &= 0 \\ I_2 q_3 + H(\alpha_1^{**} + r_3) + kjW(p)\alpha_1 &= D(1+j)ju_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} B^\circ(\alpha_3^{**} + p_3) - Hr_3 &= 0 \\ I_3 r_3 + H(\alpha_3^{**} + p_3) + kjW(p)\alpha_3 &= D(1+j)ju_3 \\ \Phi_1 = p_3 - u_1, \quad \Phi_2 = q_3 - u_2, \quad \Phi_3 = r_3 - u_3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из системы уравнений (2.1) могут быть найдены величины $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p_3, q_3, r_3$. Подставив их в уравнения (2.2), определим Φ_1, Φ_2, Φ_3 . В матричной форме система (2.1), (2.2) может быть записана в виде

$$\Phi(p)y = R(p)u, \quad \Phi = \Omega_3 - u, \quad y = (\alpha_2, p_3, \alpha_1, q_3, \alpha_3, r_3)^T$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)^T, \quad \Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T, \quad \Omega_3 = (p_3, q_3, r_3)^T$$

$$R(p) = pQ(p) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} D_i &= D(1+j)j/I_i \quad (i=1,2,3) \\ P &= kjP_0 \end{aligned}$$

$$\Phi(p) = \begin{pmatrix} p^2 & H/B^\circ & 0 & 0 & 0 & p \\ -(HpQ + P)/I_1 & pQ & 0 & 0 & 0 & -HQ/I_1 \\ 0 & 0 & p^2 & -H/B^\circ & 0 & p \\ 0 & 0 & (HpQ + P)/I_2 & pQ & 0 & HQ/I_2 \\ 0 & p & 0 & 0 & p^2 & -H/B^\circ \\ 0 & HQ/I_3 & 0 & 0 & (HpQ + P)/I_3 & pQ \end{pmatrix}$$

В матрице $\Phi(p)$ по диагонали стоят матрицы второго порядка, соответствующие уравнениям отдельных каналов стабилизации в случае отсутствия перекрестных связей между ними. Остальные члены характеризуют перекрестные связи между каналами стабилизации. Выпишем определители матриц второго порядка

$$\Delta_i = p^3 Q + \frac{H}{B^\circ I_i} (HpQ + P) \quad (i=1,2,3)$$

Решение системы уравнений (2.1), (2.2) состоит из общего решения однородной системы и частного решения неоднородной. Исследованию устойчивости трехосного гироскопического стабилизатора посвящен ряд работ [3]. Будем считать, что параметры корректирующего контура выбраны надлежащим образом и собственные колебания системы уравнений (2.1), (2.2) асимптотически затухают.

В инерциальной системе координат $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ положение основания стабилизатора (или ориентацию системы координат $\xi \eta \zeta$) зададим углами ψ_1, ψ_2, ψ_3 по следующей схеме:

$$\xi_0 \eta_0 \zeta_0 \xrightarrow{\psi_2} \xi_2 \eta_2 \zeta_2 \xrightarrow{\psi_1} \xi_1 \eta_1 \zeta_1 \xrightarrow{\psi_3} \xi \eta \zeta \quad (2.3)$$

При периодических колебаниях основания углы ψ_1, ψ_2, ψ_3 изменяются периодически. Пусть они будут малыми и изменяющимися по гармоническому закону

$$\psi_i = b_i \sin(\omega t + \theta_i) \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Тогда можно получить, что

$$u_i = a_i \cos(\omega t + \theta_i) + w_i + \dots, \quad a_i = \omega b_i \quad (2.5)$$

где $a_i \cos(\omega t + \theta_i)$ ($i=1, 2, 3$) — члены первого порядка малости, а слабые

$$\begin{aligned} w_1 &= a_2 b_3 \cos(\omega t + \theta_2) \sin(\omega t + \theta_3) \\ w_2 &= -a_1 b_3 \cos(\omega t + \theta_1) \sin(\omega t + \theta_3) \\ w_3 &= -a_2 b_1 \cos(\omega t + \theta_2) \sin(\omega t + \theta_1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

члены второго порядка малости. Точками обозначены члены более высоких порядков малости.

В линейных уравнениях (2.1), (2.2) необходимо под u_1, u_2, u_3 понимать члены первого порядка малости

$$u_i = a_i \cos(\omega t + \theta_i) \quad (i=1, 2, 3) \quad (2.7)$$

Тогда частное решение системы уравнений (2.1), соответствующее вынужденным колебаниям гиросtabilизатора, может быть записано в виде [4]

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{Re}[\Delta^{-1}(p) F(p) R(p) \eta_0 e^{pt}]_{p=i\omega} \\ \Delta(p) &= \Delta_r(p) \left[\Delta_1 \Delta_3 + p^2 \frac{P^2}{I_1 I_3} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь $\Delta(p)$ — определитель матрицы $\Phi(p)$, $F(p) = \{a_{mn}\}$ ($m, n=1, 2, \dots, 6$) — присоединенная матрица для матрицы $\Phi(p)$:

$$\eta_0 = (a_1 e^{i\theta_1}, a_2 e^{i\theta_2}, a_3 e^{i\theta_3})^T$$

$$F(p) = \begin{vmatrix} a_{11} & -\Delta_2 \left(\omega_0 \Delta_3 + p^2 \frac{P}{I_3} \right) & 0 & 0 & a_{15} & -\Delta_2 Q p^2 (\omega_1^2 + p^2) \\ a_{21} & p^2 \Delta_2 \Delta_3 & 0 & 0 & a_{25} & -\Delta_2 p^2 \frac{P}{I_1} \\ a_{31} & -p^3 Q (\omega_2^2 + p^2) \frac{P}{I_3} & a_{33} \omega_0 \left(\Delta_1 \Delta_3 + p^2 \frac{P^2}{I_1 I_3} \right) & a_{35} & -\Delta_1 Q p^2 (\omega_2^2 + p^2) & \\ a_{41} & p^4 \frac{P^2}{I_2 I_3} & a_{43} p^2 \left(\Delta_1 \Delta_3 + p^2 \frac{P^2}{I_1 I_3} \right) & a_{45} & \Delta_1 p^3 \frac{P}{I_1} & \\ a_{51} & p^2 \Delta_2 Q (\omega_3^2 + p^2) & 0 & 0 & a_{55} \Delta_2 \left(\Delta_1 \omega_0 + p^2 \frac{P}{I_1} \right) & \\ a_{61} & p^3 \Delta_2 \frac{P}{I_3} & 0 & 0 & a_{65} & \Delta_1 \Delta_2 p^2 \end{vmatrix}$$

$$\omega_0 = H / B^0, \quad \omega_i^2 = H^2 / (B^0 I_i) \quad (i=1, 2, 3), \quad B^0 = A + B_0$$

При этом ряд элементов матрицы $F(p)$ не выписан в явном виде, поскольку в дальнейших вычислениях они не потребуются. Перепишем формулы (2.8) в виде

$$y = \operatorname{Re}[X(p) e^{pt}]_{p=i\omega} \quad (2.9)$$

$$X_m(p) = pQ [D_1 a_1 e^{i\theta_1} a_{m2} + D_2 a_2 e^{i\theta_2} a_{m4} + D_3 a_3 e^{i\theta_3} a_{m6}] \quad (m=1, \dots, 6) \quad (2.10)$$

$$X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)^T = \Delta^{-1} F R \eta_0$$

Используя (2.9), получим следующее частное решение уравнений (2.2):

$$\varphi_i = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} [X_{2i}(i\omega) - a_i e^{i\theta_i}] \right\} \quad (i=1,2,3) \quad (2.11)$$

Зная частное решение (2.9), (2.11), можно найти систематические уходы гиросtabilизатора. Они будут равны постоянным слагаемым в решении уравнений второго приближения, которые совпадают с уравнениями (1.3), (1.7), где в квадратичные члены необходимо подставить решения (2.9), (2.11), а вместо линейно входящих членов u_1, u_2, u_3 подставить w_1, w_2, w_3 . Так как решения (2.9), (2.11) — гармонические функции, то неоднородные члены уравнений второго приближения будут содержать гармонические функции с частотами ω и 2ω и постоянные составляющие. Этим постоянным составляющим будут соответствовать систематические уходы гиросtabilизатора

$$\langle y \rangle = T^{-1} \int_0^T y dt, \quad \langle \dot{\varphi}_i \rangle = T^{-1} \int_0^T \dot{\varphi}_i dt, \quad T = 2\pi/\omega$$

Поскольку в асимптотически устойчивом по отношению к вектору u стабилизаторе $W(p) \neq 0$ при $p=0$, то постоянным составляющим $\langle f_i \rangle$ ($i=1, 2, 3$) правых частей уравнений второго приближения (1.7) будут соответствовать постоянные составляющие углов прецессии $\langle \alpha_1 \rangle, \langle \alpha_2 \rangle, \langle \alpha_3 \rangle$. При этом систематических уходов по углам прецессии не будет $\langle \dot{\alpha}_1 \rangle = 0, \langle \dot{\alpha}_2 \rangle = 0, \langle \dot{\alpha}_3 \rangle = 0$. Обозначим $\sigma_1 = \langle p_3 \rangle, \sigma_2 = \langle q_3 \rangle, \sigma_3 = \langle r_3 \rangle$, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяют уходы гиросtabilизатора в форме средних значений проекций абсолютной угловой скорости платформы на собственные оси. Можно показать, что имеют место равенства

$$\sigma_1 = -\langle q_3 \alpha_2 \rangle + \mu \langle p_3 q_3 \rangle, \quad \sigma_2 = \langle p_3 \alpha_1 \rangle + \mu \langle p_3 q_3 \rangle \quad (2.12)$$

$$\sigma_3 = \langle q_3 \alpha_3 \rangle + \mu \langle q_3 r_3 \rangle, \quad \mu = (A + A_0 - C_0) H^{-1}$$

где в правые части (2.12) подставлены решения (2.9), (2.11). Непосредственной проверкой легко убедиться, что для произвольных чисел Y, Z имеет место равенство

$$\langle \operatorname{Re}(Y e^{i\omega t}) \operatorname{Re}(Z e^{i\omega t}) \rangle = 0.5 \operatorname{Re}[YZ] \quad (2.13)$$

где черта означает комплексно сопряженное число. Используя это равенство, перепишем формулы (2.12) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -0.5 \operatorname{Re} [-X_4 \bar{X}_1 + \mu X_2 \bar{X}_4] \\ \sigma_2 &= 0.5 \operatorname{Re} [X_2 \bar{X}_3 + \mu X_2 \bar{X}_4] \\ \sigma_3 &= 0.5 \operatorname{Re} [X_4 \bar{X}_5 + \mu X_4 \bar{X}_6] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рассмотрим частные случаи движения основания. Пусть $\psi_1 = \psi_3 = 0, \psi_2 = b \sin \omega t$, что соответствует $u_1 = u_3 = 0, u_2 = a \cos \omega t, a = b\omega$. В этом случае вектор η_0 содержит только один ненулевой элемент $\eta_0 = (0, a, 0)^T$, поэтому $R(p)\eta_0 = (0, 0, 0, aD_2, 0, 0)^T$. Тогда, согласно (2.10), в формулах для вынужденных колебаний будут использоваться элементы только четвертого столбца матрицы $F(p)$, из которых только два элемента ненулевые. И поэтому из (2.9) следует, что вынужденные колебания возникнут только во втором канале стабилизации, характеризующемся переменными α_1, q_3 :

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \alpha_3 = p_3 = r_3 = 0, \quad \alpha_1 &= \operatorname{Re} \left[\frac{D_2 a}{\Delta(p)} \kappa \frac{H}{B^0} e^{pt} \right]_{p=i\omega} \\ q_3 &= \operatorname{Re} \left[\frac{D_2 a}{\Delta(p)} p^2 \kappa e^{pt} \right]_{p=i\omega}, \quad \kappa = \left[\Delta_1 \Delta_3 + p^2 \frac{P^2}{I_1 I_3} \right] p Q \end{aligned}$$

Тогда из (2.14) вытекает $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Получившийся результат имеет простой механический смысл. Возмущающий момент, обусловленный инерционностью ротора двигателя стабилизации, действует по оси η_3 , параллельной векторам собственных кинетических моментов двух гироскопов. Возникающие при этом колебания гироплатформы происходят только вокруг оси η_3 , систематический уход отсутствует.

Рассмотрим случай $\psi_2 = \psi_3 = 0$, $\psi_1 = b \sin \omega t$, при котором $u_2 = u_3 = 0$, $u_1 = a \cos \omega t$. В этом случае в формулах для вынужденных колебаний будут участвовать только элементы второго столбца матрицы $F(p)$. Поскольку они все ненулевые, колебания возникнут во всех трех каналах стабилизации. Тогда формулы (2.14), (2.10) дают

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= E \operatorname{Re} \left[\omega_0 P^2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_3 - \frac{\omega^2}{I_3} |P|^2 P \bar{\Delta}_2 - \omega^2 \mu \Delta_2 \Delta_3 \bar{P}^2 \right]_{p=i\omega} \\ \sigma_2 &= E \operatorname{Re} \left[-I_2 \omega (\omega_2^2 - \omega^2) i P Q \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_3 - \omega^2 \mu \Delta_2 \Delta_3 \bar{P}^2 \right]_{p=i\omega} \\ \sigma_3 &= -E \operatorname{Re} \left[\omega^2 (\omega_3^2 - \omega^2) P^2 \bar{\Delta}_2 \bar{Q} - \frac{\omega^2}{I_3} |P|^2 \mu i P \bar{\Delta}_2 \right]_{p=i\omega}\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$E = (a^2 D_1^2 |Q|^2 \omega^6) / (2 |\Delta|^2 I_2 I_3)$$

Формулы (2.14) определяют скорости систематического ухода в зависимости от характеристик колебаний основания и параметров системы. Из (2.15) следует, что систематический уход имеет место в случае колебаний основания относительно одной оси. Этот эффект отмечался в работе [5]. Заметим, что величина пропорциональна приведенному моменту инерции ротора двигателя стабилизации. Найденные значения систематических уходов гиросtabilизированной платформы могут служить для оценки ошибок.

Скорости систематического ухода разворота колец карданова подвеса гиросtabilизатора будут равны средним значениям правых частей уравнений второго приближения (1.2)

$$\begin{aligned}\langle \varphi_1 \dot{\cdot} \rangle &= \sigma_1 - \langle q_3 \varphi_3 \rangle + \langle u_3 \varphi_2 \rangle - \langle w_1 \rangle \\ \langle \varphi_2 \dot{\cdot} \rangle &= \sigma_2 + \langle p_3 \varphi_3 \rangle - \langle u_3 \varphi_1 \rangle - \langle w_2 \rangle \\ \langle \varphi_3 \dot{\cdot} \rangle &= \sigma_3 + \langle q_3 \varphi_1 \rangle - \langle u_1 \varphi_2 \rangle - \langle w_3 \rangle\end{aligned}\quad (2.16)$$

В правые части (2.16) следует подставить решение (2.9), (2.11) и формулы (2.6), (2.7). Соотношения (2.16), используя (2.14), можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\langle \varphi_1 \dot{\cdot} \rangle &= 0.5 \left(-\frac{\omega_0}{\omega^2} + \mu \right) \operatorname{Re} [X_2 \bar{X}_4], \quad \langle \varphi_2 \dot{\cdot} \rangle = \langle \varphi_1 \dot{\cdot} \rangle \\ \langle \varphi_3 \dot{\cdot} \rangle &= 0.5 \left(-\frac{\omega_0}{\omega^2} + \mu \right) \operatorname{Re} [X_4 \bar{X}_6]\end{aligned}\quad (2.17)$$

Здесь использованы следующие равенства: $p^2 X_1 + p X_6 = -\omega_0 X_2$, $p^2 X_3 + p X_6 = \omega_0 X_4$, $p^2 X_5 + p X_2 = \omega_0 X_6$, которые можно проверить непосредственными вычислениями.

Заметим, что окончательные формулы для уходов (2.17) не зависят от средних значений $\langle w_1 \rangle$, $\langle w_2 \rangle$, $\langle w_3 \rangle$.

Выишем выражения для рассматривавшихся ранее случаев колебаний основания.

При $u_1 = u_3 = 0$, $u_2 = a \cos \omega t$ из (2.17) получим $\langle \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_3 \rangle = 0$.
 При $u_1 = a \cos \omega t$, $u_2 = u_3 = 0$ из (2.17) будем иметь

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 \rangle &= E(\omega_0 - \mu\omega^2) \operatorname{Re}[\Delta_2 \Delta_3 \bar{P}^2]_{p=i\omega} \\ \langle \varphi_3 \rangle &= \frac{E\omega |P|^2}{I_3} (\omega_0 - \mu\omega^2) \operatorname{Re}[-iP \bar{\Delta}_2]_{p=i\omega} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Величины, стоящие в квадратных скобках в (2.18), не равны тождественно нулю.

Если параметры системы таковы, что $\mu = (A + A_0 - C_0)H^{-1} > 0$, то существует частота внешнего возмущения ω^* , определяемая равенством $(\omega^*)^2 = \omega_0/\mu$, при которой $\langle \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_3 \rangle = 0$, как видно из (2.17). Аналогичный эффект имеет место для гироскопа в кардановом подвесе [6].

Формулы (2.14), (2.17) определяют уходы в общем случае. (2.4) гармонических колебаний основания. Поскольку явные зависимости в общем случае довольно громоздки, то здесь они не приводятся.

Пример. Для гипотетического стабилизатора с параметрами $Q = 1 + T_2 p$, $P_0 = 1 - T_1 p$, $T_1 = 1$ с, $T_2 = 0.0625$ с, $H = 7 \cdot 10^{-5}$ кг м²/с, $I_1 = 7.03 \cdot 10^{-5}$ кг м², $I_2 = 10.76 \cdot 10^{-5}$ кг м², $I_3 = 4.78 \cdot 10^{-5}$ кг м², $B^0 = 0.25 \cdot 10^{-7}$ кг м², $j = 100$, $D = 0.04 \cdot 10^{-7}$ кг м², $k = 3.5 \cdot 10^{-7}$ кг м² с⁻² при $a = 0.0087$ рад/с, $\omega = 50$ с⁻¹ формулы (2.14), (2.17) дают: $\sigma_1 = 2.86 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $\langle \varphi_1 \rangle = 2.86 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $\sigma_2 = -2.22 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $\langle \varphi_2 \rangle = 2.86 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $\sigma_3 = -2.81 \cdot 10^{-6}$ рад/с, $\langle \varphi_3 \rangle = -1.4 \cdot 10^{-6}$ рад/с.

Поступила 28 II 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Б. И. Силовые гиросtabilизаторы. В кн.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973.
2. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971.
3. Новожилов И. В. Об устойчивости трехосного гиросtabilизатора. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.
4. Булгаков Б. В. Колебания, ч. 1-3. М., Гостехиздат, 1954.
5. Карпов В. Н. О динамике трехосного гиросtabilизатора. Изв. вузов. Приборостроение, 1964, т. 7, № 5.
6. Борзов В. И. Влияние моментов сил вязкого трения на уход гироскопа в кардановом подвесе при вибрации основания. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 2.