МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1980

УДК 534

# ПОВЕДЕНИЕ НЕГОЛОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Р. А. МУСАРСКИЙ, Н. А. ФУФАЕВ

(*Горький*)

Большая часть работ, посвященных изучению динамики неголономных систем, как правило, содержит исследование их устойчивости и малых колебаний при детерминированном воздействии или, чаще всего, при единичном возмущении. Однако характер малых колебаний неголономных систем в реальных условиях (например, при движении колесных машин) указывает на необходимость их изучения с учетом внешних возмущений как детерминированных, так и случайных. В этих условиях изучение поведения неголономной системы предполагает не только отыскание области устойчивости, но и получение количественных оценок изменения фазовых координат при значениях параметров системы, принадлежащих области устойчивости.

Неголономные системы со случайными воздействиями рассматривались в работах [1, 2], в которых аппарат теории случайных процессов используется формально по отношению ко всем фазовым координатам. При этом авторы по существу не учитывают особенности, связанной с наличием многообразия состояний равновесия и стационарных движений неголономной системы. Так, в [1] вводятся возмущения, которые являются случайными функциями времени, составляются дифференциальные уравнения, описывающие поведение изображающей точки в фазовом пространстве системы в малой окрестности некоторого состояния равновесия. Затем на основе этих уравнений составляются дифференциальные уравнения относительно первых и вторых моментов фазовых координат. Однако можно заметить, что характеристические полиномы полученных дифференциальных уравнений имеют нулевые корни, и поэтому решение для моментов в общем случае обращается в бесконечность.

Пример решения задачи о поведении неголономной системы при малых постоянно действующих случайных возмущениях с учетом вышеуказанной особенности содержится в работе [3].

Ниже дается описание общего подхода к решению таких задач и приводится два иллюстрирующих примера.

1. Пусть движение механической системы, положение которой определяется $n$ обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, подчинено неголономным связям, которые выражаются уравнениями

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_{ik}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_k = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m), \quad (m<n) \tag{1.1}$$

Эти уравнения вместе с $n-m$ уравнениями динамики составляют систему $n$ уравнений для определения $q_1, q_2, \ldots, q_n$ как функций времени.

Полагая в полученных уравнениях движения все производные по времени равными нулю, получим систему $(n-m)$ уравнений

$$f_l(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \tag{1.2}$$

которым в отсутствие сил, зависящих от времени, должны удовлетворять обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в состоянии равновесия[1]. Предполо-

[1] Уравнения (1.2) позволяют найти все состояния равновесия лишь при условии, что ни при каких значениях $q_i$, удовлетворяющих системе (1.2), коэффициенты $\omega_{ik}(q)$ в (1.1) не обращаются в бесконечность. В дальнейшем будем считать, что это условие выполнено.

жим, что все уравнения системы (1.2) функционально независимы. В этом случае [4] состояния равновесия образуют в $n$-мерном пространстве конфигураций $K_n$ поверхность $O_m$ размерности $m$. Уравнения этой поверхности в параметрическом представлении можно получить из (1.2), если разрешить эти уравнения относительно каких-либо $(n-m)$ обобщенных координат. Пусть это будут последние $(n-m)$ координат $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$. Тогда

$$q_{m+l}=\varphi_l(q_1, q_2, \ldots, q_m) \quad (l=1, 2, \ldots, n-m) \tag{1.3}$$

Координаты $q_1=u_1, \ldots, q_m=u_m$ можно принять в качестве параметров $u_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ поверхности $O_m$. В $(2n-m)$-мерном фазовом пространстве $\Phi_{2n-m}$ рассматриваемой системы, представляющем прямое произведение $\Phi_{2n-m}=K_n\times S_{n-m}$ пространства конфигураций $K_n$ и пространства скоростей $S_{n-m}$, наряду с переменными $u_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ введем координаты $v_k$ $(k=1, 2, \ldots, 2(n-m))$, определяющие малые отклонения от поверхности $O_m$, посредством соотношений

$$v_l=q_{m+l}-\varphi_l(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad v_{n-m+l}=\dot{q}_{m+l}, \quad (l=1, 2, \ldots, n-m) \tag{1.4}$$

При равновесии системы все величины $v_j$ $(j=1, 2, \ldots, 2(n-m))$, согласно (1.4), обращаются в нуль, а величины $u_i$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ принимают постоянные значения. В новых переменных $u$, $v$ уравнения движения запишутся в виде

$$du_i/dt=G_i(u, v), \quad dv_j/dt=H_j(u, v) \tag{1.5}$$

Пусть теперь на рассматриваемую неголономную систему постоянно действуют малые возмущающие силы, которые могут быть как детерминированными, так и случайными функциями времени. Тогда уравнения (1.5), линеаризованные в окрестности поверхности $O_m$ (т. е. по переменным $v_j$), с учетом возмущающих сил имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{2(n-m)} a_{ij}(u_1, \ldots, u_m)v_j+\xi_i(u, t) \quad (i=1,2,\ldots,m)\\ \frac{dv_j}{dt}=\sum_{k=1}^{2(n-m)} b_{jk}(u_1, \ldots, u_m)v_j+\eta_j(u, t) \quad (j=1,2,\ldots,2(n-m))\end{gathered} \tag{1.6}$$

Величины $\xi_i(u, t)$ и $\eta_j(u, t)$ представляют нулевые члены в разложении обобщенных возмущающих сил в степенной ряд по переменным $v_k$. Будем предполагать, что эти члены являются малыми величинами порядка $v_k$.

Пусть поверхность $O_m$ состояний равновесия асимптотически устойчива, т. е. все корни характеристического уравнения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_j}{dt}=\sum_{k=1}^{2(n-m)} b_{jk}(u_1, \ldots, u_m)v_k \quad (j=1,2,\ldots,2(n-m)) \tag{1.7}$$

в которых величины $u_1, \ldots, u_m$ рассматриваются как постоянные параметры, имеют отрицательные действительные части. Тогда, согласно теореме о поведении неголономной системы в окрестности асимптотически устойчивого многообразия при малых постоянно действующих возмущениях [4], решения уравнений (1.6) по переменным $v_j$ и $u_i$ имеют различный характер. При детерминированном возмущении колебательного вида изменение величин $v_j$ носит тоже колебательный характер, а величины $u_i$ будут медленно изменяющимися функциями времени. Если же возмущение является случайной функцией времени с известными статистическими характеристиками, то для переменных $v_j$ соответствующие статистические характеристики также могут быть вычислены при помощи обычного аппарата теории случайных процессов. Соответствующие статистические характеристики переменных $u_i$ можно получить лишь для их производных по времени, а не для самих величин $u_i$. Это связано с тем, что переменные $u_i$ в первом приближении представляют случайные процессы со стационарными приращениями. Таким образом, соответствующие статистические характеристики следует вычислять лишь для переменных $v_j$ и, если нужно, для $\dot{u}_i$.

При переходе к координатам $u$, $v$ в конкретных задачах целесообразно придерживаться следующего порядка.

1. Уравнения равновесия (1.2) нужно разбить на группы, содержащие одни и те же обобщенные координаты, которые и целесообразно выбрать в качестве параметров $u_i$. В качестве остальных параметров $u_i$, общее число которых должно совпадать с размерностью многообразия состояний равновесия, следует принять циклические координаты.

2. Переменные $v_j$ можно ввести, используя непосредственно уравнения равновесия (1.2), не разрешая их относительно $(n-m)$ обобщенных координат, при помощи соотношений

$$v_l=f_l(q_1, q_2, \ldots, q_n) \quad (l=1, 2, \ldots, n-m)$$

В качестве остальных $n-m$ координат $v_{n-m+l}$ следует принять соответствующие обобщенные скорости. После этого производится линеаризация полученных уравнений по переменным $v$ в малой окрестности асимптотически устойчивой области многообразия состояний равновесия и получается система дифференциальных уравнений (1.6), определяющая поведение неголономной системы при малых постоянно действующих возмущениях.

**2.** *Примеры. Сани Чаплыгина на наклонной плоскости под действием возмущающих сил, приложенных к центру масс* [4]. Уравнения движения саней имеют вид

$$\begin{gathered}(l^2+\rho^2)\ddot{\varphi}+l\cos^{-1}\varphi\ddot{x}+h_1\dot{\varphi}+l\sin\varphi\cos^{-2}\varphi\dot{x}\dot{\varphi}+gl\sin\alpha\sin\varphi= \\ =l(\xi_x\cos\varphi+\xi_y\sin\varphi) \\ l\cos^{-1}\varphi\ddot{\varphi}+\cos^{-2}\varphi\ddot{x}+\sin\varphi\cos^{-3}\varphi\dot{x}\dot{y}+ \\ +h\cos^{-2}\varphi\dot{x}+g\sin\alpha\operatorname{tg}\varphi=\xi_x+\xi_y\operatorname{tg}\varphi \\ \dot{y}-\dot{x}\operatorname{tg}\varphi=0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Состояния равновесия рассматриваемой неголономной системы образуют в трехмерном пространстве конфигураций $K_3(x, y, \varphi)$ две плоскости: $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, из которых лишь плоскость $\varphi=0$ является асимптотически устойчивой. При этом должно выполняться неравенство $(l^2+\rho^2)h>$ $>h_1^{-1}\rho^2gl\sin\alpha-h_1$. Введем в фазовом пространстве $\Phi_5(x, y, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi})$, в малой окрестности плоскости $\varphi=0$ координаты $u_i$ $(i=1, 2)$ и $v_j$ $(j=1, 2, 3)$ при помощи соотношений

$$u_1=x,\ u_2=y,\ v_1=\dot{x},\ v_2=\dot{\varphi},\ v_3=\varphi \tag{2.2}$$

Заменив в уравнениях (2.1) переменные $x$, $y$, $\varphi$, $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$ на $u_1$, $u_2$, $v_1$, $v_2$, $v_3$ и произведя линеаризацию полученных уравнений по малым величинам $v_j$, получим

$$v_1^{\cdot}=\xi_x-h(1+l^2\rho^{-2})v_1+lh_1\rho^{-2}v_2-g\sin\alpha v_3$$

$$v_2^{\cdot}=lh\rho^{-2}v_1-h_1\rho^{-2}v_2,\quad v_3^{\cdot}=v_2 \tag{2.3}$$

$$u_1^{\cdot}=v_1,\quad u_2^{\cdot}=0 \tag{2.4}$$

Составляющая возмущения $\xi_y$ в линеаризованные уравнения (2.3), (2.4) не входит, что имеет ясный физический смысл: при равновесии саней компонента $\xi_y$ компенсируется силой реакции неголономной связи, которая препятствует проскальзыванию лезвия в поперечном направлении.

Рассмотрим случайный процесс $\xi_x(t)$ с заданным математическим ожиданием $\langle\xi_x\rangle$. Из (2.3) следует, что математические ожидания $\langle v_1\rangle=\langle v_2\rangle=0$, $\langle v_3\rangle=\langle\xi_x\rangle/g\sin\alpha$, т. е. среднее значение угла $\varphi$ при таком случайном возмущении будет отлично от нуля. Из (2.4) следует, что точка соприкосновения лезвия с плоскостью будет при этом «в среднем» оставаться на месте.

Если случайное воздействие $\xi(t)$ будет приложено в точке соприкосновения лезвия с плоскостью, то система уравнений движения останется без изменения, за исключением того, что в правой части первого уравнения системы (2.1) член $l\xi_x\cos\varphi$ будет отсутствовать. В этом случае $\langle v_1\rangle=\langle\xi_x\rangle/b$; $\langle v_2\rangle=0$, $\langle v_3\rangle=0$. Следовательно, сани будут смещаться вдоль координаты $x$ со средней скоростью $\langle u_1^{\cdot}\rangle=\langle\xi_x\rangle/b$.

Пусть $\xi_x(t)$ — гауссов «белый шум» с интенсивностью $Q/2\pi$. В случае, когда возмущение $\xi(t)$ приложено к центру масс саней, имеем для дисперсий координат $v_j$:

$$D_{v_1}=[Qh_1(h\rho^2+h_1)]/h\{h_1[h(l^2+\rho^2)+h_1]-lg\sin\alpha\rho^2\}$$

$$D_{v_3}=\{Ql[h(l^2+\rho^2)+h_1]\}/g\sin\alpha\{h_1[h(l^2+\rho^2)+h_1]-lg\sin\alpha\rho^2\}$$

Из этих выражений видно, что дисперсии положительны лишь в области устойчивости. При приближении к границе области устойчивости дисперсия стремится к бесконечности.

*Волчок в сферической чашке при случайных возмущениях* [4]. Рассмотрим движение осесимметричного тела, ограниченного снизу сферической поверхностью радиуса $R$, которое может кататься без проскальзывания в сферической чашке радиуса $R_1$ ($R_1>R$). Центр тяжести тела расположен на расстоянии $l$ от центра его сферической поверхности. Пусть сферическая чашка совершает малые повороты $f(t)$ вокруг вертикальной оси. Характер этих колебаний является случайным с заданными вероятностными характеристиками.

Рассматриваемая система обладает пятимерным пространством конфигураций $K_5(\theta, \theta_1, \psi, \psi_1, \varphi)$ и восьмимерным фазовым пространством $\Phi_8(\theta, \theta_1, \psi, \psi_1, \varphi, \theta^{\cdot}, \psi^{\cdot}, \varphi^{\cdot})$ [4]. В состоянии равновесия системы пять обобщенных координат оказываются связанными двумя соотношениями: $\psi-\psi_1=0$, $\gamma\sin\theta-\sin\theta_1=0$, поэтому имеем трехмерную поверхность $O_3$ состояний равновесия. В качестве параметров $u_1$, $u_2$, $u_3$ примем величины $u_1=\psi$, $u_2=\theta$, $u_3=\varphi$, а координаты $v_j$ введем при помощи соотношений: $v_1=u_1-\psi_1$, $v_2=\gamma\sin u_2-\sin\theta_1$, $v_3=\psi_1^{\cdot}$, $v_4=\theta_1'$, $v_5=\varphi^{\cdot\prime}$, где штрихом обозначены отклонения координат от их равновесных значений.

Уравнения движения в переменных $u$, $v$ имеют вид

$$v_2^{\cdot}=[(1-\rho)\gamma\cos\theta-\cos\theta_1]v_4 \tag{2.5}$$

$$v_4^{\cdot}[\alpha+\gamma^2+1-2\gamma\cos(\theta-\theta_1)](1-\rho)=\delta(\rho-1)v_4-v_2$$

$$(\beta\cos\theta+\gamma^{-1}ab)v_5^{\cdot}+\delta_1[\cos^2\theta_1 a\gamma^{-1}+\cos\theta_1\cos(\theta-\theta_1)]v_5-$$

$$-b(\rho-1)v_3^{\cdot}-(\rho-1)(\delta_1\cos^2\theta_1+\delta\sin^2\theta_1)v_3=-bf^{\cdot}(t)-\delta_1\cos^2\theta_1 f(t)$$

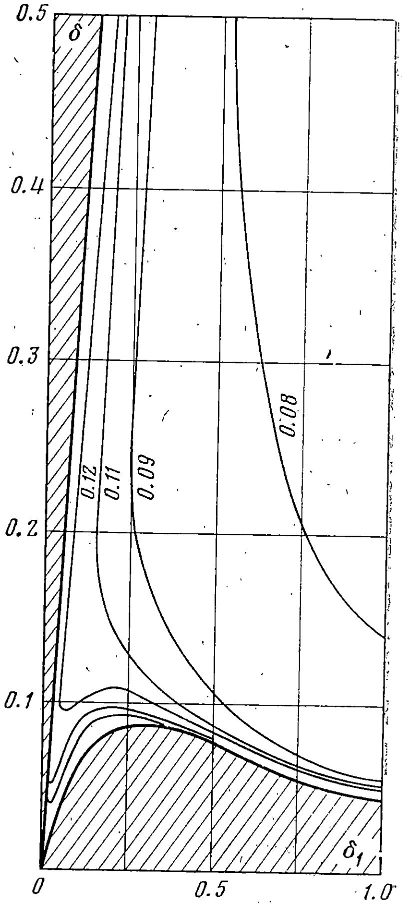
$$\begin{gathered}\{\beta+[\beta\cos\theta+\gamma\sin\theta\sin(\theta-\theta_1)]a\gamma^{-1}\}v_5^{\bullet}+\{\cos(\theta-\theta_1)+\\+a\gamma^{-1}\cos\theta_1\}\delta_1\cos(\theta-\theta_1)v_5-\gamma\sin^2\theta v_1=\\=-[\beta\cos\theta+\gamma\sin\theta\sin(\theta-\theta_1)]f^{\bullet}(t)-\delta_1\cos\theta\cos(\theta-\theta_1)f(t)\\v_1^{\bullet}+\rho v_3-a\gamma^{-1}v_5=f(t)\\u_1^{\bullet}=(1-\rho)v_3+a\gamma^{-1}v_5+f(t),\quad u_2^{\bullet}=(1-\rho)v_4,\quad u_3^{\bullet}=v_5\\a=\cos\theta_1-\gamma\cos\theta,\quad b=\alpha\sin^2\theta+\beta\cos^2\theta\end{gathered}\tag{2.6}$$

Заметим, что в уравнениях (2.5) возмущения отсутствуют.

Пусть спектральная плотность возмущения $f(t)$ имеет вид $S_f(\omega)=R_f s/\pi(\omega^2+s^2)$, где $R_f$ — дисперсия возмущения, $s$ — параметр, характеризующий время корреляции возмущения.

Вычислим дисперсию координаты $v_5$. Используя теорему, сформулированную в [3], получим

$$\begin{gathered}D_{v_5}=R_f\gamma^2M_4/[b_3b_0(b_1b_2-\\-b_0b_3)(b_0+b_1s+b_2s^2+b_3s^3)]\\b_0=\delta_1\cos\theta_1[\gamma\rho\cos(\theta-\theta_1)+a\cos\theta_1]-\\-\delta a\gamma^2\sin^2\theta(\rho-1)\\b_1=\delta\delta_1(\rho-1)+ab+\rho\beta\gamma\cos\theta\\b_2=(\rho-1)\{\delta[\beta+(\alpha-\beta+\gamma^2)\sin^2(\theta-\theta_1)]+\\+\delta_1[\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2(\theta-\theta_1)+a^2\cos^2\theta_1]\}\\b_3=(\rho-1)(a^2b+\alpha\beta)\\c_0=\gamma^2\delta(\rho-1)\sin^2\theta-\delta_1\cos\theta\\c_1=-(\rho-1)\delta\delta_1[a\cos^2\theta+\\+\gamma\cos\theta_1\cos(\theta-\theta_1)]-b\\c_2=-(\rho-1)[ab\delta+a\delta_1\cos^2\theta_1+\\+\delta\gamma(\beta\cos\theta+a\gamma\sin^2\theta)]\\c_3=-(\rho-1)ab\\d_4=b_3,\quad d_3=b_2+sb_3,\quad d_2=b_1+\\+sb_2,\quad d_1=b_0+sb_1,\quad d_0=sb_0\\M_4=c_3^2d_0(d_1d_2-d_0d_3)+(c_2^2-2c_1c_3)d_0d_1d_4+\\+(c_1^2+2c_0c_2)d_0d_3d_4+c_0^2d_4(d_2d_3-d_1d_4)\end{gathered}$$




На фигуре представлены кривые равной дисперсии $v_5$ на плоскости коэффициентов демпфирования $\delta$ и $\delta_1$ при значениях параметров $\alpha=0.26$, $\beta=0.4$, $\gamma=0.375$, $\rho=4$, $\theta=90°$, $R_f=1$, $s=1$. Область неустойчивости заштрихована.

Поступила 19 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пятецкий В. А.* О вынужденных случайных колебаниях неголономных систем. Прикл. механика, 1970, т. 6, вып. 8.
2. *Николенко И. В., Пятецкий В. А., Хилькевич И. И.* Об одной задаче динамики неголономных систем со случайными возмущениями. Прикл. механика, 1973, т. 9, вып. 1.
3. *Мусарский Р. А., Фуфаев Н. А.* Динамика простейшей модели колесной машины при случайных воздействиях. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
4. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.