МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1980

УДК 531.39

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

(*Москва*)

При движении твердого тела относительно центра масс в ряде случаев существенное значение имеют внутренние степени свободы,– собственная упругость тела и внутренняя диссипация. Так, в работах [1, 2] наблюдались и анализировались некоторые эффекты такого рода в динамике спутников. В ряде работ, например [3–8], исследовались вопросы динамики твердого тела, содержащего упругие и диссипативные элементы.

Ниже рассматривается движение твердого тела, содержащего массу сплошной вязкоупругой среды (материал Кельвина – Фойгта). Тело предполагается обладающим малой податливостью: частоты его собственных колебаний много больше угловой скорости вращения. Показано, что при некоторых общих предположениях влияние внутренней упругости и диссипации сводится к действию на вспомогательное абсолютно твердое тело (тело с замороженными деформациями) возмущающих моментов, состоящих из однородных многочленов 4-й и 5-й степеней от компонентов угловой скорости тела. Ранее аналогичные результаты были получены в [6], [8] для твердого тела с конечным числом степеней свободы.

1. Рассмотрим движение механической системы S, состоящей из абсолютно твердого тела D_0 и деформируемого тела D, которые жестко соединены друг с другом. Сначала предположим, что тело имеет неподвижную точку O, связанную с D_0, и на него не действуют внешние силы и моменты (кроме реакции связи в точке O). Обозначим через r текущий радиус-вектор, отсчитанный от точки O, через $u(r, t)$ – вектор смещения точек системы S в системе координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с телом D_0. Введем вспомогательную систему S_0 – абсолютно твердое тело, в котором деформации отсутствуют (u=0). Его тензор инерции относительно точки O обозначим через J. Тензор J постоянен в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Примем, что деформируемое тело D подчиняется уравнениям линейной вязкоупругой среды Кельвина – Фойгта [9]:

$$\sigma=G[\sigma'(\mathbf{u})+\tau\sigma''(\dot{\mathbf{u}})]\tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}'=2e_{ij}+2\mu(1-2\mu)^{-1}\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{u}\qquad(i, j=1, 2, 3)$$

$$\sigma_{ij}''=2\dot{e}_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}},\quad e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Здесь σ – тензор напряжений, складывающийся из упругих и вязких напряжений, G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона, τ – постоянная размерности времени (время релаксации при сдвиге). Точка в (1.1) и далее всюду обозначает частную производную по t в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Уравнения движения среды (1.1) в области D запишем в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ с учетом сил инерции

$$\rho G^{-1}[\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}]=$$
$$=\Delta\mathbf{u}+(1-2\mu)^{-1}\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\tau(\Delta\mathbf{u}^{\cdot}+{}^1/_3\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^{\cdot}) \qquad (1.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости системы $Ox_1x_2x_3$, ρ — плотность среды в недеформированном состоянии. Граничные условия имеют вид

$$\mathbf{u}=0 \text{ на } \Gamma_1,\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}=0 \text{ на } \Gamma_2 \qquad (1.3)$$

где Γ_1 — граница тел D и D_0, Γ_2 — свободная часть границы тела D, $\mathbf{n}$ — нормаль к D.

Обозначим через $OX_1X_2X_3$ неподвижную систему координат, начало которой находится в точке O, а оси движутся поступательно. Кинетический момент $\mathbf{K}$ системы S относительно полюса O равен

$$\mathbf{K}=\int\limits_{D_0+D'}\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{u}^{\cdot})\rho'\,dv=\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}+\mathbf{k}$$
$$\mathbf{k}=\int\limits_{D'}\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{u}^{\cdot})\rho'\,dv-\int\limits_{D}\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\rho\,dv \qquad (1.4)$$

Здесь ρ, D — плотность среды и занимаемая ею область в недеформированном состоянии, штрихи относятся к деформированному состоянию. В рассматриваемом случае малых деформаций имеем $\rho'=\rho(1-\mathrm{div}\,\mathbf{u})$, и выражение (1.4) для $\mathbf{k}$ преобразуется к виду

$$\mathbf{k}=\int\limits_{D}[\mathbf{r}\times\mathbf{u}^{\cdot}-\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}]\rho\,dv+\oint\limits_{\Gamma}\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})(\mathbf{u}\mathbf{n})\rho\,ds$$

где $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к границе Γ области D. Заменяя интегрирование по Γ интегрированием по D, получим

$$\mathbf{k}=\int\limits_{D}[\mathbf{r}\times\mathbf{u}^{\cdot}+(\mathbf{u}\nabla)(\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}))]\rho\,dv=$$
$$=\int\limits_{D}[\mathbf{r}\times\mathbf{u}^{\cdot}+\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u})+\mathbf{u}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]\rho\,dv \qquad (1.5)$$

Кинетический момент $\mathbf{K}$ системы S сохраняется, поэтому в подвижной системе $Ox_1x_2x_3$ справедливо уравнение

$$\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega}^{\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega})=\mathbf{M},\quad \mathbf{M}=-\mathbf{k}^{\cdot}-\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k} \qquad (1.6)$$

Здесь $\mathbf{k}$ определено равенством (1.5). Величина $\mathbf{M}$ в (1.6) имеет смысл возмущающего момента, действующего на вспомогательное твердое тело S_0, и обусловлено собственной упругостью и диссипацией.

2. Составим уравнения, аналогичные (1.2), (1.6), в другом случае движения, когда тело S свободно: на него не действуют внешние силы и моменты. В качестве точки O, связанной с D_0, возьмем центр инерции вспомогательного тела S_0, так, что

$$\int\limits_{D_0+D}\mathbf{r}\rho\,dv=0 \qquad (2.1)$$

Начало систем координат $OX_1X_2X_3$ и $Ox_1x_2x_3$ теперь движется с ускорением $\mathbf{w}_0$ точки O, поэтому в уравнение (1.2) добавляется одно слагаемое, и оно принимает вид

$$\rho G^{-1}[\mathbf{w}_0+\mathbf{u}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})+\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^{\cdot}]=$$
$$=\Delta\mathbf{u}+(1-2\mu)^{-1}\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\tau(\Delta\mathbf{u}^{\cdot}+{}^1/_3\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^{\cdot}) \qquad (2.2)$$

Кинетический момент $\mathbf{K}$ имеет прежний вид (1.4), но теперь он представляет собой момент относительно полюса O количества движения системы S в системе координат $OX_1X_2X_3$, оси которой движутся поступательно. Поэтому в правую часть уравнения моментов (1.6) следует добавить главный момент относительно точки O сил инерции, обусловленных движением системы $OX_1X_2X_3$. Этот момент равен

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{w}_0\times\int\limits_{D_0+D'}\mathbf{r}\rho' dv=\mathbf{w}_0\times\mathbf{r}_c \tag{2.3}$$

где $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра инерции системы S относительно точки O.

Преобразованиями, аналогичными тем, которые применялись при выводе формулы (1.5) для $\mathbf{k}$, нетрудно получить

$$\mathbf{r}_c=\int\limits_{D_0+D'}\mathbf{r}\rho' dv=\int\limits_{D}\mathbf{u}\rho dv \tag{2.4}$$

Здесь использовано условие (2.1). В рассматриваемом случае движения абсолютное ускорение центра инерции равно нулю. Представляя его как ускорение сложного движения, получим равенство для $\mathbf{w}_0$:

$$\mathbf{w}_0=-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c)-\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{\cdot}}\times\mathbf{r}_c-2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_c^{\boldsymbol{\cdot}}-\mathbf{r}_c^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} \tag{2.5}$$

Итак, дополнительный член $\mathbf{w}_0$ в уравнении (2.2) выражается через $\mathbf{u}$ соотношениями (2.4), (2.5). В рамках малых деформаций вектор $\mathbf{u}$ и его производные по $\mathbf{r}$, t считаются малыми первого порядка, а малыми второго порядка следует пренебречь. Но из (2.4), (2.5) следует, что $\mathbf{r}_c$, $\mathbf{w}_0$ — малые первого порядка, поэтому $\mathbf{M}_1$ в (2.3) есть малая второго порядка. Следовательно, в уравнении (1.6) не появляется дополнительных слагаемых, и оно применимо и в рассматриваемом случае. Ниже оба случая движения (движение вокруг неподвижной точки O при нулевом внешнем моменте и свободное движение) рассматриваются параллельно.

3. Предполагаем, что справедливы соотношения

$$G=\varepsilon^{-2}G^\circ,\quad \tau=\varepsilon\delta\tau^\circ,\quad \omega^{-1}\sim\tau^\circ,\quad \varepsilon\ll\delta\ll 1 \tag{3.1}$$

где G°, τ° — ограниченные величины, а ε, δ — безразмерные малые параметры. Из (3.1) вытекает, что наибольший период T_1 собственных упругих колебаний, характерное время их затухания T_2 и характерное время T_3 движения системы как целого относительно центра масс связаны соотношениями

$$T_1\sim\varepsilon\tau^\circ,\quad T_2\sim\varepsilon\delta^{-1}\tau^\circ,\quad T_3\sim\omega^{-1}\sim\tau^\circ,\quad T_1\ll T_2\ll T_3 \tag{3.2}$$

Условиям (3.2) можно придать вид $c\gg lT_2^{-1}\gg V$, где c — характерная скорость упругих волн, V — линейная скорость вращения тела, l — его линейный размер. Отметим, что условия (3.1), (3.2) исключают возможность резонанса между упругими колебаниями тела и его вращением как целого.

При условиях (3.1), (3.2) свободные упругие колебания системы S быстро затухнут и вдали от начального момента времени t_0, при $t-t_0\sim T_3$, ими можно пренебречь. Решение системы (1.2) или (2.2), (2.4), (2.5) с граничными условиями (1.3) при заданном $\omega(t)$ сведется к вынужденным движениям, которые можно на основании (3.1) представить в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\varepsilon^2\mathbf{u}^{(0)}+\varepsilon^3\delta\mathbf{u}^{(1)}+O(\varepsilon^4)=\rho G^{-1}[\mathbf{u}^\circ(\mathbf{r},t)+\tau\mathbf{u}^1(\mathbf{r},t)]+O(\varepsilon^4) \tag{3.3}$$

Подставим разложение (3.3) в уравнения (1.2) (или (2.2), (2.4), (2.5)) и граничные условия (1.3). Получим, что функции $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}^1$ удовлетворяют квазистатическим задачам теории упругости

$$\Delta \mathbf{u}^\circ + (1-2\mu)^{-1}\nabla \operatorname{div}\mathbf{u}^\circ = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega}^\cdot\times\mathbf{r}$$

$$\mathbf{u}^0 = 0 \text{ на } \Gamma_1,\ \sigma'(\mathbf{u}^0)\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_2 \tag{3.4}$$

$$\Delta \mathbf{u}^1 + (1-2\mu)^{-1}\nabla \operatorname{div}\mathbf{u}^1 = -\Delta(\mathbf{u}^\circ)^\cdot - {}^1\!/_3\nabla \operatorname{div}(\mathbf{u}^\circ)^\cdot$$

$$\mathbf{u}^1 = 0 \text{ на } \Gamma_1,\ \sigma'(\mathbf{u}^1)\cdot\mathbf{n} = -\sigma''((\mathbf{u}^\circ)^\cdot)\cdot\mathbf{n} \text{ на } \Gamma_2 \tag{3.5}$$

Время входит здесь как параметр.

Отметим, что слагаемые $\mathbf{u}^{\cdot\cdot}$, $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{u}^\cdot$, $\mathbf{w}_0$ в левых частях уравнений (1.2), (2.2) не влияют на первые два члена разложения (3.3) и не фигурируют в задачах (3.4), (3.5). Поэтому в дальнейшем оба случая не различаются.

Решив задачи (3.4), (3.5), подставим (3.3) в соотношения (1.5), (1.6). Получим $\mathbf{k}\sim\varepsilon^2$, $\mathbf{M}\sim\varepsilon^2$, поэтому, согласно (1.6),

$$\boldsymbol{\omega}^\cdot = -\mathbf{J}^{-1}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega})] + O(\varepsilon^2) \tag{3.6}$$

При помощи (3.6) можно выразить производные $\boldsymbol{\omega}^\cdot$, $\boldsymbol{\omega}^{\cdot\cdot}$ и т. д. через $\boldsymbol{\omega}$ с погрешностью $\sim\varepsilon^2$ вдали от начального момента времени. Тогда правая часть уравнения (3.4) будет однородной квадратичной формой от $\boldsymbol{\omega}$, и поэтому такую же структуру будет иметь и решение $\mathbf{u}^\circ$ задачи (3.4). Аналогичные рассуждения показывают (с учетом (3.6)), что $\mathbf{u}^1$ — однородный многочлен 3-й степени от $\boldsymbol{\omega}$, вектор $\mathbf{k}$ из (1.5) содержит многочлены 3-й и 4-й степеней от $\boldsymbol{\omega}$. Возмущающий момент $\mathbf{M}$ в (1.6) представляется в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_4(\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_5(\boldsymbol{\omega}) + O(\varepsilon^4)$$

$$\mathbf{M}_4(\boldsymbol{\omega}) = \rho G^{-1}\sum_{i,j,k,l=1}^{3}\mathbf{A}_{ijkl}\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l = O(\varepsilon^2) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{M}_5(\boldsymbol{\omega}) = \tau\rho G^{-1}\sum_{i,j,k,l,m=1}^{3}\mathbf{B}_{ijklm}\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l\omega_m = O(\varepsilon^3\delta)$$

Величины $\mathbf{A}_{ijkl}$, $\mathbf{B}_{ijklm}$ постоянны в системе координат, связанной с телом. Для их вычисления нужно решить статические задачи теории упругости (3.4), (3.5) и затем подсчитать $\mathbf{k}$, $\mathbf{M}$, как указано выше. Поэтому $\mathbf{A}_{ijkl}$, $\mathbf{B}_{ijklm}$ аналогичны присоединенным массам в случае идеальной жидкости и вязким присоединенным массам [10]; они зависят от формы области D, от границ Γ_0, Γ_1 в (1.3), а также от $\mathbf{J}$ и μ.

Для сравнения отметим, что в случае тела с полостью, содержащей вязкую жидкость при больших числах Рейнольдса [10], аналогичный возмущающий момент есть многочлен 3-й степени от $\boldsymbol{\omega}$. Для некоторых областей: эллипсоида [11], а также для стержней и пластин решения задач (3.4), (3.5) известны или могут быть построены в явном виде.

После вычисления $\mathbf{A}_{ijkl}$, $\mathbf{B}_{ijklm}$ задача сводится к интегрированию уравнений (1.6) движения твердого тела S_0 вокруг неподвижной точки при наличии возмущающих моментов (3.7). Решение таких уравнений строилось в [6, 7], где исследовалось движение тела с конечным числом внутренних степеней свободы. В результате диссипации энергии движение тела перестраивается, стремясь к единственному устойчивому движению [12] — вращению вокруг оси наибольшего момента инерции. Характерное время этого переходного процесса оценено в [6] и равно $T\sim\Omega^4\omega^{-4}\lambda^{-1}$, где Ω — низшая частота собственных упругих колебаний, $\lambda = T_2^{-1}$, где T_2 — характерное время их затухания. В обозначениях (3.1), (3.2) получим следующие равносильные оценки времени переходного процесса:

$$T \sim \frac{T_3{}^4 T_2}{T_1{}^4} \sim \frac{\tau^\circ}{\varepsilon^3\delta} \sim \frac{\Omega^2}{\omega^4\tau} \tag{3.8}$$

Здесь предполагается, что все главные моменты инерции и их разности — величины одного порядка; в противном случае формула (3.8) содержит дополнительный коэффициент (см. [6]).

Движение вязкоупругого твердого тела под действием сил и моментов общего вида может быть рассмотрено аналогично. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение вспомогательного твердого тела S_0 с возмущающими силами и моментами. Зависимость этих сил и моментов от координат и скоростей твердого тела S_0 носит сложный характер. Подобный вывод для случая тела с конечным числом степеней свободы дан в работе [8].

Поступила 16 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thomson W. T.* Introduction to space dynamics. N. Y.— London, Wiley, 1961.
2. *Colombo G.* The motion of satellite 1958 Epsilon around its center of mass. The Smithsonian Contributions to Astrophysics, 1963, vol. 6, p. 149—163.
3. *Морозов В. М., Рубановский В. Н., Румянцев В. В., Самсонов В. А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
4. *Диментберг Ф. М., Панкова Н. В.* Фазовое изображение колебаний осциллятора на свободной платформе. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
5. *Ганиев Р. Ф., Кононенко В. О.* Колебания твердых тел. М., «Наука», 1976.
6. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с подвижными внутренними массами. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
7. *Лещенко Д. Д.* О движении твердого тела с подвижной точечной массой. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
8. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами. ПММ, 1978, т. 42, вып. 1.
9. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
10. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., ВЦ АН СССР, 1968.
11. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
12. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.