

УДК 531/534.061.6

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ  
СЕМИНАРЫНаучно-исследовательский семинар кафедры теории упругости  
под руководством А. А. Ильюшина:

14 II 1979. А. Г. Костюченко (Москва). *Задача теории упругости о полубесконечном цилиндре.*

В докладе изучаются спектральные свойства некоторых самосопряженных квадратичных пучков, возникающих при разделении переменных в задаче о колебаниях и равновесии упругого полумоноцилиндра.

21 II 1979. И. А. Кийко (Москва). *Пластическое течение тонкого слоя в условиях теплообмена.*

Слой пластического материала, будучи нагретым до некоторой температуры, в начальный момент времени вступает в контакт с холодными массивными телами, ограниченными параллельными плоскостями. Тела сближаются вдоль нормали к плоскостям, заставляя слой растекаться (исследуется случай плоской деформации). Поскольку происходит интенсивный теплообмен, а предел текучести материала слоя считается зависящим от температуры, в приконтактных зонах слоя предел текучести может повыситься настолько, что течение в них прекратится и сконцентрируется в центральной части слоя. Основная трудность задачи сводится к тому, чтобы определить границу, разделяющую пластически деформируемый материал и затвердевший. В такой постановке задача сформулирована А. А. Ильюшиным; им же дано ее решение, основанное на так называемом постулате твердения: граница затвердевания отвечает минимуму мощности, потребной для сжатия слоя.

В докладе показано, что если предположить единственность решения и считать, что области твердения примыкают к поверхностям контакта, решение задачи может быть получено без привлечения постулата твердения, и оно совпадает с решением А. А. Ильюшина.

28 II 1979. А. В. Геммерлинг (Москва). *Устойчивость сложных стержневых систем из нелинейно-упругого материала.*

Из линейной теории расчета на устойчивость статически неопределимых рам следует, что критическое состояние достигается одновременно как всей рамой, так и каждым из ее стержней. Это следствие равенства нулю определителя матрицы коэффициентов однородных канонических уравнений системы. Такой результат исключает возможность частичных форм потери устойчивости, при которых часть рамы остается в устойчивых состояниях равновесия. Этот результат противоречит экспериментальным данным и опыту аварий.

Критическое состояние рамы наступает в результате достижения критической формы или величины деформации одним или группой стержней, в результате чего отпорность рамы по какому-то направлению становится нулевой. Это эквивалентно утрате рамой каких-то внутренних или внешних связей. Таким образом в этот момент рама становится качественно отличной от первоначальной. Начиная с этого момента нужно рассматривать новую расчетную модель рамы, лишенную связей, достигших критического деформирования. В такой раме возможны три группы стержней: достигшие критической деформации, теряющие устойчивость положения и остающиеся в состоянии устойчивого равновесия. Матрица коэффициентов для такой расчетной модели развивается на два или три блока.

Результаты такого расчета хорошо согласуются с экспериментами.

7 III 1979. Б. И. Завойчинский (Москва). *Основные положения теории предельных процессов нагружения.*

Случайный процесс  $\Phi(t)$  характеризует уровень достижения предельного состояния элемента.

Предполагается существование случайной функциональной связи между векторами прочности и напряжения, представляемой каноническим разложением по де-

терминированным функционалам. В качестве таких функционалов рассматриваются линейные интегральные операторы Гильберта — Шмидта. Действие такого оператора на синусоидальное нагружение определяет функцию прочности:  $\Phi[t, \sin \omega t]_{-\infty}^{\infty} = \psi(\omega, \omega t) \sin \omega t$ . Функция  $\psi$  является неубывающей функцией частоты и невозрастающей функцией числа циклов. С помощью интегрального преобразования Фурье и функции прочности находится конкретный вид функционала прочности. Это выражение конкретизируется для случая нагружения, описываемого функцией ограниченной вариации. В общем случае функции прочности различны для сдвига, гидростатического нагружения и отрыва. Приводится система простейших экспериментов для их нахождения. Исследуется взаимосвязь длительной и циклической прочности, влияние асимметрии цикла на предел усталости. Установлены особенности прочности при симметричном импульсном и трапецеидальном нагружениях.

14 III 1979. Н. А. Новиков (Воронеж). *Экспериментальные методы исследования кинематики пластического деформирования.*

Рассматриваются методы делительных сеток, муаровых полос, выявления волокнистой макроструктуры, микроструктурного анализа. Показывается, что известные методики определения кинематики являются частными вариантами предложенных общих методик. Приводятся выражения для некоторых характеристик точности и разрешающей способности методов. При малых деформациях и скоростях деформаций указанные выражения упрощаются и позволяют оценить чувствительность методов. Рассматривается задача о построении методик обработки опытных данных, обеспечивающих необходимую точность расчета кинематики.

21 III 1979. В. С. Ленский (Москва). *Новое в исследованиях законов и постановок краевых задач общей теории пластичности.*

В рамках теории упругопластических процессов А. А. Ильющина экспериментальные исследования помимо углубления физических основ теории направлены на получение информации о свойствах материалов, которые необходимы непосредственно для решения прикладных задач. С этой точки зрения представляют интерес данные опытов И. Охашы (Япония) о векторных и скалярных свойствах материалов в двухзвенных упругопластических процессах с углами излома больше  $90^\circ$ . Им проведены также опыты по разнообразным программным плоским траекториям деформации, в которых установлено согласие с экспериментом гипотезы локальной определенности.

Даны и исследованы постановки краевых задач применительно к двухзвенным упругопластическим процессам (С. Неджеску — Клежа) и процессам малой кривизны (Г. Л. Бровко). Поскольку теоремы, аналогичные теореме о простом нагружении, не доказаны, отсутствует априорная оценка физической достоверности решения этих краевых задач.

Гипотеза локальной определенности векторный функционал пластичности определяет как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые содержат функции (не функционалы), структура которых устанавливается экспериментально. Аналогичное описание скалярного функционала отсутствует. Как показали опыты, зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_u$  от длины дуги траектории деформации  $s$  даже в весьма сложных активных процессах отличается от универсальной функции  $\sigma_u = \Phi(s)$ , определяемой при простой деформации, не более чем на 8–10%.

Используя эти данные, предлагается постановка краевой задачи пластичности при произвольном сложном активном нагружении, в которой в уравнениях состояния используются обыкновенные дифференциальные уравнения гипотезы локальной определенности с соответствующими начальными условиями и универсальная зависимость  $\sigma_u = \Phi(s)$ . При этом можно ожидать получение достаточно точного результата (с указанной выше возможной погрешностью) в задачах, в которых не существенно знание производной  $d\sigma_u/ds$ :

28 III 1979. А. Н. Спорыхин (Воронеж). *Теория и задачи устойчивости деформирования сложных сред.*

Развита трехмерная теория устойчивости сложных неупругих сред при малых и больших докритических деформациях. Для однородных докритических состояний построены общие решения трехмерных уравнений устойчивости и на их основе исследована устойчивость деформирования однородных тел — стержней, пластин и оболочек. Исследованы процессы устойчивости деформирования тел при неоднородных докритических состояниях и некоторые задачи теории горного давления. Выявлено влияние механических параметров сложных сред (вязкости, упрочнения, скорости дилатансии и т. д.), характера поведения нагрузки, сил инерции и др. на величину критических характеристик. Установлены области применимости различных вариантов теорий устойчивости конечно-деформируемых упругопластических тел в прикладных задачах. Развита теория устойчивости нелинейно-упругих и вязкоупругих сред при конечных возмущениях. Выяснен механизм потери устойчивости «в большом» и установлены границы применимости трехмерной линеаризованной теории.

Развивается теория устойчивости сред со случайными неоднородностями при детерминированных внешних нагрузках. Рассматриваются вопросы применения операторного метода решения и способы перехода к ранее полученным характеристическим определителям. Установлена зависимость критических величин от средних и дисперсионных характеристик параметров среды в случае малых и конечных докритических деформаций.

4 IV 1979. Д. Д. Ивлев (Москва). *Об интегральных неравенствах в теории пластичности.*

В докладе рассматриваются взаимосвязь и следствия различных интегральных соотношений теории пластичности в пространствах напряжений и деформаций, лежащих в основе определяющих постулатов теории пластичности.

11 IV 1979. С. А. Елсуфьев (Ленинград). *Исследование прочности и деформативности элементов конструкций из термопластов.*

На основе результатов опытов по деформированию группы полимерных материалов (фторопласт, капролон, полиэтилен и др.) в условиях сложного напряженного состояния при небольших деформациях ползучести предложено удобное для практических приложений квазилинейное уравнение связи между напряжениями и деформациями, учитывающее расхождение кривых деформирования в координатах Мизеса.

Указанное уравнение использовано для изучения процесса устойчивости деформирования элементов конструкций на основе критерия бесконечной скорости деформирования в момент начала локализации деформаций. Выявлено удовлетворительное согласие предсказываемых этим критерием значений предельных деформаций и времени разрушения с опытными данными по исчерпанию предельной несущей способности тонкостенных полимерных труб, нагруженных продольной силой и внутренним давлением.

18 IV 1979. И. Д. Грудев (Москва). *Уравнения изгиба и растяжения коротких балок и толстостенных оболочек.*

Исследован вопрос составления замкнутой системы уравнений произвольного порядка сначала для балки, потом для осесимметричной оболочки. Показано, что ряды для различных компонент напряжений и перемещений должны иметь разную длину. Для первого порядка проведено сравнение с классическими уравнениями, в основе которых лежат гипотезы Кирхгофа — Лява. Полученные уравнения отличаются от классических только правыми частями: производными от нагрузок. При постоянных нагрузках уравнения тождественно совпадают.

Рассмотрен вопрос формулировки краевых задач, в том числе с неопределенными границами и с краевыми условиями, заданными в виде асимптотик. Решена задача о напряженном состоянии газоохладителя, состоящего из двух коаксиальных труб разной толщины, соединенных тороидальным доннышком переменной толщины.

16 V 1979. А. Л. Скубачевский (Москва). *Нелокальные эллиптические краевые задачи, возникающие в теории упругости.*

В теории упругости возникает задача об исследовании деформаций трехслойной пластины специального вида, несущие слои которой связаны регулярной системой вертикальных и наклонных ребер. Применяя «континуальный» подход, т. е. размазывая ребра в пространстве между пластинами, можно эту задачу свести к задаче о минимуме функционала потенциальной энергии двух переменных с отклонениями аргумента. Указанная задача была поставлена Г. Г. Онановым.

В докладе излагаются результаты изучения математической модели упругого равновесия упомянутой тонкостенной конструкции. Показано, что вектор-функция  $u$  тогда и только тогда доставляет минимум квадратичному функционалу потенциальной энергии, когда она является обобщенным решением краевой задачи для некоторой системы дифференциально-разностных уравнений. Эта система уравнений обладает свойствами, аналогичными сильной эллиптичности. Отсюда вытекает: существование и единственность решений краевой задачи в пространствах Соболева  $W_2^1$ ; дискретность, конечнократность и полуограниченность спектра соответствующего дифференциально-разностного оператора; сходимость метода Рунца.

В докладе приводится также теорема о локальной гладкости обобщенных решений в пространствах  $W_2^2$ .

23 V 1979. В. С. Никишин (Москва). *Корректная постановка основных и смешанных задач теории упругости для многослойных и непрерывно-неоднородных по глубине сред.*

Рассматривается теория и методы численного решения широкого класса пространственных и плоских задач теории упругости для многослойных и непрерывно-неоднородных по глубине сред общего вида при однородных и смешанных краевых условиях. На границах слоев принимаются условия жесткого сцепления или соприкосновения без трения. Дано обоснование корректной постановки первой основной задачи теории упругости: доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решений трехмерной, осесимметричной и плоской задач, сконструированных с помощью интегральных преобразований Фурье и Ханкеля.

Построены и изучены решения класса осесимметричных смешанных задач: основной смешанной задачи с разделом краевых условий на совокушности произвольного числа концентрических окружностей; контактных задач для кругового и системы концентрических кольцевых в плане штампов при наличии трения Кулона или без трения на площадках контакта; задач для круговой и системы концентрических кольцевых щелей, расположенных на границе любой пары соседних слоев или внутри слоя.

Все задачи сведены к системе сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши или регулярных интегральных уравнений в двух разных формах, позволяющих выделить в явном виде особенности напряжений на всех контурах раздела краевых условий.

Указанные постановки осесимметричных смешанных задач перенесены на аналогичные плоские смешанные задачи для системы параллельных полосовых штампов и щелей, которые единым методом сведены к сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши, определенным в общем случае на системе отрезков. Разработан метод решения контактных задач с учетом односторонних связей как между соседними слоями, так и между подошвой штампа и слоистой средой.

Разработанные методы иллюстрируются многочисленными примерами численного решения основных и смешанных задач, представляющих теоретический и практический интерес.

30 V 1979. Р. М. Мансуров, В. К. Тринчер (Москва). *О многопараметрическом описании усталостных изменений.*

Рассматривается циклическое симметричное (растяжение — сжатие) усталостное нагружение. Усталостные изменения, описываемые введенными А. А. Ильюшиным тензорами повреждения, в этом случае можно описать в скалярной форме. Эти изменения предлагается описывать (как обобщение подхода В. В. Болотина) системой  $k$  кинетических уравнений  $dD_i/dn = f_i(D_i, \tau)$  относительно  $k$  параметров  $D_i$ . Здесь

$n$  — число циклов,  $\sigma(n)$  — амплитуда нагружения. Разрушение наступает в момент пересечения траектории  $D_i(n)$  с определенной поверхностью разрушения в  $k$ -мерном пространстве  $D_i$ . Приводится некоторый анализ следствий предложенной постановки. Показано, что простейший вариант такой постановки, а именно двухпараметрический вариант с несвязанными кинематическими уравнениями, позволяет описать эффект абсолютного упрочнения при одноступенчатом нагружении. Построен пример функций  $f_1$  и  $f_2$ , при которых достигается двухкратное увеличение долговечности после предварительного циклического нагружения на меньшем уровне напряжения.

6 VI 1979. О. А. Шишмарев, А. Г. Щербо. (Новополоцк). *Экспериментальное исследование образа процесса для двухзвенной ломаной с углом излома более 90°.*

Рассматриваются результаты испытаний тонкостенных трубчатых образцов нержавеющей стали 1X18H10T и стали 10 при одновременном растяжении и кручении, проведенных с целью исследования образа процесса нагружения при сложных путях деформирования с изломом траектории на тупой угол. В образцах после сообщения им путем закручивания одинаковой начальной деформации, интенсивность которой составляла 1.9%, создавались под различными углами к направлению первоначального деформирования (95, 110, 125, 145, 160°) траектории деформаций, в различных точках которых строились векторы истинных напряжений. Получены графики зависимости углов сближения от угла излома траектории и длины ее участка от рассматриваемой точки до точки излома. Установлено, что с ростом угла излома траектории увеличивается скорость изменения текущего угла сближения и существенно укорачивается длина следа запаздывания векторных свойств  $\lambda_b$  (для угла излома  $\alpha_0=90^\circ$ ,  $\lambda_b=1.8\%$ ; для  $\alpha_0=160^\circ$ ,  $\lambda_b=0.45\%$ ).

Для исследования запаздывания скалярных свойств на образцах стали 10 были проведены аналогичные эксперименты с той лишь разницей, что в точках второго звена определялись не векторы напряжений, а лишь их модули  $\sigma$ . По кривым зависимости между  $\sigma_i$  и длиной траектории деформации определялись длины следа запаздывания скалярных свойств  $\lambda_c$ . Выявлено, что с увеличением угла излома траектории  $\lambda_c$  возрастает, а при углах более 140° становится равной бесконечности.

13 VI 1979. И. И. Калужский, Ю. М. Арышенский, В. Ю. Арышенский. (Куйбышев). *К теории пластичности ортотропных сред.*

Рассмотрен вариант теории пластичности анизотропных сред с анизотропным упрочнением, в основе которого лежит обобщенный критерий Р. Мизеса. Получена замкнутая система определяющих уравнений. Исследована структура материальных тензоров в упругой и пластических областях. Установлена пропорциональность их девиаторов, что позволило найти связь между упругими и пластическими показателями анизотропии. Получено представление ортотропного девиатора с небольшим числом параметров, входящих в его структуру. Выведены соотношения, связывающие коэффициенты поперечной деформации различных направлений, которые прошли экспериментальную проверку по данным советских и зарубежных исследователей. Показано, что из предложенных соотношений следуют некоторые известные частные случаи теории пластичности анизотропных сред. Экспериментальная проверка отдельных положений производилась на листовых и трубчатых образцах из материалов различных структурных групп и марок. Она показала приемлемость деформационной теории для процессов листовой штамповки.

20 VI 1979. В. В. Дорогинин. (Москва). *Некоторые вопросы оптимизации в слоистых композитах.*

Получено точное решение для однородного диска с цилиндрической анизотропией, подверженного действию двух сосредоточенных сил. Выписана последовательность задач анизотропной теории упругости, сводящая решение неоднородной задачи о диске (с кусочно-постоянными модулями упругости) к однородной задаче теории упругости. Предложены критерии оптимизации упругих свойств слоистого диска в зависимости от нагрузки и числа слоев.

20.VI.1979. Н. Н. Сулова (Москва). *Постановка статических задач теории упругости в дисторсиях.*

Предлагается новая постановка статических задач теории упругости для анизотропного тела, заключающаяся в отыскании непрерывно-дифференцируемого потенциального тривектора дисторсий, удовлетворяющего в области тела системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка по заданным на границе его касательным составляющим или по заданным «обобщенным» нормальным составляющим. Существование решения доказывается путем сведения к первой и второй основным задачам в перемещениях. Доказана теорема единственности решения. Сформулирован вариационный принцип условного минимума потенциальной энергии, выраженной через компоненты тензора дисторсий из поля непрерывно-дифференцируемых функций. Показано, что множители Лагранжа связаны с функциями напряжений Круктова. Показана эквивалентность предлагаемой постановки в дисторсиях и вариационной постановки.

Б. Е. Победря

Семинар по механике деформируемого твердого тела  
под руководством Ю. Н. Работнова, Л. А. Галина, Г. С. Шапиро, В. Д. Ключникова

10 IX 1979. Л. Г. Попов (Москва). *Возможные формы соотношений пластичности и свойства пластического течения.*

Изучены возможности построения определяющих соотношений в пространстве деформаций в рамках гладкой и сингулярной предельной поверхности, исходя из общепринятых постулатов пластичности. Показаны характерные особенности, возникающие при таком подходе к построению соотношений пластичности в отличие от их традиционного построения в пространстве напряжений. Обнаружено одно специфическое ограничение на функции упрочнения, достаточное для доказательства некоторых общих теорем.

Особое внимание уделено теории, основанной на обобщении модельного представления Ю. Н. Работнова, естественным образом учитывающей эффект Баушингера. При сложных траекториях деформирования получены выражения, проинтегрированные в конечном виде, достаточно хорошо количественно и качественно описывающие широкий класс свойств упругопластического деформирования.

На основе предложенных соотношений проведен анализ потери устойчивости пластин. Показано, что бифуркация процесса деформирования происходит таким образом, что участвуют лишь дифференциально-линейные соотношения между приращениями напряжений и деформаций, что существенно упрощает задачу определения критических параметров.

24 IX 1979. Г. И. Литинский (Москва). *Методы расчета критической скорости качения пневматических шин.*

Критическая скорость качения пневматических шин определялась как минимальная фазовая скорость распространения стационарных волн по вращающейся шине в окружном направлении.

Для диагональной шины в качестве расчетной модели использована безмоментная сетчатая оболочка. Анализ дисперсии стационарных волн на ней проведен численным методом. Скорость распространения коротких волн определялась асимптотическим методом ВКБ. На основе анализа дисперсии стационарных волн объяснено возникновение длинных волн на широкопрофильных диагональных шинах. Предложен метод приближенного учета влияния изгибной жесткости стенки шины на ее критическую скорость.

Показано, что для радиальных шин критическая скорость определяется минимальной скоростью распространения стационарных волн по ее боковой стенке, и построен метод расчета критической скорости радиальных шин.

Адекватность предложенных расчетов моделей рассматриваемому явлению и точность методов расчета критической скорости обоснована систематическим сопоставлением расчетных и экспериментальных данных.

1 X 19759. В. Д. Кулиев (Москва). *Некоторые прикладные и теоретические проблемы механики разрушения.*

Рассмотрены проблемы прочности и долговечности деформируемых твердых однородных и кусочно-однородных тел.

Построена теория докритического роста усталостных трещин. Эта теория позволила разработать эффективный метод определения усталостной прочности элементов конструкций с учетом влияния амплитуды нагружения, частоты нагружения, асимметрии цикла, температуры, окружающей среды и др.

Построена теория «горячих» трещин. Рассмотрены задачи о начальном развитии полос скольжения. Решение этих задач позволило определить процесс зарождения усталостных трещин, исследовать развитие микротрещин, определить долговечность твердых тел в стадии малоциклового усталости и найти связь между характеристиками трещиностойкости материала с критической длиной полос скольжения. Для понимания механизмов усталостного разрушения возникла необходимость исследования некоторых новых задач механики разрушения кусочно-однородных сред: рассмотрены вопросы торможения и ответвления трещины, находящейся на границе раздела двух упругих сред, раздвоения трещины продольного сдвига перпендикулярной границе раздела двух упругих сред и др. Решение многих задач построено точным аналитическим методом.

15 X 1979. В. А. Минаев (Воронеж). *Об устойчивости процессов деформирования диссипативных систем.*

На основе двумерной модели заделанного стержня рассматриваются различные аспекты вопроса об устойчивости при следящих нагрузках. Иллюстрируются парадоксы, возникающие при использовании известного динамического критерия, призванного определять границу устойчивых и неустойчивых состояний равновесия (конечное влияние исчезающей вязкости и др) Показано, что, так же как и в вопросах упругопластической устойчивости, отказ от трактовки изучаемого явления как следствия неустойчивости состояния и взгляд с позиций устойчивости процесса деформирования оказывается весьма плодотворным. Становится возможным разобратся в происхождении парадоксов и выявить новые закономерности поведения системы со следующими нагрузками.

*Е. В. Ломакин*