

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУКЛОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК,
РАБОТАЮЩИХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ

Р. Б. РИКАРДС

(Рига)

Рассматриваются оболочки, изготовленные из многослойного композитного материала. Установлена общая структура функций — ограничений устойчивости и ограничений на частоту собственных колебаний и зависимость этих функций от параметров оптимизации: углов и интенсивностей армирования и геометрических параметров оболочки. На основе свойств экстремальных собственных значений в пространстве параметров проекта выделяются классы выпуклых задач оптимизации структуры материала оболочек произвольного очертания.

1. Критерий качества проекта. Примем за критерий качества проекта оболочки ее вес, который является достаточно универсальной характеристикой качества конструкции.

Пусть x^i ($i=1, 2, 3$) — система криволинейных нормальных координат в трехмерном пространстве с осями x^α ($\alpha=1, 2$) на срединной поверхности оболочки и осью x^3 , направленной по нормали к срединной поверхности. Для оболочки произвольного очертания ее вес определяет следующий функционал:

$$G = \int_V \sqrt{g(x^i)} \gamma(x^i) dV, \quad g = \det(g_{ij}) \quad (1.1)$$

Здесь V — объем, занимаемый оболочкой в пространстве, g_{ij} — компоненты метрического тензора пространства, которые определяют внутреннюю геометрию оболочки, γ — удельный вес материала оболочки. Для двухкомпонентной композитной среды ее удельный вес является линейной функцией объемного коэффициента армирования m

$$\gamma(x^i) = \gamma_a m(x^i) + \gamma_m [1 - m(x^i)], \quad m = V_a/V \quad (1.2)$$

Здесь γ_a — удельный вес армирующих волокон, γ_m — удельный вес матрицы (связующего), V_a — объем, занятый армирующими волокнами.

Для тонких оболочек, у которых $h/R_{\min} \ll 1$, где $R_{\min} = \min(R_1, R_2)$, R_1, R_2 — главные радиусы кривизн оболочки, геометрию оболочки с высокой точностью характеризует лишь метрический тензор срединной поверхности. Тогда в системе нормальных координат имеем [1, 2]

$$dV = \mu dx^3 dS, \quad dS = \sqrt{a} dx^1 dx^2, \quad a = \det(a_{ij}), \quad \mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - x^3 b_\beta^\alpha \quad (1.3)$$

$$\mu = \det(\mu_\beta^\alpha) = \sqrt{g/a} = 1 - 2x^3 H + (x^3)^2 K$$

где μ_β^α — компоненты тензора оболочки, b_β^α — компоненты второго тензора поверхности, $H = 1/2 b_\alpha^\alpha$ — средняя кривизна поверхности, $K = \det(b_\beta^\alpha)$ — гауссова кривизна поверхности.

Если γ не зависит от координаты x^3 , то с учетом (1.3) функционал (1.1) принимает вид

$$G = \int_S \gamma h \left(1 + \frac{h^2}{12R_1 R_2} \right) \sqrt{a} dx^1 dx^2 \quad (1.4)$$

Второй член в скобках для тонких оболочек мал по сравнению с единицей, и его можно отбросить. Таким образом, для оболочек с постоянным удельным весом материала по толщине функционал веса имеет вид

$$G = \int_S \gamma h \sqrt{a} dx^1 dx^2 \quad (1.5)$$

Рассмотрим оптимизацию оболочек с заданным метрическим тензором a_{ij} и областью S . Тогда единственным геометрическим параметром оптимизации является толщина оболочки $h(x^\alpha)$. Материал оболочки имеет вид многослойного композита со слоями толщиной h_k . Разобьем оболочку на i конечных элементов с постоянной толщиной $h^i = \sum_k h_k^i$. Тогда из (1.5)

имеем следующую целевую функцию:

$$G = \sum_i A_i h^i \gamma^i, \quad A_i = \int_{S_i} \sqrt{a} dx^\alpha \quad (1.6)$$

где S_i — область i -го конечного элемента.

Эта функция линейна [3] относительно оптимизируемых параметров h^i . В случае, если толщина стенки оболочки меняется непрерывно, при разделении конструкции на достаточное число элементов функцию цели с хорошим приближением также можно привести к виду (1.6).

2. Структура ограничений устойчивости и ограничений на частоту собственных колебаний. Рассмотрим структуру ограничений устойчивости многослойных оболочек. Устойчивость любых упругих консервативных систем удобно рассматривать на основе энергетических принципов [4]. Первая вариация полной энергии системы определяет ее состояние равновесия, а по знаку второй вариации энергии определяется, устойчиво ли это состояние.

Рассмотрим оболочку из материала, подчиняющегося обобщенному закону Гука. Если рассматривать оболочку как трехмерное тело, то ее потенциальную энергию деформаций определяет следующий функционал:

$$U = 1/2 \int_V \sigma^{ij} e_{ij} dV = 1/2 \int_V A^{ijkl} e_{kl} e_{ij} dV \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Здесь σ^{ij} — компоненты тензора напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций, A^{ijkl} — компоненты тензора жесткости.

Для тонких оболочек целесообразно при помощи известных гипотез перейти от трехмерного представления оболочки к двумерному. Для многослойных оболочек широко используются гипотезы Кирхгофа — Лява и Тимошенко и их различные модификации. Если применить кинематическую гипотезу Кирхгофа — Лява для всего многослойного композита в целом для больших перемещений и поворотов, но малых деформаций, то будет иметь место следующее общее соотношение для полных деформаций [1, 2, 5, 6]:

$$e_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + x^3 k_{\alpha\beta}, \quad e_{\alpha 3} = 0, \quad e_{33} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (2.2)$$

Здесь $\Omega_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора деформаций срединной поверхности, $k_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора искривлений. Компоненты этих тензоров выра-

жаются через компоненты вектора перемещений срединной поверхности и вектора ротации нормали известным образом [1, 2, 6]. Для больших перемещений, умеренных поворотов, но малых деформаций эти соотношения содержат члены относительно перемещений и поворотов не выше квадратичных.

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем энергию деформаций для многослойной оболочки, состоящей из N слоев

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{Q^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta} \Omega_{\alpha\beta} + 2B^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta} k_{\alpha\beta} + D^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta} k_{\alpha\beta}\} dS \quad (2.3)$$

Здесь $Q^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора мембранной жесткости оболочки, $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора мембранно-изгибной жесткости, $D^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора изгибной жесткости, которые известным образом [57] выражаются через компоненты тензоров жесткости слоев и координаты расположения слоев $x^3_{(r)}$.

Остановимся на выводе условия устойчивости [4, 7, 8]. Пусть оболочка нагружена системой нагрузок, изменяющихся пропорционально одному параметру λ . Исследуем возможность перехода системы из положения устойчивого равновесия a (докритическое состояние) к начально-неустойчивому положению равновесия b (начальное послекритическое состояние). Обозначим значение параметра λ в точке перехода системы из состояния a в состояние b через λ_* . Пусть \mathbf{u} будет допустимым полем возмущения обобщенных перемещений, которое переводит в точке λ_* оболочку из состояния a в состояние b . Суммарное поле обобщенных перемещений определяется в виде

$$\mathbf{u}_{(b)} = \mathbf{u}_{(a)} + \mathbf{u} \quad (2.4)$$

Деформации срединной поверхности и искривления оболочки в состоянии b могут быть выражены как сумма деформаций $\Omega_{\alpha\beta}^{(a)}$, $k_{\alpha\beta}^{(a)}$, обусловленных перемещениями в докритическом состоянии $\mathbf{u}_{(a)}$, и деформаций $\Omega_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$, обусловленных возмущенными обобщенными перемещениями \mathbf{u} :

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(b)} = \Omega_{\alpha\beta}^{(a)} + \Omega_{\alpha\beta}, \quad k_{\alpha\beta}^{(b)} = k_{\alpha\beta}^{(a)} + k_{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

При больших перемещениях, умеренных поворотах, но малых деформациях искривления оболочки в послекритическом состоянии $k_{\alpha\beta}$ являются линейными функциями перемещений, а деформации срединной поверхности $\Omega_{\alpha\beta}$ содержат кроме линейных $\Omega_{\alpha\beta}^{(1)}$ также квадратичные члены $\Omega_{\alpha\beta}^{(2)}$ относительно возмущенных перемещений \mathbf{u} :

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}^{(1)} + \Omega_{\alpha\beta}^{(2)}, \quad k_{\alpha\beta} = k_{\alpha\beta}^{(1)} \quad (2.6)$$

Потенциальная энергия деформаций оболочки (2.3) в послекритическом состоянии с учетом (2.5) и (2.6) выражается как сумма

$$U_{(b)} = U_{(a)} + U_{(1)} + U_{(2)} \quad (2.7)$$

$$U_{(a)} = \frac{1}{2} \int_S \{Q^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta}^{(a)} \Omega_{\alpha\beta}^{(a)} + 2B^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta}^{(a)} k_{\alpha\beta}^{(a)} + D^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta}^{(a)} k_{\alpha\beta}^{(a)}\} dS$$

$$U_{(1)} = \frac{1}{2} \int_S \{2Q^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta}^{(a)} \Omega_{\alpha\beta}^{(1)} + 2B^{\alpha\beta\gamma\delta} (\Omega_{\gamma\delta}^{(a)} k_{\alpha\beta}^{(1)} + k_{\gamma\delta}^{(a)} \Omega_{\alpha\beta}^{(1)}) + 2D^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta}^{(a)} k_{\alpha\beta}^{(1)}\} dS \quad (2.8)$$

$$U_{(2)} = \frac{1}{2} \int_S \{ Q^{\alpha\beta\gamma\delta} (2\Omega_{\gamma\delta}^{(a)} \Omega_{\alpha\beta}^{(2)} + [\Omega_{\gamma\delta}^{(1)} \Omega_{\alpha\beta}^{(1)}] + \\ + 2B^{\alpha\beta\gamma\delta} (\Omega_{\gamma\delta}^{(2)} k_{\alpha\beta}^{(a)} + [\Omega_{\gamma\delta}^{(1)} k_{\alpha\beta}^{(1)}]) + D^{\alpha\beta\gamma\delta} [k_{\gamma\delta}^{(1)} k_{\alpha\beta}^{(1)}] \} dS$$

В выражении энергии деформаций (2.7) отброшены члены третьего и более высокого порядка. Для получения полной энергии системы в состоянии b необходимо к энергии деформаций добавить потенциальную энергию внешней нагрузки $W_{(b)}$ ($T = \dot{U}_{(b)} + W_{(b)}$).

Пусть для начального послекритического состояния задана возможная вариация перемещений δu . Послекритическое состояние будет равновесным, если первая вариация полной энергии системы равна нулю. Об устойчивости этого равновесного состояния можно судить по знаку второй вариации полной энергии [4]. При устойчивом состоянии вторая вариация положительна. Критическое состояние определяется из условия равенства нулю второй вариации. Но так как в процессе варьирования послекритического состояния переменные докритического состояния остаются неизменными и, кроме того, вторая вариация линейных относительно послекритического перемещения u членов равна нулю, то имеем следующее условие:

$$\delta^2(U_{(2)} + W_{(2)}) = 0 \quad (2.9)$$

Из условия (2.9) определяется критический параметр нагрузки λ_* , который определяет начальную неустойчивость системы.

Для определения λ_* переходим из континуальной системы на систему с конечным числом степеней свободы. Для этого удобно использовать метод конечных элементов. Задавая форму элементов и функции формы для перемещений u и обычным образом объединив элементы в ансамбль [9], вместо (2.9) имеем следующее условие для определения начальной неустойчивости:

$$\delta v^T K_T \delta v = 0, \quad v = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \quad (2.10)$$

Здесь v — система узловых перемещений, $K_T = K - \lambda G$ — полная матрица тангенциальных жесткостей. Эта матрица является суммой двух матриц. Первая — матрица жесткости оболочки K , элементы которой являются слагаемыми тех интегралов в (2.8), которые не содержат деформаций докритической стадии (в (2.8) они заключены в квадратные скобки), вторая — геометрическая матрица G , элементы которой содержат докритические деформации, пропорциональные параметру нагружения λ .

Вариации в (2.10) равны нулю в тех узлах, где заданы геометрические граничные условия, и произвольны в остальных. Если обозначить эти независимые перемещения через $v = \langle \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$, где $l = m - r$ (r — количество геометрических граничных условий), то условие (2.10) принимает вид

$$Kv = \lambda Gv \quad (2.11)$$

Тензоры жесткости Q , B , D входят во все элементы матрицы жесткости K линейно. Покажем, в каких случаях элементы геометрической матрицы не зависят от тензора жесткости. Рассмотрим многослойный композит симметричной структуры ($B^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$). Ранее уже принималось, что нагрузки меняются пропорционально одному параметру. В случае безмоментного докритического состояния мембранные напряжения также меняются пропорционально этому параметру $\sigma^{\alpha\beta} = \lambda \sigma_{(0)}^{\alpha\beta}$. Тогда докритические деформации выражаются в виде

$$\Omega_{\gamma\delta}^{(a)} = a_{\gamma\delta\lambda\tau} \sigma^{\lambda\tau} = \lambda a_{\gamma\delta\lambda\tau} \sigma_{(0)}^{\lambda\tau} \quad (2.12)$$

Здесь $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — компоненты тензора податливости многослойного композита. Обозначим через $A^{\alpha\beta\gamma\delta}$ компоненты тензора жесткости материала оболочки $A^{\alpha\beta\gamma\delta} = Q^{\alpha\beta\gamma\delta}/h$, где h — толщина оболочки.

Часть энергии $U_{(2)}$ из (2.8), которая содержит докритические деформации, выражается формулой

$$U_{(2)}^G = \int_S h A^{\alpha\beta\gamma\delta} \Omega_{\gamma\delta}^{(\alpha)} \Omega_{\alpha\beta}^{(2)} dS \quad (2.13)$$

Подставляя в (2.13) соотношение (2.12) и учитывая симметричность тензоров жесткости и податливости по перестановке индексов, будем иметь

$$U_{(2)}^G = \lambda \int_S h \delta_{\lambda\tau}^{\alpha\beta} \sigma_{(0)}^{\lambda\tau} \Omega_{\alpha\beta}^{(2)} dS \quad (2.14)$$

В (2.14) компоненты $\sigma_{(0)}^{\alpha\beta}$ для безмоментного докритического состояния не зависят от компонент тензоров жесткости. Они зависят только от координат поверхности, но для заданной формы оболочки и заданных внешних сил эти функции выражаются в явном виде. Таким образом, для безмоментного докритического состояния геометрическая матрица G , содержащая слагаемые из (2.14), не зависит от компонент тензоров жесткости.

При рассмотрении линейных собственных колебаний оболочки имеем уравнение для определения частот собственных колебаний, которое аналогично (2.11). Геометрическая матрица G заменяется матрицей масс M :

$$Kv = \lambda Mv \quad (2.15)$$

Матрица масс зависит только от плотностей слоев, но не зависит от жесткости многослойного композита, и, так же как в геометрической матрице G , толщина оболочки входит во все элементы матрицы M линейно.

Отметим, что структура уравнений (2.11) и (2.15) сохраняется также при любом способе перехода от континуальной системы на систему с конечным числом степеней свободы, например при разложении поля перемещений по ортогональным функциям.

3. Определение выпуклости и примеры выпуклых задач. Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$G(x) \rightarrow \min \quad (3.1)$$

при ограничениях

$$\lambda^*(x) \geq \lambda \quad (3.2)$$

Здесь x — вектор параметров оптимизации, $\lambda^*(x)$ — критическая нагрузка (параметр нагрузки) или минимальная частота собственных колебаний оболочки, которые определяются как минимальное собственное значение уравнения (2.11) или (2.15), λ — заданная нагрузка (параметр нагрузки) или заданная частота. Целевая функция (3.1) имеет вид (1.6).

Найдем минимальное собственное значение задачи

$$Kv = \lambda Gv \quad (3.3)$$

где K и G — симметричные положительно-определенные матрицы размером $l \times l$. При этом матрица K зависит от параметра x , а матрица G не зависит от него.

Вектор $v \in E^l$ характеризует всевозможные формы потери устойчивости или формы колебаний. Собственный вектор, соответствующий минимальному собственному значению, определяет начальную послекритическую форму потери устойчивости или критическую форму колебаний. В [10]

показано, что для экстремального собственного значения задачи (3.3) имеем

$$\lambda_{\min} = \min(\mathbf{K}\mathbf{v}, \mathbf{v}), \mathbf{v} \in E^l, (\mathbf{G}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1 \quad (3.4)$$

Далее используем следующее свойство псевдovoгнутых функций [3, 11]. Пусть $d_i(\mathbf{x})$ ($i=1, 2, \dots, m$) — псевдovoгнутые (вогнутые) функции параметра \mathbf{x} . Тогда функция

$$d(\mathbf{x}) = \min[d_1(\mathbf{x}), d_2(\mathbf{x}), \dots, d_m(\mathbf{x})] \quad (3.5)$$

также псевдovoгнута (вогнута), т. е. минимум от семейства псевдovoгнутых (вогнутых) функций от параметра \mathbf{x} образует псевдovoгнутую (вогнутую) функцию от \mathbf{x} .

Квадратичная форма $(\mathbf{K}\mathbf{v}, \mathbf{v})$ в (3.4) при всевозможных векторах \mathbf{v} образует семейство функций от параметра \mathbf{x} . При этом векторы \mathbf{v} в (3.4) произвольны в E^l при условии их ортонормированности в \mathbf{G} -метрике, т. е. $(\mathbf{G}\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$, кроме того, они не зависят от \mathbf{x} . Зависимость от \mathbf{x} достигается только в точке пространства E^l , соответствующей экстремальному собственному значению λ_{\min} .

На основании изложенного сформулируем следующее условие. *Теорема.* Наименьшее собственное значение задачи $\mathbf{K}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{G}\mathbf{v}$, где \mathbf{K} — симметричная положительно определенная матрица, зависящая от параметра $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, \mathbf{G} — симметричная положительно определенная матрица, не зависящая от параметра \mathbf{x} , является псевдovoгнутой (вогнутой) функцией от \mathbf{x} , если квадратичная форма $(\mathbf{K}\mathbf{v}, \mathbf{v})$ псевдovoгнутая (вогнутая) функция от параметра \mathbf{x} .

Следствие. Если элементы матрицы \mathbf{K} — линейные функции от параметра \mathbf{x} , то квадратичная форма $(\mathbf{K}\mathbf{v}, \mathbf{v})$ — также линейная функция от \mathbf{x} , и так как линейная функция является одновременно и вогнутой, и выпуклой, то наименьшее собственное значение λ_{\min} задачи $\mathbf{K}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{G}\mathbf{v}$ является вогнутой функцией от параметра \mathbf{x} .

На основе этих свойств экстремального собственного значения можно выделить класс выпуклых задач оптимизации.

1. Рассмотрим оболочки постоянной толщины h . Оптимизируемыми параметрами являются геометрический размер h и структурные параметры θ_k материала N -слойной оболочки с фиксированными углами намотки слоев

$$\mathbf{x} = \{h, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\} \quad (3.6)$$

Здесь $\theta_k = h_k/h$ — относительное содержание слоев k -го типа, $h_k = x_{(k)}^3 - x_{(k-1)}^3$ — толщина слоя k -го типа. Проект оболочки характеризуется точкой в положительном ортанте n -мерного евклидова пространства $(E^n)^+$.

Рассмотрим случай, когда количество слоев N велико, т. е. приближенно можно принять, что материал однороден по толщине оболочки. В этом случае $B^{\alpha\beta\gamma\delta} \approx 0$ и компоненты тензора изгибной жесткости $D^{\alpha\beta\gamma\delta} = 1/12 h^3 A^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Как показали расчеты и сравнение с экспериментальными данными, эти соотношения практически выполняются уже при $N \geq 7$. Толщина оболочки h входит линейно во все элементы матрицы \mathbf{G} и линейно или в третьей степени в элементы матрицы \mathbf{K} . Такую же структуру имеет уравнение (2.15), так как во всех элементах матрицы масс \mathbf{M} толщина оболочки h входит линейно.

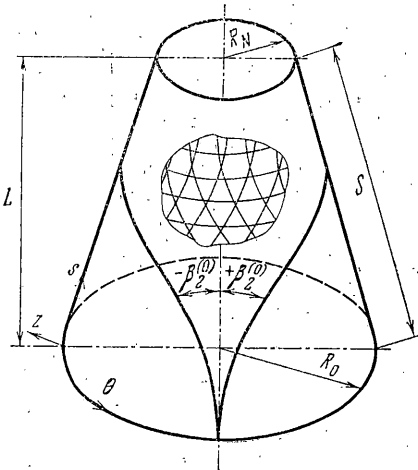
При условии, что $h \neq 0$, можно поделить на h уравнение (2.14) или (2.15). Тогда матрицы \mathbf{G} и \mathbf{M} не зависят от \mathbf{x} , а элементы матрицы \mathbf{K} имеют структуру

$$\sum_{k=1}^N a_k \theta_k \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^N a_k \theta_k + h^2 \sum_{k=1}^N b_k \theta_k \quad (3.7)$$

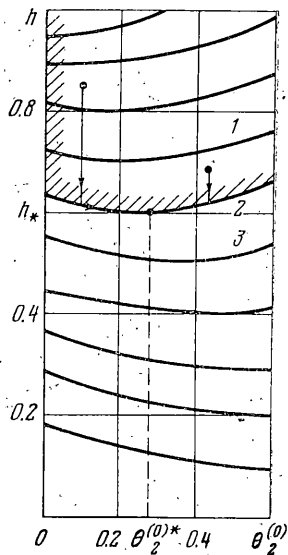
Используя (3.7), исследуем функцию — квадратичную форму в пространстве $E^n(h, \theta_k)$:

$$f(h, \theta_k) = (Kv, v) = \sum_{k=1}^N c_k \theta_k + h^2 \sum_{k=1}^N d_k \theta_k. \quad (3.8)$$

Так как форма (Kv, v) положительно определенная, то $\sum d_k \theta_k > 0$ и функция (3.8) в $(E^n)^+$ удовлетворяет условию псевдovoгнутости [3]. Тогда на основе теоремы наименьшее собственное значение λ_{\min} для рассматриваемого класса задач является псевдovoгнутой функцией параметра x . В свя-



Фиг. 1



Фиг. 2

зи с этим ограничение (3.2) определяет выпуклое множество допустимых решений и задача оптимизации (3.1) с ограничением (3.2) и вектором проекта (3.6) является задачей выпуклого программирования.

2. Далее рассмотрим задачу оптимизации структуры материала оболочек с кусочно-линейной переменной толщиной. Сформулируем следующую задачу:

$$\lambda_{\min}(x) \rightarrow \max, \quad x = \{\theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \dots, \theta_{N_i}^{(i)}\} \quad (3.9)$$

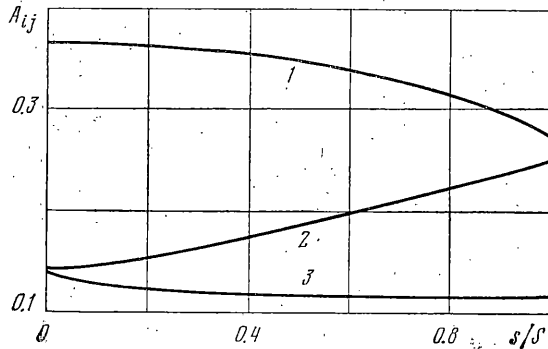
Оптимизируемыми параметрами в этой задаче являются только структурные параметры, материала каждого i -го конечного элемента, а все $h^i = \text{const}$, т. е. зафиксированы, и функция веса вида (1.6) является постоянной $G = \text{const}$.

Критерий качества (3.9) этой задачи отражает требование максимизировать минимальную частоту собственных колебаний или максимизировать критическую нагрузку оболочки заданного веса путем изменения структуры материала. Легко показать, что эта задача является задачей выпуклого программирования.

В самом деле, матрица K задачи (3.3) линейно зависит от параметра x , а матрица G не зависит от x . Тогда, согласно следствию теоремы, λ_{\min} яв-

ляется вогнутой функцией параметра x . Максимизация вогнутой функции (3.9) приводит к единственному, т. е. глобальному решению.

4. Численный пример решения выпуклой задачи. Рассмотрим задачу минимизации веса усеченной конической оболочки из углепластика под действием внешнего давления q (фиг. 1). Примем, что оболочка постоянной толщины h состоит из слоев двух типов окруженного слоя ($\beta_1 = 90^\circ$) с относительным содержанием θ_1 и слоя под переменным углом $\pm\beta_2$ с относительным содержанием θ_2 . Примем, что количество слоев велико и они



Фиг. 3

образуют однородный по толщине оболочки материал. Будем считать, что угол захода на оправу $\beta_2^{(0)}$ задан, а дальнейшее изменение угла следует из условия намотки по геодезической линии [12]

$$\beta_2(s) = \arcsin[R_0/R \sin \beta_2^{(0)}(s)] \quad (4.1)$$

Условие неразрывности намотки [12] приводит к следующему изменению относительного содержания слоев вдоль образующей конуса:

$$\theta_2(s) = \frac{R_0 \cos \beta_2^{(0)}}{R \cos \beta_2(s)} \theta_2^{(0)}, \theta_2^{(0)} = \theta_2(0) \quad (4.2)$$

Для того чтобы получить оболочку постоянной толщины, относительное количество окружных слоев также должно быть переменным вдоль образующей конуса: $\theta_1(s) = 1 - \theta_2(s)$. При фиксированном объемном коэффициенте армирования материала m и при заданных геометрических параметрах конуса получаем следующую задачу оптимизации:

$$G(x) \rightarrow \min, \text{ при } q_*(x) - q \geq 0 \quad (4.3)$$

$$G(x) = Ah$$

$$A = \pi(R_0 + R_N)S[\gamma_a m + (1 - m)\gamma_c], x = \{h, \theta_2^{(0)}\}$$

где γ_a, γ_c — плотность арматуры и связующего. Критическая нагрузка $q_*(x)$ определяется методом конечного элемента как минимальное собственное значение уравнения

$$Kv=qGv \quad (4.4)$$

где K — матрица жесткости оболочки, G — геометрическая матрица. В расчетах использовалась матрица жесткости многослойного конечного элемента в виде усеченного конуса, полученная в [13].

Оболочка по длине разбивалась на N конечных элементов, при этом принималось, что в пределах каждого конечного элемента θ_1 и $\beta_2 = \text{const}$, т. е. жесткость материала постоянна.

Численные расчеты проводились для оболочки из углекислотного композита со следующими параметрами: $L=1$ м, $R_0=1$ м, $R_N=0.70$ м, $q=0.36$ МПа, $m=0.6$, $E_c=3.5 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_c=0.35$, $E_z=3 \cdot 10^5$ МПа, $E_r=E_\theta=0.83 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_{r\theta}=\nu_{\theta r}=0.26$, $\nu_{zr}=\nu_{rz}=0.26$, $G_{rz}=G_{\theta z}=0.18 \cdot 10^5$ МПа (z, r, θ — цилиндрические координаты, которые связаны со структурой цилиндрически анизотропного углеволокна).

Жесткостные характеристики элементарного слоя при заданном коэффициенте армирования m и гексагональной упаковке волокон определяются методом конечного элемента по методике, изложенной в [14]. Были получены следующие упругие константы для слоя (ось 1 совпадает с направлением армирования): $E_1=1.80 \cdot 10^5$ МПа, $E_2=E_3=0.16 \cdot 10^5$ МПа, $G_{12}=G_{13}=4.68 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_{23}=\nu_{32}=0.285$, $\nu_{12}=\nu_{13}=0.289$, $\nu_{21}=\nu_{31}=0.026$.

Задача устойчивости решалась при граничных условиях шарнирного опирания на конце с большим основанием конуса и жесткого защемления на конце с меньшим основанием.

Задача оптимизации (4.3) решалась методом проекции градиента, причем использовались различные начальные точки в допустимой области. На фиг. 2 построены линии уровня функции критической нагрузки в пространстве параметров оптимизации при $\beta_2^{(0)}=35^\circ$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют уровням внешнего давления $q=0.55, 0.36$ и 0.236 МПа. Видно, что область допустимых решений выпуклая. Выпуклость задачи следует также из изложенного доказательства, так как задача (4.3) принадлежит к задачам класса 1.

Ниже представлены результаты оптимизации при различных углах $\beta_2^{(0)}$:

$\beta_2^{(0)}$	15°	20°	30°	35°	40°
$\theta_2^{(0)*}$	0.05	0.10	0.20	0.28	0.40
h_*	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6

В определенном диапазоне измерения углов захода на оправу $\beta_2^{(0)}$ вес оптимальной оболочки один и тот же, но меняется структура армирования и, следовательно, распределение жесткости по длине оболочки.

На фиг. 3 представлены траектории для компонент матрицы жесткости при $\beta_2^{(0)}=35^\circ$. Кривые 1, 2, 3 относятся соответственно к компонентам $A_{1111}/10^6$, $A_{2222}/10^7$, $A_{1122}/10^6$ и $A_{1212}/10^6$. Траектории получены путем соединения значений переменных в середине конечного элемента. Из фиг. 3 следует, что для оптимальной оболочки продольная A_{1111} и окружная A_{2222} жесткости наибольшие у большего основания конуса, а сдвиговая жесткость A_{1212} наибольшая у меньшего основания конуса.

Поступила 28 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
2. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига, «Зинатне», 1974.
3. Зангвилл У. И. Нелинейное программирование. М., «Сов. радио», 1973.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. 2. М., «Наука», 1967.
5. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. М., «Наука», 1974.
6. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Изд-во Казанск. ун-та, 1975.

7. Koiter W. T. Elastic stability and postbuckling behavior. Proc. Symposium on non-linear problems. Univ. Wisconsin Press, 1963, p. 257—275.
8. Navaratna D. R., Pian T. H., Witmer E. A. Stability analysis of shells of revolution by the finite-element method. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 2.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М., «Мир», 1975.
10. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 3. М., «Наука», 1967.
11. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
12. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков Б. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М., «Машиностроение», 1977.
13. Адамович И. С., Рикардс Р. Б. Оптимизация по массе оболочек вращения с переменной геометрией и структурой армирования. I. Оптимизация оболочек вращения, работающих на устойчивость при внешнем давлении. Механика полимеров, 1977, № 3.
14. Рикардс Р. Б., Чаге А. К. Начальная поверхность прочности однонаправленно армированного композита при плоском напряженном состоянии. Механика полимеров, 1976, № 4.