

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЖЕСТКОСТЕЙ РЕБРА НА УПРУГОЙ
ПЛАСТИНЕ

А. М. САМСОНОВ

(Ленинград)

К настоящему времени довольно широко исследованы задачи минимизации веса упругих пластин при различных ограничениях. Менее разработаны методы решения задач оптимизации упругих пластин путем выбора упругих модулей или параметров подкрепляющих элементов с целью улучшения прочности, жесткости, сопротивления заданной нагрузке. Для сложных конструкций решение обычно разыскивается при помощи методов математического программирования.

Теория оптимального управления дала возможность перейти к задачам оптимизации в более общей постановке и получить некоторые строгие аналитические результаты [1-3]. В частности, в динамических задачах о минимуме объема пластины, имеющей заданную основную частоту собственных колебаний, при управлении распределением толщины выяснилось, что найденные гладкие распределения имеют тенденцию к концентрации материала вдоль дискретных элементов жесткости [4]. В статической задаче о пластине, работающей на сжатие, показано, что негладкие распределения толщины приводят к гораздо большим выигрышам в упругой энергии пластины [5]. Подробное исследование показало, что гладкие распределения стационарны, но не удовлетворяют условию Вейерштрасса сильного относительного минимума [6]; естественно поэтому, оставаясь в рамках теории Кирхгофа, изменить исходную постановку задачи, ввести подкрепление в модель упругой системы и управлять его параметрами.

Ниже решается задача оптимального проектирования упругой пластины с ребром заданной произвольной формы путем выбора его жесткостей; полученные результаты продолжают исследование оптимизации подкрепления пластины, начатое в [7-8].

1. Постановка задачи. Пусть пластина S закреплена по внешнему контуру L , усилена замкнутым криволинейным ребром Γ и нагружена поперечной изгибающей нагрузкой интенсивности $q(x, y)$.

Считая, что поведение жестко спанного с пластиной ребра описывается теорией малых деформаций тонких криволинейных стержней, сформулируем задачу определения прогиба $w(x, y)$ пластины с ребром

$$\Delta w = q \text{ в } S \quad (1.1)$$

$$w = 0, w_n = 0 \text{ на } L \quad (1.2)$$

$$[w]_{-}^{+} = 0, [w_n]_{-}^{+} = 0 \text{ на } \Gamma \quad (1.3)$$

$$[\Delta w]_{-}^{+} = -akl(w) + \frac{\partial}{\partial s} [cm(w)] \equiv L_1(w, a, c) \text{ на } \Gamma \quad (1.4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta w \right]_{-}^{+} = -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [al(w)] + ckm(w) \right\} \equiv L_2(w, a, c) \text{ на } \Gamma$$

$$l(w) \equiv kw_n - w_{ss}, \quad m(w) \equiv kw_s + w_{ns}$$

Здесь и далее $a(s)$, $c(s)$ — изгибная и крутильная жесткости ребра, отнесенные к постоянной и равной единице цилиндрической жесткости пластины; $k=k(s)$ — кривизна ребра Γ ; (n, s) — натуральные координаты на осевой линии ребра Γ , n — внутренняя нормаль к Γ ; v — внешняя нормаль к контуру пластины L ; нижние индексы означают взятие производных; символом $[f]_{-}^{+}$ обозначена разность предельных значений f на Γ , взятых в областях S_0 и S_1 (фиг. 1).

Задача оптимального управления такой упругой системой состоит в том, чтобы минимизировать функционал качества $J_0[w]$ путем выбора распределений жесткостей ребра $a(s)$ и $c(s)$:

$$J_0[w] = \oint_{\Gamma} f(w) ds + \int_S F(w) dx dy \rightarrow \min \quad (1.5)$$

Система уравнений Кирхгофа не допускает приведения к стандартной пфафовой системе уравнений первого порядка, поэтому решение данной задачи оптимизации будет основано на обычной форме записи (1.1) — (1.4).

Будем рассматривать функционалы (1.5), в которых $F(w)$ и $f(w)$ не зависят от производных прогиба.

2. Необходимые условия оптимальности. Введем множитель Лагранжа $\lambda(x, y)$ и составим расширенный функционал

$$J[w, \lambda] = J_0[w] + \int_S \lambda(\Delta\Delta w - q) dx dy \quad (2.1)$$

Стационарность J и J_0 достигается одновременно. Преобразуем второе слагаемое в (2.1) последовательным применением формулы Грина

$$\begin{aligned} J[w, \lambda] &= J_0[w] + \int_S (w\Delta\Delta\lambda - \lambda q) dx dy + \\ &+ \oint_L \left(\lambda \frac{\partial}{\partial v} \Delta w - \lambda_n \Delta w + w_n \Delta \lambda - w \frac{\partial}{\partial v} \Delta \lambda \right) dl + \\ &+ \oint_{\Gamma} \left[\lambda \frac{\partial}{\partial n} \Delta w - \lambda_n \Delta w + w_n \Delta \lambda - w \frac{\partial}{\partial n} \Delta \lambda \right]_{-}^{+} ds \end{aligned} \quad (2.2)$$

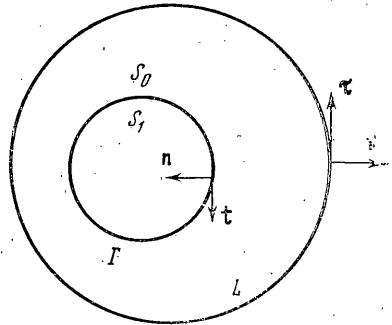
Вариация первых трех слагаемых дает уравнение сопряженной задачи

$$\Delta\Delta\lambda + F_w' = 0 \quad (2.3)$$

и граничные условия для λ на внешнем контуре L : $\lambda=0$, $\lambda_v=0$. Вариация интеграла по линии Γ в (2.2) имеет вид

$$\oint_{\Gamma} \left[\lambda \delta \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta w \right) - \lambda_n \delta \Delta w + \Delta \lambda \delta w_n - \delta w \frac{\partial}{\partial n} \Delta \lambda \right]_{-}^{+} ds + \oint_{\Gamma} f_w' \delta w ds \quad (2.4)$$

Используя вариации условий сопряжения (1.4) и учитывая возможные разрывы функции $\lambda(x, y)$ и ее производных на ребре Γ , получим гра-



Фиг. 1

ничные условия для множителя

$$\begin{aligned} [\lambda]_{-}^{+} = 0, \quad [\lambda_n]_{-}^{+} = 0, \quad [\Delta\lambda]_{-}^{+} = -akl(\lambda) + \frac{\partial}{\partial s} cm(\lambda) \\ \left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta\lambda \right]_{-}^{+} = -\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} [al(\lambda)] + ckm(\lambda) \right\} + f_w' \end{aligned} \quad (2.5)$$

совпадающие по виду с условиями (1.4), и условие стационарности

$$\oint_{\Gamma} [\delta al(w)l(\lambda) + \delta cm(w)m(\lambda)] ds = 0 \quad (2.6)$$

Это условие может быть выполнено только при обращении в нуль какого-либо сомножителя в каждом слагаемом всюду на ребре (см. п. 5). Следовательно, при минимизации линейного функционала

$$J_0[w] = \oint_{\Gamma} g(s)w(s) ds + \int_s p(x, y)w(x, y) dx dy \quad (2.7)$$

с ограничениями на управления вида

$$a_1 \leq a(s) \leq a_2, \quad c_1 \leq c(s) \leq c_2 \quad (2.8)$$

оптимальным является режим с кусочно-постоянными управлениями, равными в каждой точке ребра одному из граничных значений. Считая вариации жесткостей независимыми, положим $c(s) = 0$ и проанализируем возможные случаи вырождения задачи.

Если вырождена исходная задача, т. е. $l(w) = 0$ всюду на ребре, то стационарное значение $J_0[w]$ не зависит от управлений и находится по решению задачи (1.1), (1.2). Вырождение в сопряженной задаче: $l(\lambda) = 0$ на Γ позволяет найти множитель из решения задачи

$$\Delta\Delta\lambda = -p(x, y); \quad \lambda = 0, \quad \lambda_n = 0 \quad \text{на } L$$

$$[\lambda]_{-}^{+} = 0, \quad [\lambda_n]_{-}^{+} = 0, \quad [\Delta\lambda]_{-}^{+} = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta\lambda \right]_{-}^{+} = g(s) \quad \text{на } \Gamma \quad (2.9)$$

и из равенства (см. (2.2) с учетом (2.9)):

$$J_0[w] = - \int_s \lambda q dx dy$$

определить стационарное значение функционала.

Таким образом, в вырожденных случаях $J_0[w]$ стационарен при любом управлении; можно предположить, что вырождение возникает лишь при определенном расположении ребра на пластине. Поэтому перед решением конкретной задачи оптимизации необходимо убедиться в отсутствии вырождения, вычислив значение оператора $l(w)$ по решению задачи (1.1), (1.2) и значение $l(\lambda)$ на заданной линии Γ по решению задачи (2.9).

Задача становится сложнее для нелинейных функционалов вида

$$J_0[w] = \int_s p(x, y)w^i(x, y) dx dy \quad (i > 1) \quad (2.10)$$

так как при этом управления неявно входят в правую часть уравнения сопряженной задачи (2.3), а при вырождении $l(\lambda) = 0$ на Γ условие (2.6) выполнено тождественно.

Запишем точную формулу приращения функционала, учитывая квадратичные по вариациям слагаемые в δL_1 и δL_2 :

$$\oint_{\Gamma} [\delta a l(\lambda) L(W) + \delta c m(\lambda) M(W)] ds \geq 0 \quad (2.11)$$

Большими буквами обозначены соответствующие величины в допустимом режиме. Если вариации управления $\delta a = A - a \neq 0$, $\delta c = C - c \neq 0$ на малом отрезке ¹ $\gamma \subset \Gamma$, $\text{mes } \gamma \rightarrow 0$, то в пределах γ справедливы соотношения

$$al(w) = AL(W) + O(\text{mes } \gamma), \quad cm(w) = CM(W) + O(\text{mes } \gamma) \quad (2.12)$$

(см. п. 5). Используя их в (2.11), находим

$$\oint_{\Gamma} \left[\frac{a\delta a}{A} l(\lambda) l(w) + \frac{c\delta c}{C} m(\lambda) m(w) \right] ds \geq 0 \quad (2.13)$$

т. е. при выполнении (2.6) условие Вейерштрасса

$$- \oint_{\Gamma} \left[\frac{(\delta a)^2}{A} l(\lambda) l(w) + \frac{(\delta c)^2}{C} m(\lambda) m(w) \right] ds \geq 0$$

удовлетворяется в слабом смысле и для выяснения характеристик оптимального режима следует рассмотреть условия более высокого порядка или ввести ограничения изопериметрического типа (например на объем ребра; см. п. 3). При $l(\lambda) \neq 0$ на Γ значение граничного управления в точке дуги ребра зависит от знака произведения $l(w)l(\lambda)$.

Если в функционале (2.7) в качестве весового множителя p взять нагрузку $q(x, y)$, то получим задачу о минимуме полной потенциальной энергии пластины с ребром. Видно, что такая задача оптимизации самосопряжена ($\lambda = -w$) и не имеет решения без ограничений на управления. При ограничениях (2.8) оптимален предельный режим: $a = a_2$, $c = c_2$.

Минимизация энергии деформации самой пластины, закрепленной по контуру L и имеющей ребро, приводит к следующей задаче для множителя (для простоты положим $s = 0$):

$$\Delta \Delta \lambda = -q(x, y) \text{ в } S, \lambda = 0, \lambda_n = 0 \text{ на } L$$

$$[\lambda]_{-}^{+} = 0, [\lambda_n]_{-}^{+} = 0 \text{ на } \Gamma$$

$$[\Delta \lambda]_{-}^{+} = -ak[l(\lambda) - 2l(w)]$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta \lambda \right]_{-}^{+} = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} a[l(\lambda) - 2l(w)] \text{ на } \Gamma$$

и условию стационарности

$$\oint_{\Gamma} \delta a l(w) [l(\lambda) - l(w)] = 0$$

При $l(w) = 0$ функционал стационарен, не зависит от управления и его значение находится по решению задачи (1.1), (1.2) и, очевидно, максимально. Если предположить, что $l(\lambda) - l(w) = 0$ на Γ , то получим однородную задачу для суммы $(\lambda + w)$ и равенство $l(w) = 0$, $l(\lambda) = 0$ на Γ . Следовательно, минимум функционала достигается на граничном режиме управления. Для получения конкретного распределения жесткости следует решить более простую, чем исходная, задачу с кусочно-постоянными управлениями.

¹ Вариации не стремятся к нулю при стремлении к нулю длины отрезка γ .

Обобщения полученных результатов на задачи с несколькими ребрами, с ребрами, имеющими изломы или выходящими на внешний контур пластины, не представляют принципиальной трудности.

3. Условие вейерштрассовского типа при ограничении на объем ребра. Рассмотрим самосопряженную задачу минимизации полной энергии деформации пластины с ребром. Исключая тривиальный случай, предположим, что положение ребра и нагрузка таковы, что изменения кривизны $l(w)$ и кручения $m(w)$ ребра не равны нулю всюду на линии Γ .

Пусть поперечное сечение ребра имеет характерные размеры $g(s)$ и $h(s)$, $0 < g(s) < h(s)$, и объем ребра задан

$$v_1 = c_1 \oint_{\Gamma} g(s) h(s) ds, \quad c_1 = \text{const} \quad (3.1)$$

Для ряда поперечных сечений стержней, которые обычно применяются для подкрепления пластины, жесткости можно выразить через размеры формулами вида

$$a(s) = \kappa g h^3, \quad c(s) = \beta h g^3 \quad (3.2)$$

где κ и β — заданные постоянные, пропорциональные соответственно модулю Юнга и модулю сдвига материала ребра. Зависимости вида (3.2) можно считать справедливыми для сечений ребра типа тавра, двутавра, швеллера и т. п., предполагая, что в решении задачи о кручении стержня и при вычислении объема по (3.1) можно пренебречь слагаемыми $O(g/h)$.

Представим (3.1) в виде

$$\oint_{\Gamma} \sqrt[4]{a(s)c(s)} ds - v_2 = 0$$

откуда, введя зависимости $a(s) = \alpha^4$, $c(s) = \gamma^4$, получим

$$\oint_{\Gamma} \alpha \gamma ds - v_2 = 0 \quad (3.3)$$

На основании (2.13) запишем приращение функционала, учитывая (3.3), при помощи множителя μ

$$\begin{aligned} \Delta J = & - \oint_{\Gamma} \left[\frac{\alpha^4}{A^4} \delta \alpha (A + \alpha) (A^2 + \alpha^2) l^2(w) + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma^4}{\Gamma^4} \delta \gamma (\Gamma + \gamma) (\Gamma^2 + \gamma^2) m^2(w) - \mu (A\Gamma - \alpha\gamma) \right] ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначения $x = \delta \alpha / \alpha \geq -1$, $y = \delta \gamma / \gamma \geq -1$ и запишем подынтегральное выражение в (3.4) в виде

$$\begin{aligned} Y = & -\alpha^4 l^2(w) (1+y)^4 [(1+x)^4 - 1] - \gamma^4 m^2(w) (1+x)^4 [(1+y)^4 - 1] + \\ & + \mu \alpha^2 \gamma^2 (1+x)^4 (1+y)^4 (x+y+xy) \end{aligned}$$

Из линейных по x и y слагаемых в качестве условия стационарности получается равенство удельных потенциальных энергий изгиба и кручения ребра

$$\alpha^4 l^2(w) = \gamma^4 m^2(w) \Rightarrow a(s) l^2(w) = c(s) m^2(w) \quad (3.5)$$

и определяется множитель μ :

$$\mu \alpha^2 \gamma^2 = 2 [\alpha^4 l^2(w) + \gamma^4 m^2(w)] \geq 0 \quad (3.6)$$

Нелинейные слагаемые путем замены $t=x+1 \geq 0, z=y+1 \geq 0$ приводятся к виду

$$Y=4z^5t^5-6z^4t^4+2z^2t^2+(z+t)^4-4zt(z+t)^2$$

или после введения элементарных симметрических полиномов $u=zt \geq 0, v=z+t \geq 0$:

$$Y=4u^4(u-1)-2u^2(u^2-1)+v^2(v^2-4u) \tag{3.7}$$

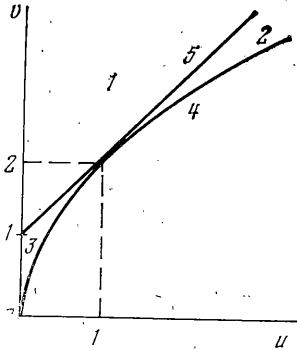
Исследуя знак $Y(u, v)$, заметим, что в области 1 (фиг. 2) изменения параметров u и v справедливо $v_{\min}=1+u$, поэтому

$$Y \geq (u-1)^2(4u^3+3u^2+2u+1) \geq 0 \tag{3.8}$$

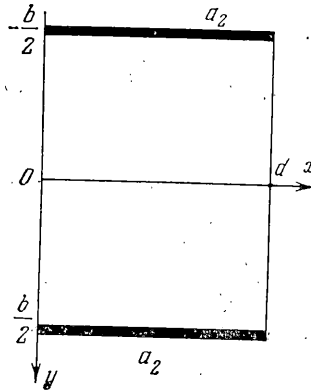
В областях 2 и 3 справедливо $v_{\min}=2\sqrt{u}$, откуда следует

$$Y \geq 2u^2(u-1)^2(2u+1) \geq 0 \tag{3.9}$$

Легко проверить, что прямым $z=1$ и $t=1$ соответствует прямая $v=1+u$; прямой $z=t$ — парабола $v=2\sqrt{u}$ (кривая 4), прямым $z=0$ и $t=0$ — ось $v(u=0)$. Ясно, что ниже параболы $v=2\sqrt{u}$ допустимые значения u и v



Фиг. 2



Фиг. 3

лежать не могут, так как необходимо $t \geq 0, z \geq 0$, что следует из неотрицательности управлений g, h, G, H .

Из оценок (3.8) и (3.9) заключаем, что при любых допустимыхращениях управлений стационарное распределение $a(s)$ и $c(s)$, выделенное равенством (3.5), удовлетворяет условию Вейерштрасса сильного относительного минимума при ограничении изопериметрического типа на объем ребра.

В частном случае, когда крутильная жесткость $c(s)$ не влияет на напряженное состояние конструкции, условие стационарности (3.5) должно быть заменено на $a(s)l^2(w)/g(s)h(s)=\text{const}=\mu$, а справедливость условия Вейерштрасса следует из неотрицательности выражения

$$Y=(z-1)^2[(tz-1)^2-1]+(tz-1)^2 \geq 0$$

4. *Пример.* Рассмотрим изгиб прямоугольной пластины (фиг. 3), свободно опертой по сторонам $x=0$ и $x=d$ и свободной по двум другим. Пусть нагрузка задана в виде $q=q_0 \sin \pi x/d$. Усилим пластину расположенными по сторонам $y=\pm b/2$ ребрами-балками, имеющими только изгибную жесткость $a(s)$, $0 < a_1 \leq a(s) \leq a_2$, и минимизируем потенциальную энергию деформации всей конструкции путем выбора функции $a(s)$.

Задача оптимизации самосопряжена, прогиб w определяется по решению краевой задачи вида ($\lambda = -w$):

$$\Delta \Delta w = q_0 \sin \pi x/d, w_{yy} + \nu w_{xx} = 0 \tag{4.1}$$

$$w_{yyy} + (2-\nu) w_{yxx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} a(x) w_{xx}$$

$$y = \pm b/2, w = 0, w_{yy} = 0 \text{ при } x = 0, d$$

Из условия стационарности (2.6) следует, что на сторонах $y = \pm b/2$ жесткость $a(s) = a_2 = \text{const}$. Тогда решение задачи (4.1) имеет вид

$$w = q_0 p^{-4} \sin px (1 + A \operatorname{ch} py + B y \operatorname{sh} py), p = \pi/d \tag{4.2}$$

и константы A и B определяются из граничных условий на сторонах $y = \pm b/2$:

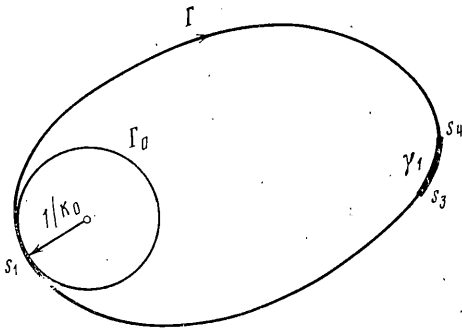
$$w_{yy} + \nu w_{xx} = 0, w_{yyy} + (2-\nu) w_{xxy} = a_2 w_x^{IV}$$

в виде

$$AP = \nu(1+\nu) \operatorname{sh} \alpha - \alpha \nu(1-\nu) \operatorname{ch} \alpha - p a_2 (2 \operatorname{ch} \alpha + \alpha \operatorname{sh} \alpha)$$

$$BP = p \nu(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha + p^2 a_2 \operatorname{ch} \alpha, \alpha = pb/2$$

$$P = (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha(1-\nu)^2 + 2 p a_2 \operatorname{ch}^2 \alpha$$



Фиг. 4

Заметим, что обычно аналитическое решение задач для пластин с ребрами переменной жесткости затруднительно, так как в граничные условия (1.4), (1.5) входят неизвестные заранее функции $a(s)$ и $c(s)$. Более сложные примеры поиска оптимального распределения жесткостей ребра требуют численного решения (см., например, [8]).

5. Приложение. 1. Докажем, что невозможно обращение в нуль $l(w)$ на отрезке γ_1 замкнутого ребра Γ (фиг. 4).

В точке s_3 сопряжения участков ребра с разными жесткостями из теоремы о потенциальной энергии можно получить следующие условия сопряжения:

$$[w]_{s_3-0}^{s_3+0} = 0, [w_n]_{s_3-0}^{s_3+0} = 0, [w_s]_{s_3-0}^{s_3+0} = 0 \tag{5.1}$$

$$[a(s)l(w)]_{s_3-0}^{s_3+0} = 0, \left[\frac{\partial}{\partial s} a(s)l(w) \right]_{s_3-0}^{s_3+0} = 0, [c(s)m(w)]_{s_3-0}^{s_3+0} = 0$$

Аналогичные условия должны быть выполнены и в точке s_4 . Отсюда, в частности, следует, что если $l(w)$ равно нулю на отрезке γ , то это равенство имеет место на всей линии Γ . То же самое справедливо для $l(\lambda)$, $m(w)$, $m(\lambda)$, так как $\lambda(x, y)$ имеет механический смысл прогиба под некоторой заданной нагрузкой.

2. К выводу условий (2.12). Ограничимся рассмотрением задачи при $c=0$ и кусочно-постоянной $a(s)$; обобщения на случай ограниченных измеримых $a(s)$ и $c(s)$ не представляют принципиальной трудности (см. [1]).

Необходимо доказать, что формулы (2.12) представляют главную часть $L(W)$ внутри отрезка γ линии Γ при $\text{mes } \gamma \rightarrow 0$. Для этого рассмотрим за-

дачу типа (1.1)–(1.5) с силой и моментом, приложенным в точке s_i ребра (задача с источником в области приводится к рассматриваемой):

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w &= 0 \text{ в } S \\ w|_L &= 0, w_\nu|_L = 0, [w]_{-}^+|_\Gamma = 0, [w_n]_{-}^+|_\Gamma = 0 \\ [\Delta w]_{-}^+|_\Gamma &= -akl(w) + k\delta(s-s_i) \\ \left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta w \right]_{-}^+|_\Gamma &= -\frac{\partial^2}{\partial s^2} [al(w) - \delta(s-s_i)] \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь и далее $\delta(s-s_i)$ – дельта-функция. Пусть a_1 и a_2 – различные кусочно-постоянные управления, $w^1(p, s_1)$ и $w^2(p, s_2)$, $p \in S$ – решения задачи (5.2) с полюсами $s_1 \in \Gamma$ и $s_2 \in \Gamma$. Полагая в интегральном тождестве

$$\int_S \varphi \operatorname{div} \mathbf{B} \, dx \, dy = \oint_L \varphi B_\nu \, dl + \oint_\Gamma [\varphi B_n]_{-}^+ \, ds - \int_S (\mathbf{B}, \nabla \varphi) \, dx \, dy$$

сначала $\varphi = w^2$, $\mathbf{B} = \nabla \Delta w^1$, затем $\varphi = w^1$, $\mathbf{B} = \nabla \Delta w^2$, вычитая результаты и учитывая условия на Γ в (5.2), получим

$$l^2(s_1, s_2) - l^1(s_2, s_1) = \oint_\Gamma (a_1 - a_2) l^1(s, s_1) l^2(s, s_2) \, ds, \quad l^i = kw_n^i - w_{ss}^i \quad (5.3)$$

Очевидно свойство симметрии $l^1(s_2, s_1) = l^2(s_1, s_2)$ при $a_1 = a_2$.

Покажем, что характер особенности величины $l^1(w^1)$ в задаче (5.2) можно определить из вспомогательной задачи с круговым ребром Γ_0 , касающимся ребра Γ в точке s_1 (фиг. 4) и имеющим жесткость a_1 и постоянную кривизну $k_0 = k(s_1)$, равную кривизне исходного ребра в точке касания s_1 . Ребро Γ_0 нагружено теми же силой и моментом, что и ребро Γ .

Обозначим решение вспомогательной задачи через w° ; пусть $l^\circ = -k_0 w_n^\circ - w_{ss}^\circ$, тогда разность $u = w^1 - w^\circ$ будет решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u &= 0 \text{ в } S \\ [u]_{-}^+|_\Gamma &= 0, [u_n]_{-}^+|_\Gamma = 0, [u]_{-}^+|_{\Gamma_0} = 0, [u_n]_{-}^+|_{\Gamma_0} = 0, u|_L = 0, u_\nu|_L = 0 \\ [\Delta u]_{-}^+|_\Gamma &= -ka_1 l(u) - \begin{cases} ka_1 l^\circ, & s \neq s_1 \\ 0, & s = s_1 \end{cases} \\ [\Delta u]_{-}^+|_{\Gamma_0} &= -k_0 a_1 l(u) - \begin{cases} k_0 a_1 l^\circ, & s \neq s_1 \\ 0, & s = s_1 \end{cases} \\ \left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right]_{-}^+|_\Gamma &= -\frac{\partial^2}{\partial s^2} a_1 l(u) - \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial s^2} a_1 l^\circ, & s \neq s_1 \\ 0, & s = s_1 \end{cases} \\ \left[\frac{\partial}{\partial n} \Delta u \right]_{-}^+|_{\Gamma_0} &= -\frac{\partial^2}{\partial s^2} a_1 l(u) - \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial s^2} a_1 l^\circ, & s \neq s_1 \\ 0 & s = s_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Поэтому решение w^1 и оператор $l^1|_\Gamma$ можно представить через решение w° и l° вспомогательной задачи и регулярную в точке s_1 функцию: $l^1|_\Gamma = l^\circ|_\Gamma + l^\circ(u)|_\Gamma$, или

$$l^1|_\Gamma = l^\circ|_{\Gamma_0} + [l(u)]|_\Gamma + l^\circ|_{\Gamma_0} \quad (5.5)$$

После решения задачи с круговым ребром Γ_0 кривизны k_0 по методу разделения переменных получаем оценку $l^\circ|_{\Gamma_0} = \frac{1}{a_1} \delta(s-s_1) + l_*^\circ|_{\Gamma_0}$, где l_*° — регулярная функция. Обозначим $G = l_*^\circ|_{\Gamma_0} + l(u)|_{\Gamma} + l^\circ|_{\Gamma} - l^\circ|_{\Gamma_0}$, тогда из (5.5) $l^1|_{\Gamma} = \frac{1}{a_1} \delta(s-s_1) + G(s, s_1)$.

Предположим, что управления $a_1(s)$ и $a_2(s)$ отличаются на малом отрезке $\gamma \subset \Gamma$, $\text{mes } \gamma \rightarrow 0$:

$$a_1(s) - a_2(s) = 0, \quad s \in \gamma; \quad a_1(s) - a_2(s) \neq 0, \quad s \in \bar{\gamma}$$

и вычислим интеграл в (5.3)

$$\oint_{\Gamma} (a_1 - a_2) l^1(s, s_1) l^2(s, s_2) ds = \int_{\bar{\gamma}} (a_1 - a_2) l^2(s, s_2)$$

$$[a_1^{-1} \delta(s-s_1) + G(s, s_1)] ds = (a_1 - a_2) a_1^{-1} l^2(s_1, s_2) + \int_{\bar{\gamma}} (a_1 - a_2) l^2(s, s_2) G(s, s_1) ds \quad (5.6)$$

Тогда при $\text{mes } \gamma \rightarrow 0$ из (5.3) и (5.6) заключаем, что справедлива оценка

$$a_2 l^2(s_1, s_2) / a_1 - l^1(s_2, s_1) = o(1)$$

Полагая здесь $a_2 = A$, $l^2(s_1, s_2) = L(W)$, $a_1 = a$, $l^1(s_2, s_1) = l(w)$, получим формулу (2.12).

В случае прямого ребра ($k=0$) оценка (2.12) получается при непосредственном решении исходной задачи (5.2). При доказательстве второй формулы в (2.12) в этом случае следует рассмотреть вспомогательные задачи с источником вида $\delta(x-x_0)$ в условии на разрыв второй нормальной производной.

Поступила 10 I 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М., «Наука», 1975.
2. Арман Ж.-Л. П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М., «Мир», 1977.
3. Баничук Н. В. Об оптимальных формах упругих пластин в задачах изгиба. Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 5.
4. Olhoff N. On singularities, local optima and formation of stiffeners in optimal design of plates. Proc. IUTAM Sympos. on optimization in structural design (Warsaw, 1973), Berlin, Springer Verlag, 1973.
5. Simitses G. J. Optimal vs the stiffened circular plate. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 10.
6. Лурье К. А., Черкаев А. В. О применении теоремы Прагера к задачам оптимального проектирования тонких пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6.
7. Самсонов А. М. Оптимальное положение упругого тонкого ребра на упругой пластине. Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1.
8. Самсонов А. М. О выборе оптимального дискретного распределения жесткостей ребра на круглой пластине. Прикл. механика, 1978, т. 14, № 11.