МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1980

УДК 539.4:624.03

О БЕЗОПАСНЫХ РАЗМЕРАХ ТРЕЩИН ПРИ СЛУЧАЙНОМ НАГРУЖЕНИИ

В. В. БОЛОТИН

(*Москва*)

Задача прогнозирования индивидуального остаточного ресурса конструкций была поставлена в [1]. Решение этой задачи требует определения апостериорных вероятностных характеристик поведения конструкций на основании априорных вероятностных данных о нагрузках и материалах, а также совокупности всех данных о предыстории нагружения и поведения конструкций. При прогнозировании используются результаты решения ряда задач механики, среди которых одной из важнейших является следующая: зная число, расположение и размеры трещин в элементе конструкции в заданный момент времени, предсказать развитие этих трещин во времени и оценить вероятность того, что на заданном отрезке времени ни одно из этих трещин не достигнет критического размера. Некоторые вопросы развития трещин под действием случайных нагрузок рассматривались в [2–4]. В предлагаемой работе дается решение задачи об определении безопасных размеров трещин, которые обеспечивают неразрушение конструктивного элемента на заданном отрезке времени с заданной вероятностью.[1]

1. Пусть в момент $t=0$ в теле обнаружено m субкритических трещин размером $l_j(0)$ $(j=1,\ldots,m)$. При $t>0$ тело подвергается действию случайных нагрузок; при этом в окрестности кончиков трещин возникают номинальные напряжения $s_j(t)$ $(j=1,\ldots,m)$. Полагая, что размеры трещин малы по сравнению с характерными размерами тела и масштабом изменения поля номинальных напряжений, что трещины — неветвящиеся и расстояния между ними таковы, что их взаимодействие пренебрежимо мало, будем определять размеры субкритических трещин при $t>0$ как

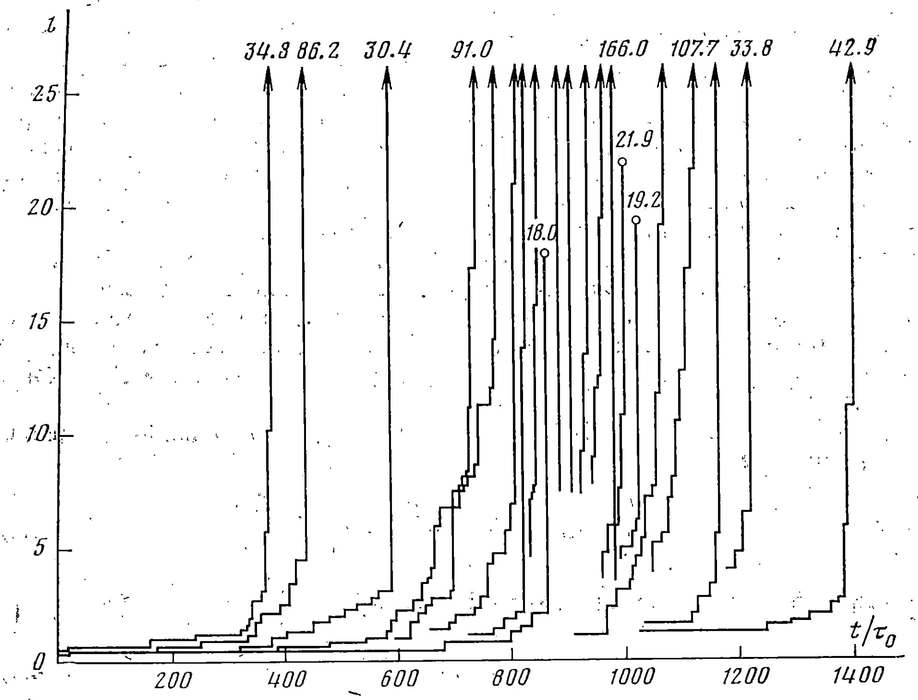
$$l_j(t)=\underset{\tau=0}{\overset{\tau=t}{H}}[s_j(\tau)]\quad{}_{(j=1,\ldots,m)}\tag{1.1}$$

Здесь H — некоторый функционал от процесса изменения номинального напряжения $s_j(\tau)$ на отрезке $[0, t]$. Пусть следующий профилактический осмотр конструкции производится при $t=T$. Совокупность трещин, обнаруженных при $t=0$, будем считать безопасной, если на отрезке $[0, T]$ с заданной достаточно близкой к единице вероятностью R_* (например, $R_*=0.99$; 0.999 и т. п. [5]) будут выполняться неравенства $l_j(t)<l_j^*(t)$ $(j=1,\ldots,m)$. При этом $l_j^*(t)$ — критический размер для j-й трещины, зависящий от значения номинального напряжения $s_j(t)$ в данный момент времени. Вероятность неразрушения дается соотношением

$$R(t)=\mathbf{P}\{l_j(\tau)<l_j^*(\tau);\quad j=1,\ldots,m;\quad \tau\in[0,t]\}\tag{1.2}$$

где $\mathbf{P}(A)$ — вероятность случайного события A. Если вероятность (1.2) вычислена как функция начальных параметров трещин и вероятностных ха-

[1] Результаты являются составной частью доклада автора «Надежность конструкций» на Международном симпозиуме по перспективам развития механики твердого тела (Дельфт, 13–15 июня 1979 г.).



Фиг. 1

рактеристик процесса нагружения, то для любого заданного значения R_* определяется максимально допустимый отрезок времени T до ближайшего профилактического осмотра. Обратно, если время до ближайшего осмотра задано, то соотношение (1.2) позволяет решить вопрос, можно ли обнаруженное множество трещин рассматривать как безопасное.

Вычисление вероятности (1.2) сводится к задачам теории выбросов случайных процессов. Размерность рассматриваемого процесса в общем случае равна $2m$, причем компоненты этого процесса стохастически связаны между собой как вследствие связанности номинальных напряжений, так и в силу соотношений (1.1). Все это усложняет решение задачи. На фиг. 1 представлены результаты математического моделирования процесса развития усталостной трещины начального размера $l_0=0.5$ *мм* под действием узкополосного нормального процесса $s(t)$ с преобладающим периодом τ_0. Развитие трещины до критического размера l_* моделировалось при помощи уравнения Пэриса – Эрдогана, а критическая длина вводилась, как обычно, по Гриффитсу – Ирвину [2, 6]. Разные реализации процесса $l(t)$ соответствуют разным реализациям случайного процесса $s(t)$. Обращает на себя внимание не только значительный разброс размеров трещин в каждый фиксированный момент времени, но и существенный разброс критических размеров. Величины некоторых из них в *мм* указаны у концов кривых. Из-за разброса нагрузочных реализаций в одном случае образец разрушился после 470 циклов при критическом размере $l_*=86.2$ *мм*, а в другом случае просуществовал до 1030 циклов, разрушившись при критическом размере $l_*=19.2$ *мм*.

2. Рассмотрим вспомогательную задачу о нахождении закона распределения размера одиночной неветвящейся трещины, имевшей при $t=0$ начальный размер l_0. Пусть уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{dl}{dt}=\frac{c}{\tau_0}g_1(l)g_2(s) \qquad (2.1)$$

где c — некоторый постоянный коэффициент, τ_0 — постоянная времени, $g_1(l)$ и $g_2(s)$ — функции размера трещины l и номинального напряжения s

соответственно. Мультипликативная структура правой части в дальнейшем имеет существенное значение. К уравнению типа (2.1) приводят многие известные модели субкритического роста трещин. Так, в однопараметрической теории разрушения скорость роста трещины при длительном (нециклическом) нагружении часто полагается степенной функцией коэффициента интенсивности напряжений $K=sl^{1/2}$. Здесь и далее постоянные множители в выражениях для коэффициентов интенсивности для простоты введены в величину номинальных напряжений. При этом $g_1(l)=l^{n/2}$, $g_2(s)=s^n$, где n — показатель степени при коэффициенте интенсивности. Если нагружение — циклическое, то обычно используется уравнение Пэриса — Эрдогана [6], в котором скорость роста усталостной трещины полагается степенной функцией от приращения коэффициента интенсивности в пределах одного цикла. Пусть процесс $s(t)$ — узкополосный с огибающей $s_e(t)$. Тогда приближенно $g_1(l)=l^{n/2}$, $g_2(s)=2^n s_e^n$.

Интегрируя уравнение (2.1) на отрезке $[0, t]$ при начальном условии $l(0)=l_0$, получим

$$W(l|l_0)\equiv\frac{\tau_0}{c}\int\limits_{l_0}^{l}\frac{dl}{g_1(l)}=w(t) \tag{2.2}$$

где в правой части стоит случайная функция

$$w(t)=\int\limits_0^t g_2[s(\tau)]d\tau \tag{2.3}$$

Задача состоит в том, чтобы по заданным характеристикам процесса $s(t)$ найти закон распределения процесса $l(t|l_0)$. Полное и точное решение такой задачи, по-видимому, неосуществимо. Однако нетрудно получить приближенное и вместе с тем достаточно универсальное решение, если для интеграла (2.3) выполняются условия центральной предельной теоремы. Эти условия, как известно [7], сводятся к требованию достаточной перемешанности подынтегрального выражения в правой части (2.3) и к некоторым ограничениям на моменты от этого процесса. Достаточная перемешанность будет иметь место, если время корреляции τ_c процесса $s(t)$ достаточно мало по сравнению с временами t, при которых определяется размер трещины. Ограничения на моменты не очень стеснительны, так что выполняются почти для всех моделей непрерывных случайных нагрузок, которые могут встретиться в приложениях. Если условия теоремы выполнены, то для функции распределения $F_w(w;\ t)$ значений процесса $w(t)$ имеет место асимптотическое соотношение

$$F_w(w;t)\sim\Phi\left\{\frac{w-\mathrm{E}[w(t)]}{\sigma_w(t)}\right\},\quad \Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{u}e^{-z^2/2}dz \tag{2.4}$$

где $\mathrm{E}[w(t)]$ — математическое ожидание процесса $w(t)$, $\sigma_w^2(t)$ — его дисперсия, $\Phi(u)$ — функция нормированного распределения Гаусса. Учитывая (2.3), найдем

$$\begin{gathered}\mathrm{E}[w(t)]=\int\limits_0^t\mathrm{E}\{g_2[s(\tau)]\}d\tau\\ \mathrm{E}[w^2(t)]=\int\limits_0^t\int\limits_0^t\mathrm{E}\{g_2[s(\tau_1)]g_2[s(\tau_2)]\}d\tau_1 d\tau_2\end{gathered} \tag{2.5}$$

так что для вычисления функций, входящих в асимптотическую формулу (2.4), необходимо знать плотности одноточечного $p(s;\ t)$ и двухточечного $p(s_1,\ s_2;\ t_1,\ t_2)$ распределений процесса $s(t)$. В частности, если последний процесс — стационарный, то [1]

$$\mathbf{E}[w(t)]=\mu t, \qquad \sigma_w^2(t)\approx\nu t$$
$$\mu=\mathbf{E}\{g_2[s(t)]\}, \qquad \nu=2\int_0^\infty K_{g_2}(\tau)\,d\tau \tag{2.6}$$

где $K_{g_2}(\tau)$ — корреляционная функция процесса $g_2[s(t)]$. Равенство для дисперсии в (2.6) — приближенное; оно выполняется тем точнее, чем меньше время корреляции τ_c по сравнению с t.

После того как распределение функции (2.3) найдено, дальнейшие вычисления трудностей не представляют. Замечая, что $W(l\,|\,l_0)$ — возрастающая функция от l, получим для функции распределения $F_l(l\,|\,l_0)$ размеров трещин, имевших при $t=0$ длину l_0, соотношение $F_l(l;\ t\,|\,l_0)=F_w[W(l\,|\,l_0);\ t]$. Отсюда с учетом (2.4) получаем:

$$F_l(l;\,t\,|\,l_0)\sim\Phi\left\{\frac{W(l\,|\,l_0)-\mathbf{E}(w(t))}{\sigma_w(t)}\right\} \tag{2.7}$$

Плотность вероятности $p_l(l;\ t\,|\,l_0)$, математическое ожидание $\mathrm{E}[l(t\,|\,l_0)]$ и другие характеристики распределения процесса $l(t\,|\,l_0)$ выражаются непосредственно через функцию (2.7). Представление о росте трещины дает ее характеристическая длина $l_c(t\,|\,l_0)$, равная корню уравнения $W(l\,|\,l_0)=\mathrm{E}[w(t)]$. Как видно из (2.7), при малом разбросе эта величина будет близка к математическому ожиданию $\mathrm{E}[l(t\,|\,l_0)]$. На фиг. 2 представлены некоторые графики зависимости l_c от l_0 и t. Здесь и далее все размеры трещин даны в *мм*. Графики построены для случая, когда напряжение $s(t)$ — узкополосный нормальный процесс со среднеквадратическим значением $\sigma_s=2\cdot10^8$ Нм$^{-2}$, а рост трещины описывается уравнением Пэриса – Эрдогана с показателем степени $n=4$ и с постоянной $c=10^{-37}$ H^{-4} $м^7$.

3. Безопасные длины трещин проще всего назначаются в том случае, когда предельные значения l_* заданы. Тогда при наличии одной трещины вероятность неразрушения (1.2) определяется как $R(t)=\mathrm{P}\{l(t\,|\,l_0)<l_*\}$. Отсюда $R(t)=1-F_l(l_*;\ t\,|\,l_0)$, где функция $F_l(l;\ t\,|\,l_0)$ вычисляется по формуле (2.7). Однако, как было показано путем математического моделирования (см., например, фиг. 1), разброс критических значений l_*, вызванный разбросом нагрузочных реализаций, имеет такой же порядок, как и разброс длин $l(t\,|\,l_0)$. Поскольку первичная вероятностная информация, как правило, относится к нагрузкам и к номинальным напряжениям, то целесообразно записать соотношение (1.2) в терминах напряжений:

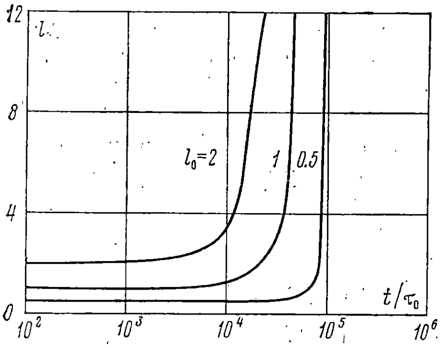
$$R(t)=\mathbf{P}\{s_j(\tau)<s_j^*(\tau);\quad j=1,\ldots,m;\quad \tau\in[0,\ t]\} \tag{3.1}$$

Здесь $s_j^*(t)$ — критическое напряжение для j-й трещины, зависящее от ее размера $l(t\,|\,l_0)$ в рассматриваемый момент времени. В рамках концепции Гриффитса – Ирвина $s_j^*(t)=K_*[l_j(t\,|\,l_0)]^{-1/2}$, где K_* — критическое значение коэффициента интенсивности. Таким образом, вычисление вероятности неразрушения сводится к определению вероятности пребывания процесса с компонентами $s_j(t)$ и $s_j^*(t)$ $(j=1,\ldots,m)$ в области $s_j-s_j^*<0$.

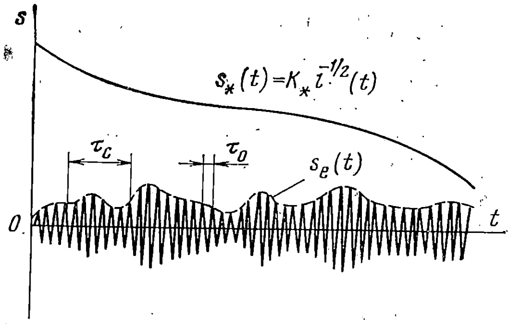
Пусть найдено математическое ожидание $\lambda(t)$ числа выбросов из этой области в единицу времени (аналог интенсивности отказов в теории надежности). Если эти выбросы редкие, то вероятность неразрушения (3.1) приближенно вычисляется по экспоненциальной формуле [8, 9]:

$$R(t) \approx \exp\left[-\int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right] \tag{3.2}$$

4. В данной задаче вычисление этих характеристик усложняется из-за того, что все компоненты процесса в общем случае оказываются стохастически связанными. Поясним вычисления на простейшем примере, когда $m=1$. Пусть номинальное напряжение $s(t)$ представляет собой стационар-



Фиг. 2



Фиг. 3

ный узкополосный нормальный процесс с равным нулю математическим ожиданием, дисперсией σ_s^2 и корреляционной функцией $K_s(\tau) = \sigma_s^2\rho(\tau)\cos\omega_0\tau$. Здесь $\rho(\tau)$ — дважды дифференцируемая медленно изменяющаяся на отрезке $\tau_0=2\pi/\omega_0$ функция. При этом эффективная частота огибающей $s_e(t)$ процесса $s(t)$ удовлетворяет условию $\omega_e=|\rho''(0)|^{1/2}\ll\omega_0$. Пусть процесс роста трещины $l(t|l_0)$ является достаточно медленным по сравнению с процессом $s_e(t)$ (фиг. 3). В этих условиях допустимо пренебречь взаимосвязанностью процессов $s_e(t)$ и $s_*(t)$, рассматривая вначале выбросы процесса $s_e(t)$ за постоянный заданный уровень s_* и осредняя найденный результат по всем возможным значениям s_*:

$$\lambda(t) = \int_0^\infty \Lambda(s_*)\,p_*(s_*;t)\,ds_* \tag{4.1}$$

Здесь $\Lambda(s_*)$ — интенсивность отказов как функция уровня s_*. При умеренно низких уровнях s_* интенсивность отказов $\Lambda(s_*)$ определяется как математическое ожидание в единицу времени числа выбросов рэлеевского процесса $s_e(t)$, а при очень высоких уровнях s_* (когда понятие огибающей утрачивает смысл) — как математическое ожидание числа выбросов нормального процесса $s(t)$:

$$\Lambda(s_*) = \min\left\{\frac{\omega_e}{\sqrt{2\pi}}\frac{s_*}{\sigma_s}\exp\left(-\frac{s_*^2}{2\sigma_s^2}\right),\ \frac{\omega_0}{2\pi}\exp\left(-\frac{s_*^2}{2\sigma_s^2}\right)\right\}$$

Для более грубой оценки аппроксимируем плотность распределения $p_*(s_*;t)$ при помощи дельта-функции, принимая за характерное значение s_{**} корень уравнения

$$W[(K_*/s_{**})^2|l_0] = \mu t \tag{4.2}$$

Оценка для вероятности неразрушения (3.2) с учетом формул (4.1) и (4.2) принимает вид

$$R(t) \approx \exp\left\{-\int_0^t \Lambda[s_{**}(\tau)]d\tau\right\} \tag{4.3}$$

Некоторые результаты вычислений показаны на фиг. 4–6, где представлено изменение во времени характеристики $\lambda(t)$, вероятности неразрушения $R(t)$ и плотности вероятности $p(T)$ времени T до разрушения. Вычисления проведены для процесса $s(t)$ с нормированной корреляционной функцией $\rho(\tau)=\exp(-\tau^2/\tau_c^2)$. Коэффициенты μ и ν из формулы (2.6) вычисляются аналогично тому, как это сделано для континуальной модели накопления усталостных повреждений в [1]. При этом

$$\mu=\sigma_s^n 2^{3n/2}\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right), \quad \nu=\sigma_s^{2n}2^{3n}\sum_{\alpha=1}^{\infty}B_\alpha^2\tau_\alpha, \quad \tau_\alpha=2\int_0^\infty \rho^{2\alpha}(\tau)\,d\tau$$

$$B_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\alpha}\frac{\alpha!(-1)^\beta}{(\beta!)^2(\alpha-\beta)!}\left[\Gamma\left(1+\alpha+\frac{n}{2}\right)-\Gamma(1+\alpha)\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\right]$$

Вычисления выполнены для значений $\sigma_s=2\cdot10^8$ $Нм^{-2}$, $\omega_e=0.05\ \omega_0$, $n=4$, $c=10^{-37}\ Н^{-4}\ м^7$, $K_*^2=10^{15}\ Н^2\ м^{-3}$.

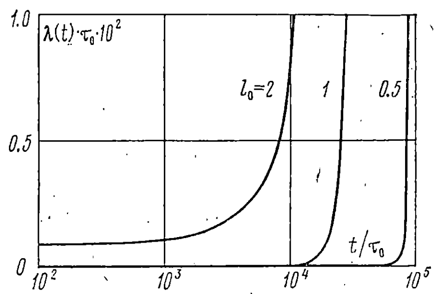
5. Обычно требуется обеспечение неразрушения с высокой степенью надежности. Высокий уровень надежности целесообразно задавать [9] при помощи логарифмической меры $r=\lg(1-R)^{-1}$. При $R=0.999\ldots$ мера r просто равна «числу девяток». Если $1-R(t)\ll1$, то возможно проведение далеко идущих упрощений без снижения точности. Эти упрощения носят асимптотический характер в том смысле, что их точность будет тем выше, чем ближе к единице вероятность неразрушения $R(t)$.

Например, вместо формулы (3.2) в этом случае получается соотношение

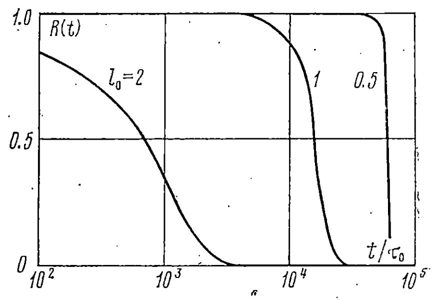
$$r(t)\sim-\lg\left[\int_0^t\lambda(\tau)\,d\tau\right] \tag{5.1}$$

Некоторые результаты вычислений в области малых вероятностей разрушения приведены на фиг. 7. Эти результаты получены при $l_0=0.5$ *мм*; остальные исходные данные такие же, что и в предыдущих примерах. На фиг. 7 нанесены также кривые, соответствующие случаю, когда при $t=0$ в теле обнаружено m трещин одинакового размера, причем номинальные напряжения для всех трещин одинаковы. Имея графики такого типа, нетрудно оценить отрезок времени, в пределах которого трещины заданной начальной длины с заранее заданной весьма близкой к единице вероятностью не достигнут критического значения.

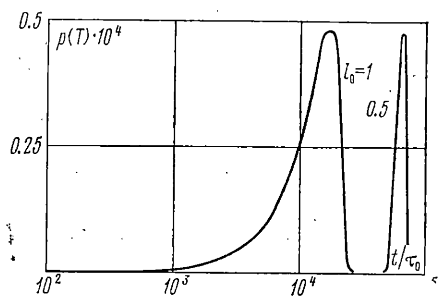
Построенное решение обобщается на ситуацию, когда множество трещин при $t=0$ задается вероятностным способом — при помощи совместной плотности вероятности $p(l_1,\ldots,l_M;\ 0)$ для совокупности M трещин. При этом $M\geqslant m$, т. е. предусматриваются вакансии для трещин нулевого размера. Такая ситуация отражает несовершенство существующих методов неразрушающего контроля и обнаружения трещин. Известно [4], что при использовании ультразвуковых методов обнаруживается лишь около 20% от общего числа трещин, длина которых менее 1 *мм*. Байесовский подход позволяет произвести оценку плотности вероятности $p(l_1,\ldots,l_M;\ 0)$ по



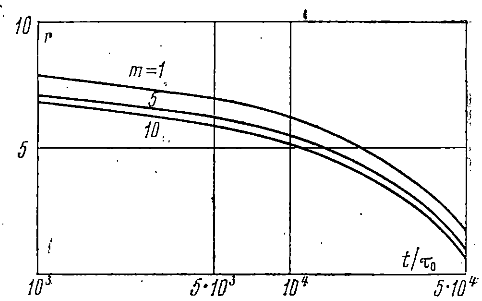
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

эмпирическому распределению размеров обнаруженных трещин, если известны соответствующие априорные вероятности. Следующий шаг состоит в вычислении совместной плотности $p(l_1,\ldots,l_M;\ t)$ при $t>0$. При этом выведенные выше формулы можно трактовать как формулы для соответствующих условных распределений, что отчасти отражено в обозначениях (2.2), (2.7) и др.

Поступила 6 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* О прогнозировании надежности и долговечности машин. Машиноведение, 1977, № 5.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука». 1974.
3. *Yang J.-N.*, Trapp W. J. Joint aircraft loading/structure response statistics of time to service crack initiation. J. Aircraft, 1976, vol. 13, No. 4.
4. *Heller R. A., Stevens G. H.* Bayesian estimation of crack initiation times from service data. J. Aircraft, 1978, vol. 15, No. 11.
5. *Payne A. O.* The fatigue of aircraft structures. In: Progress in Fatigue and Fracture, Oxford, Pergamon Press, 1976.
6. *Paris P. C.* Fatigue — an interdisciplinary approach. Syracuse, N. Y., Syracuse University Press, 1965.
7. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М., «Наука», 1965.
8. *Болотин В. В.* Теория надежности механических систем с конечным числом степеней свободы. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 5.
9. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М., Стройиздат, 1971.