МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1980

УДК 531.381

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

И. А. ГАЛИУЛЛИН

(*Москва*)

Предлагается метод определения параметров, входящих в правые части автономной системы дифференциальных уравнений, при которых она обладает решениями с заданными свойствами. Метод основывается на построении систем уравнений по заданному интегральному многообразию. Определяются выражения для моментов внешних сил, действующих на твердое тело, с одной закрепленной точкой, при которых тело совершает заданное (программное) движение. Рассматривается случай потенциального поля сил.

В качестве примера определяются выражения для моментов сил осесимметричного поля, в котором твердое тело совершает регулярную прецессию вокруг оси симметрии поля. Доказано, что если ось собственного вращения является главной осью эллипсоида инерции, то регулярные прецессии возможны только для динамически симметричных тел. Проведена классификация известных регулярных прецессий тяжелого твердого тела.

1. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}}=X_i(x, p) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$; X_i — функции класса C^1, определенные в области $G\subseteq R^n$; $p=(p_1, p_2, \ldots)\in\Pi$ — выбираемые из некоторого множества Π параметры системы (1.1), которые в дальнейшем будем именовать собственными параметрами.

Поставим задачу — описать все такие подмножества $P\subseteq\Pi$, когда при $p\in P$ система (1.1) обладает хотя бы одним решением $x=x(t)$ со свойствами, выраженными следующей системой равенств:

$$\omega_\mu(x)=0 \qquad (\mu=1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

где функции $\omega_j\in C^1(G)$ при условии, что имеют место равенства

$$f_j(x)=0 \qquad (j=1, \ldots, r) \tag{1.3}$$

которые по предположению составляют систему частных интегралов системы (1.1).

Последнее означает, что функции $f_j\in C^1(G)$ и для любого решения $x=x(t)$ системы (1.1) имеет место $f_j(x(t))=0$, если $f_j(x(t_0))=0$ для некоторого t_0 $(j=1,\ldots,r)$. Иными словами, всякая фазовая траектория системы (1.1), начинающаяся на многообразии Ω_f, определенном равенствами (1.3), в дальнейшем не выходит за его пределы.

Обозначим через Ω_ω многообразие, определенное равенствами (1.2), а через Ω_P — множество в R^n, образованное фазовыми траекториями, для которых выполняются (1.2) и (1.3) при любых $p\in P$.

Тогда имеем

$$\Omega_P\subseteq\{\Omega_f\cap\Omega_\omega\} \tag{1.4}$$

Предположим, далее, что система (1.1) обладает некоторой совокупностью первых интегралов

$$F_l(x)=C_l \quad (l=1, \ldots, q) \tag{1.5}$$

Система функций $\omega_1, \ldots, \omega_m, f_1, \ldots, f_r, F_1, \ldots, F_q$ будет предполагаться независимой, система равенств (1.2) и (1.3) — совместной и $m+r+q\leqslant n$.

Поставленная задача, являющаяся по существу задачей восстановления [1], решается с использованием методов построения систем дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию [2, 3].

Пусть система

$$x_i^{\boldsymbol{\cdot}}=\Psi_i(x) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

обладает первыми интегралами (1.5), системой частных интегралов (1.3) и хотя бы одним решением со свойствами (1.2). Дифференцируя (1.2), (1.3) и (1.5), в силу (1.6) получим систему линейных уравнений относительно $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$

$$(\operatorname{grad}\omega_\mu\cdot\boldsymbol{\Psi})=\Phi_\mu \quad (\mu=1, \ldots, m), \qquad (\operatorname{grad} f_j\cdot\boldsymbol{\Psi})=\Phi_j^{(f)} \quad (j=1, \ldots, r),$$
$$(\operatorname{grad} F_l\cdot\boldsymbol{\Psi})=0 \quad (l=1, \ldots, q) \tag{1.7}$$

где $\boldsymbol{\Psi}=(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ — вектор-функция правых частей системы (1.6), $\Phi_j^{(f)}$ — произвольные функции, обращающиеся в нуль на Ω_f, Φ_μ — произвольные функции, обращающиеся в нуль на множестве фазовых траекторий решений системы (1.1) со свойствами (1.2) (свойства (1.3) для этих решений предполагаются выполненными), т. е. на множестве Ω_P.

Если

$$\Delta=\frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_m, f_1, \ldots, f_r, F_1, \ldots, F_q)}{\partial(x_1, \ldots, x_{m+r+q})}\neq 0$$

то для Ψ_i получим выражения

$$\Psi_i=\Delta^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{m}\Delta_{\nu i}\Phi_\nu+\sum_{\varkappa=1}^{r}\Delta_{m+\varkappa i}\Phi_\varkappa^{(f)}-\sum_{s=m+r+q}^{n}\Delta^{is}\Psi_s\right) \quad (i=1,\ldots,m+r+q) \tag{1.8}$$

причем Ψ_s $(s=m+r+q, \ldots, n)$ — произвольные функции класса C^1, Δ_{ji} — алгебраическое дополнение (j, i)-го элемента определителя Δ, Δ^{is} — определитель, полученный из Δ заменой его i-го столбца s-м столбцом матрицы системы линейных уравнений (1.7). Функции $\Phi_j^{(f)}$ обращаются в нуль на Ω_P в силу (1.4), следовательно, выполнение равенств

$$X_i(x, p)=-\Delta^{-1}\sum_{s=m+r+q}^{n}\Delta^{is}X_s(x, p) \quad (i=1,\ldots,m+r+q) \tag{1.9}$$

на множестве Ω_P является необходимым и достаточным условием существования искомого подмножества P множества собственных параметров.

Само множество Ω_P не является известным. В частности, оно может представлять собой одномерное многообразие, т. е. кривую в фазовом пространстве. Если существует такое подмножество параметров P_0, что равенства (1.9) имеют место на $\Omega_f\cap\Omega_\omega$, то совокупность равенств (1.2) и (1.3) образует систему частных интегралов. Если такого подмножества не существует, то в (1.4) имеет место строгая импликация. Тогда определение Ω_P можно вести с помощью первых интегралов (1.5).

Обозначим через σ_l поверхность, определяемую l-м уравнением системы (1.5) при фиксированном значении C_l, и рассмотрим последовательность вложенных многообразий

$$\Sigma_q\subset\Sigma_{q-1}\subset\ldots\subset\Sigma_1,\quad \Sigma_l=\bigcap_{j=1}^{l}\sigma_j$$

Для каждого $l=1,\ldots,q$ определим подмножество $P_l\subseteq\Pi$ как множество собственных параметров, при которых равенства (1.9) выполняются на многообразии $\Omega_f\cap\Omega_\omega\cap\Sigma_l$, при этом постоянные $C_1,\ldots,C_l$, вообще говоря, представляют собой функции параметров $p\in P_l$. Некоторые из множеств P_l могут быть пустыми.

Если $m+r+q=n$, то описание множеств P закончено. В противном случае равенства (1.9) можно рассматривать как уравнения некоторых поверхностей, содержащих Ω_P.

Перенеся все слагаемые в левую часть, запишем (1.9) в виде

$$\psi_i(x)=0\quad (i=1,\ldots,m+r+q)\tag{1.10}$$

Пусть $\omega_1{}^\circ,\ldots,\omega_{m_1}{}^\circ$ — максимальная независимая подсистема системы функций $\omega_1,\ldots,\omega_m,\ \psi_1,\ldots,\psi_{m+r+q}$. Тогда можно указанным методом решить исходную задачу, заменяя равенства (1.2) системой равенств

$$\omega_\mu{}^\circ(x)=0\quad (\mu=1,\ldots,m_1;\ m_1>m)\tag{1.11}$$

и получая равенства

$$\psi_i{}^\circ(x)=0\quad (i=1,\ldots,m_1+r+q)\tag{1.12}$$

аналогичные (1.10). Этот процесс можно повторять $\varkappa$ раз, рассматривая $m_\varkappa$ равенств вида (1.2). Так как величина $m_\varkappa$ каждый раз увеличивается по крайней мере на единицу, то исходная задача решается за конечное число шагов.

Заметим, что каждому подмножеству P собственных параметров, удовлетворяющих условиям поставленной задачи, соответствует подмножество во множестве всевозможных начальных значений, обладающее свойством, когда на всяком решении системы (1.1) с начальными значениями из этого подмножества выполняются (1.2) и (1.3). Любую совокупность начальных значений $x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}$, а также произвольные функции (класса C^1) от них, например величины $C_1,\ldots,C_l$, будем называть интегральными параметрами.

Введем следующее определение.

Определение. Для заданного $P\subseteq\Pi$ семейство решений $x=x(t)$ системы (1.1) при $p\in P$, удовлетворяющих равенствам (1.2) при условии (1.3), называется k-параметрическим ω-семейством, если максимальное число независимых интегральных параметров равно k.

Ясно, что фазовые траектории интегральных кривых указанного семейства образуют множество Ω_P. Так как изложенный выше метод определяет Ω_P с помощью неявных уравнений, то Ω_P будет представлять собой многообразие размерности k класса C^1 [4], если функции $\psi_i(x)$ в (1.10) будут класса C^1.

Отметим далее, что можно обобщить постановку задачи, рассматривая вместо равенств (1.2) равенства вида

$$\omega_\mu(x,p)=a_\mu\quad (\mu=1,\ldots,m)\tag{1.13}$$

где a_μ — некоторые постоянные, которые можно считать интегральными параметрами. Величины a_μ, так же как и C_l, в дальнейшем могут оказаться функциями параметров p или принимать некоторые фиксированные значения.

Введение параметров p в равенства (1.13) вызывает возможность обращения в нуль определителя Δ при некоторых $p \in \Pi$. Этот случай следует рассматривать особо, исключая в (1.13) зависимые соотношения, в остальном метод решения задачи не изменяется.

Заметим, что определение Ω_p можно проводить, используя понятие инвариантного соотношения, введенного в [5]. Для данной системы (1.1) соотношение $\varphi(x)=0$ называется $(l-1)$-слойным инвариантным соотношением, если последовательность $\{\varphi^{(j)}\}$, $j=0, 1, 2, \ldots$, где

$$\varphi^{(0)}=\varphi, \quad \varphi^{(j)}(x)=\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x, p)\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varphi^{(j-1)}(x) \quad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots)} \tag{1.14}$$

содержит l функционально независимых членов, причем

$$\bigcap_{\varkappa=1}^{l} \{x \mid \varphi^{(j)}(x) \neq 0\} = \varnothing$$

Эту последовательность можно строить как для функций $\psi_i(x)$, так и для самих функций $\omega_\mu(x)$.

Ясно, что если при $r=q=0$, $m=1$ равенство $\omega_1(x)=0$ будет $(l-1)$-слойным инвариантным соотношением, то соответствующее семейство решений $x=x(t)$, согласно введенному выше определению, будет представлять собой $(n-l)$-параметрическое ω_1-семейство.

Метод определения многообразия Ω_p, изложенный здесь, позволяет сразу получить равенства (1.9) как необходимые и достаточные условия разрешимости поставленной задачи. Кроме того, построение функций Ψ_i дает возможность потребовать дополнительно выполнение условий

$$X_i(x, p) = X_i^\circ(x) \quad {\scriptstyle (i=1, \ldots, n)} \tag{1.15}$$

(где $X_i^\circ(x)$ — вид правых частей системы (1.1), допускаемый выбором собственных параметров) и делать суждения о разрешимости этой задачи.

2. Рассмотрим в качестве системы (1.1) динамические уравнения Эйлера

$$x_1^{\bullet}=A_0x_2x_3+A^{-1}M_1, \qquad x_2^{\bullet}=B_0x_3x_1+B^{-1}M_2$$
$$x_3^{\bullet}=C_0x_1x_2+C^{-1}M_3 \tag{2.1}$$

где x_1, x_2, x_3 — проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ твердого тела соответственно на оси x, y, z, направленные по главным осям эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки O тела, A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно, $A_0=(B-C)/A$, $B_0=(C-A)/B$, $C_0=(A-B)/C$, $M_i(x_1, \ldots, x_6)$ $(i=1, 2, 3)$ — проекции главного момента $\mathbf{M}_0$ сил, действующих на твердое тело, на указанные оси, а также систему замыкающих уравнений

$$x_\nu^{\bullet}=f_\nu(x_1, \ldots, x_6) \quad {\scriptstyle (\nu=4,\ 5,\ 6)} \tag{2.2}$$

Здесь переменные x_4, x_5, x_6 некоторым образом определяют положение твердого тела в поле сил. Например, это могут быть углы Эйлера, определяющие положение системы координат $Oxyz$, связанной с телом, относительно неподвижной в пространстве системы $O\xi\eta\zeta$, и тогда уравнения (2.2) представляют собой кинематические уравнения Эйлера

$$\varphi^{\bullet}=x_3-\operatorname{ctg}\theta\,(x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi)$$
$$\psi^{\bullet}=(x_1\sin\varphi+x_2\cos\varphi)/\sin\theta \tag{2.3}$$
$$\theta^{\bullet}=x_1\cos\varphi-x_2\sin\varphi$$

или же это могут быть направляющие косинусы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ некоторой оси, например оси $O\zeta$, неподвижной в пространстве, в системе координат $Oxyz$, и тогда уравнения (2.2) являются уравнениями Пуассона

$$\gamma_1^{\cdot}=x_3\gamma_2-x_2\gamma_3, \quad \gamma_2^{\cdot}=x_1\gamma_3-x_3\gamma_1$$
$$\gamma_3^{\cdot}=x_2\gamma_1-x_1\gamma_2, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \tag{2.4}$$

Пусть программа движения [3, 6] твердого тела задана следующими равенствами вида (1.13):

$$\omega_i(x_1, \ldots, x_6)=a_i \quad (i=1, 2, 3) \tag{2.5}$$

Введем обозначение $\delta_{ij}=\partial\omega_i/\partial x_j$ $(i=1, 2, 3;\ j=1, \ldots, 6)$. Тогда в предположении, что $\Delta=\det\|\delta_{ij}\|_{j=1,2,3}^{i=1,2,3}\neq 0$ будем иметь уравнения движения твердого тела с заданными свойствами (2.5) в виде (1.8)

$$x_j^{\cdot}=\Delta^{-1}\left(\sum_{h=1}^{3}\Delta_{jh}\Phi_h-\sum_{\nu=4}^{6}\Delta^{j\nu}f_\nu\right) \quad (j=1,2,3) \tag{2.6}$$

а условия (1.9) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} A_0x_2x_3+A^{-1}M_1&=-\Delta^{-1}(\Delta^{14}f_4+\Delta^{15}f_5+\Delta^{16}f_6)\\ B_0x_3x_1+B^{-1}M_2&=-\Delta^{-1}(\Delta^{24}f_4+\Delta^{25}f_5+\Delta^{26}f_6)\\ C_0x_1x_2+C^{-1}M_3&=-\Delta^{-1}(\Delta^{34}f_4+\Delta^{35}f_5+\Delta^{36}f_6)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Эти равенства можно использовать как уравнения, определяющие моменты M_1, M_2, M_3; в этом случае равенства (2.5) будут первыми интегралами уравнений (2.1) и (2.2). Если же в равенствах (2.5) полагать a_i фиксированными числами, то (2.5) определят некоторое многообразие Ω, тогда в целях большей общности надо учитывать функции Φ_k, обращающиеся в нуль на Ω, и приравнивать правые части систем (2.1) и (2.6). В этом случае равенства (2.7) должны выполняться на многообразии Ω.

В силу того что $\Delta\neq 0$, из равенств (2.5) можно получить выражения для x_1, x_2, x_3 в виде функций от x_4, x_5, x_6. Тогда из (2.7) определятся $M_i(x_4, x_5, x_6)$ $(i=1, 2, 3)$ и твердое тело будет совершать движение со свойствами (2.5) в поле сил с главным моментом, зависящим лишь от x_4, x_5, x_6. В случае, когда a_i — фиксированные числа, для этого нужно, чтобы начальные значения переменных удовлетворяли условиям (2.5).

Предположим теперь, что поле сил потенциальное. Тогда в (2.5) можно положить

$$\omega_1\equiv{}^1/_2(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2)-U(x_4, x_5, x_6)=h \tag{2.8}$$

где U — силовая функция, h — постоянная энергии.

В этом случае, предполагая, что $\Delta=Ax_1\Delta_{11}+Bx_2\Delta_{12}+Cx_3\Delta_{13}\neq 0$, получим, раскрывая выражения $\Delta^{j\nu}$, условия (2.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_0x_2x_3+A^{-1}M_1&=\Delta^{-1}[\Delta_{11}U_f^{\cdot}+N_2(Bx_2\delta_{33}-Cx_3\delta_{32})+N_3(Cx_3\delta_{22}-Bx_2\delta_{23})]\\ B_0x_3x_1+B^{-1}M_2&=\Delta^{-1}[\Delta_{12}U_f^{\cdot}+N_2(Cx_3\delta_{31}-Ax_1\delta_{33})+N_3(Ax_1\delta_{23}-Cx_3\delta_{21})]\\ C_0x_1x_2+C^{-1}M_3&=\Delta^{-1}[\Delta_{13}U_f^{\cdot}+N_2(Ax_1\delta_{32}-Bx_2\delta_{31})+N_3(Bx_2\delta_{21}-Ax_1\delta_{22})]\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$U_f^{\cdot}=\frac{\partial U}{\partial x_4}f_4+\frac{\partial U}{\partial x_5}f_5+\frac{\partial U}{\partial x_6}f_6$$

$$N_2=\delta_{24}f_4+\delta_{25}f_5+\delta_{26}f_6, \quad N_3=\delta_{34}f_4+\delta_{35}f_5+\delta_{36}f_6$$

Для системы равенств (2.9) справедливы все замечания, сделанные в отношении равенств (2.7). Существенной особенностью рассматриваемого случая является то, что моменты M_i связаны с силовой функцией следующими соотношениями [7]:

если $x_4=\varphi$, $x_5=\psi$, $x_6=\theta$

$$M_1=-\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}+\cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

$$M_2=-\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\psi}-\sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},\quad M_3=\frac{\partial U}{\partial\varphi}\tag{2.10}$$

или, если $x_4=\gamma_1$, $x_5=\gamma_2$, $x_6=\gamma_3$

$$M_1=\gamma_3\frac{\partial U}{\partial\gamma_2}-\gamma_2\frac{\partial U}{\partial\gamma_3},\quad M_2=\gamma_1\frac{\partial U}{\partial\gamma_3}-\gamma_3\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}$$

$$M_3=\gamma_2\frac{\partial U}{\partial\gamma_1}-\gamma_1\frac{\partial U}{\partial\gamma_2}\tag{2.11}$$

Выражая переменные x_1, x_2, x_3 из (2.5) через переменные x_4, x_5, x_6, исключим их из равенств (2.9). Тогда эти равенства при подстановке в них выражений (2.10) или (2.11) будут представлять линейную систему уравнений в частных производных относительно функции $U(x_4, x_5, x_6)$. Если полученные коэффициенты удовлетворяют условиям [8] разрешимости таких систем уравнений, то найденная функция U определит силовое поле, в котором тело будет совершать движение по заданной программе (2.5). В случае, когда некоторые a_i — фиксированные числа, для этого нужно, чтобы начальные значения переменных удовлетворяли соответствующим соотношениям (2.5).

Заметим, что если функции ω_i зависят от некоторого числа собственных параметров p, то от этих параметров будут зависеть, вообще говоря, коэффициенты системы уравнений в частных производных (2.9), а следовательно, и построенная функция $U=U(x, p)$, и моменты $M_i(x, p)$. Может оказаться, что условия [8], не имеющие места вообще при произвольных p, все же выполняются для некоторых p^*. В этом случае получим

$$U(x, p^*)=U^*(x),\quad M_i(x, p^*)=M_i^*(x)\quad (i=1, 2, 3)\tag{2.12}$$

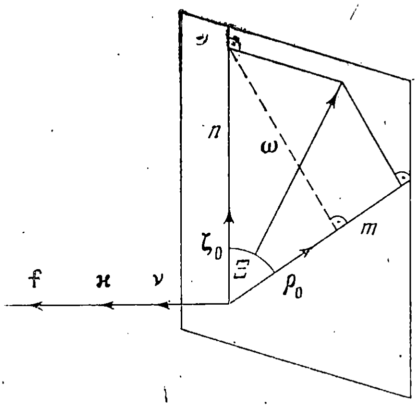
Сделаем также замечание о формулах (2.11). Вообще говоря, положение твердого тела в пространстве определяется направляющими косинусами всех трех осей ξ, η, ζ в системе координат $Oxyz$, и тогда силовая функция и моменты сил представляют собой функции всех этих переменных. Соответствующие формулы, устанавливающие зависимость между U и M_1, M_2, M_3, приведены в [7].

Зависимость этих функций лишь от γ_1, γ_2, γ_3 означает, что силовое поле обладает своего рода симметрией относительно оси $O\zeta$.

3. Найдем выражения для моментов M_i $(i=1, 2, 3)$ сил поля, обладающего осью симметрии, в котором твердое тело с одной закрепленной точкой может совершать регулярную прецессию относительно этой оси.

Как отмечено в [9], при таком виде движения постоянными величинами являются модуль угловой скорости ω твердого тела, а также проекции ω на неподвижную ось прецессии и на ось собственного вращения, фиксированную в теле.

Направим ось $O\zeta$ неподвижной системы координат вдоль оси симметрии поля, совпадающей с осью прецессии, и обозначим через α, β, γ направляющие косинусы оси собственного вращения в подвижной системе, введенной в п. 2. Тогда равенства (2.5), согласно указанным свойствам, будут иметь вид (m, n, ω_0=const)



$$\omega_1 \equiv \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = n$$
$$\omega_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \omega_0^2 \qquad (3.1)$$
$$\omega_3 \equiv \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = m$$

Если предположить, что $\Delta = \alpha f_4 + \beta f_5 + \gamma f_6 \neq 0$, где f_ν ($\nu=4, 5, 6$) — правые части уравнений (2.4), то вследствие $x_1 f_4 + x_2 f_5 + x_3 f_6 = 0$ будем иметь равенство нулю правых частей в выражениях (2.7). Отсюда следует, что x_i=const ($i=1, 2, 3$).

Рассмотрим теперь вырожденный случай $\Delta=0$. Обозначим через ζ_0 и ρ_0 единичные векторы, направленные по осям прецессии и собственного вращения соответственно. Легко видеть тогда, что

$$\Delta = (\zeta_0 \cdot \omega \cdot \rho_0) = ((\rho_0 \times \zeta_0) \cdot \omega) \qquad (3.2)$$

и равенство $\Delta=0$ означает, что векторы ζ_0, ρ_0 и ω находятся в одной плоскости, т. е. движение твердого тела представляет собой обобщенную прецессию угловой скорости [10].

Присоединим это соотношение к выражениям (3.1) и, введя в рассмотрение вектор $\varkappa(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$, такой, что $\varkappa = (\rho_0 \times \zeta_0)$, запишем их так:

$$\omega_1 \equiv (\zeta_0 \cdot \omega) = n, \quad \omega_2 \equiv |\omega|^2 = \omega_0^2, \quad \omega_3 \equiv (\rho_0 \cdot \omega) = m, \quad \omega_4 \equiv (\varkappa \cdot \omega) = 0 \qquad (3.3)$$

Легко видеть, что эти функции независимы. Предполагая, что

$$\Delta_0 = \frac{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, \gamma_1)} \neq 0$$

найдем с помощью формул (1.8) выражения для правых частей строящейся системы уравнений. Рассмотрим векторы $\mathbf{v}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ и $\mathbf{f}(f_4, f_5, f_6)$, такие, что $\mathbf{v} = (\omega \times \rho_0)$ и $\mathbf{f} = (\zeta_0 \times \omega)$. В силу $\omega_4 = 0$ векторы $\varkappa$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{v}$ коллинеарны. Полагая $D = (\varkappa \cdot \mathbf{v}) \neq 0$, получим $\Delta_0 = (\gamma x_2 - \beta x_3)\Delta - x_1 D$.

Отсюда, вычисляя определители Δ_0^{ij} и учитывая, что $\Psi_5 = f_5$, $\Psi_6 = f_6$, получим $\Psi_4 = f_4$, а также следующие выражения для Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3:

$$\Psi_i = -\frac{\nu_i}{D}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}) \quad (i=1,2,3) \qquad (3.4)$$

которые далее необходимо приравнять правым частям уравнений (2.1). Имея целью найти выражения для моментов M_i ($i=1, 2, 3$), зависящих лишь от γ_1, γ_2, γ_3, исключим x_1, x_2, x_3 в получившихся равенствах с помощью соотношений (3.3). Используя известную формулу для двойного векторного произведения, получим

$$\omega \times \varkappa = \omega \times (\rho_0 \times \zeta_0) = \rho_0(\zeta_0 \cdot \omega) - \zeta_0(\rho_0 \cdot \omega) = n\rho_0 - m\zeta_0$$
$$(\omega \times \varkappa) \times \varkappa = \varkappa(\omega \cdot \varkappa) - \omega(\varkappa \cdot \varkappa) = -\omega|\varkappa|^2$$

Отсюда

$$\omega = \delta^{-1}[m(\zeta_0 \times \varkappa) - n(\rho_0 \times \varkappa)], \quad \delta = |\varkappa|^2 \qquad (3.5)$$

Подставим теперь это выражение в формулы, определяющие векторы **f** и **ν**. Вследствие равенств (см. фигуру) будем иметь следующие выражения для **f** и **ν**:

$$\zeta_0\times(\zeta_0\times\varkappa)=\zeta_0(\zeta_0\cdot\varkappa)-\varkappa(\zeta_0\cdot\zeta_0)=-\varkappa$$
$$(\rho_0\times\varkappa)\times\rho_0=\varkappa(\rho_0\cdot\rho_0)-\rho_0(\rho_0\cdot\varkappa)=\varkappa$$
$$(\zeta_0\times\varkappa)\times\rho_0=-\zeta_0\times(\rho_0\times\varkappa)=s\varkappa,\quad s=\cos\Xi=\mathrm{const}$$
$$\mathbf{f}=\delta^{-1}(ns-m)\varkappa,\quad \mathbf{\nu}=\delta^{-1}(ms-n)\varkappa \tag{3.6}$$

Отсюда

$$\Psi_i=(m-ns)(ms-n)\delta^{-2}\varkappa_i\quad (i=1,\,2,\,3) \tag{3.7}$$

Таким образом, если проекции главного момента сил поля на координатные оси имеют вид

$$M_1=(C-B)x_2x_3+A\Psi_1,\quad M_2=(A-C)x_3x_1+B\Psi_2$$
$$M_3=(B-A)x_1x_2+C\Psi_3 \tag{3.8}$$

где x_1, x_2, x_3 исключены по формуле (3.5), то твердое тело в таком поле будет совершать регулярную прецессию, если начальные значения x_i и γ_i ($i=1$, 2, 3) удовлетворяют равенствам (3.3).

Рассмотрим особо случай, когда ось собственного вращения является главной осью эллипсоида инерции. Пусть, например, это ось Oz, тогда $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$. Отсюда $x_3=m$, $\gamma_3=s$, а также постоянными величинами являются $x_1^2+x_2^2=\omega_0^2-m^2$ и $\delta=\gamma_1^2+\gamma_2^2$. Вектор $\varkappa$ в этом случае имеет координаты $\varkappa_1=-\gamma_2$, $\varkappa_2=\gamma_1$, $\varkappa_3=0$, следовательно,

$$x_1=\sigma\gamma_1,\quad x_2=\sigma\gamma_2,\quad \sigma=\delta^{-1}(n-ms) \tag{3.9}$$

Тогда имеем

$$\Psi_1=E\sigma\gamma_2,\quad \Psi_2=-E\sigma\gamma_1,\quad \Psi_3=0,\quad E=m-\sigma s \tag{3.10}$$

Отсюда получаем следующие выражения для моментов M_i:

$$M_1=[(C-B)m+AE]\sigma\gamma_2,\quad M_2=[(A-C)m-AE]\sigma\gamma_1$$
$$M_3=(B-A)\sigma^2\gamma_1\gamma_2 \tag{3.11}$$

Предположим теперь, что поле потенциальное. Вследствие равенств (2.11) будем иметь тождество

$$M_1\gamma_1+M_2\gamma_2+M_3\gamma_3=0 \tag{3.12}$$

подставляя в которое выражение (3.11), получим

$$(A-B)E=0 \tag{3.13}$$

Так как $E=\delta^{-1}(m-ns)\neq0$ (см. фигуру), то $A=B$, следовательно, регулярная прецессия в этом случае возможна только для динамически симметричных тел.

Проведем классификацию известных регулярных прецессий тяжелого твердого тела согласно определению, введенному в п. 1. Уравнения (2.1) имеют вид

$$x_1^{\bullet}=A_0x_2x_3+\mu A^{-1}(z_c\gamma_2-y_c\gamma_3)$$
$$x_2^{\bullet}=B_0x_3x_1+\mu B^{-1}(x_c\gamma_3-z_c\gamma_1) \tag{3.14}$$
$$x_3^{\bullet}=C_0x_1x_2+\mu C^{-1}(y_c\gamma_1-x_c\gamma_2),\quad \mu=Mg$$

где M — масса тела, x_c, y_c, z_c — координаты центра масс.

Поле сил тяжести является осесимметричным, однако регулярные прецессии могут совершаться не только относительно вертикали. Поэтому зададим равенства (3.1) с учетом (2.8) в следующем виде:

$$\omega_1 = {}^1/_2(Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2)+\mu(x_c\gamma_1+y_c\gamma_2+z_c\gamma_3)=h$$
$$\omega_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2=\omega_0^2, \quad \omega_3=\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3=m \tag{3.15}$$

Тогда

$$\Delta=\alpha(B-C)x_2x_3+\beta(C-A)x_3x_1+\gamma(A-B)x_1x_2$$

Различные случаи будут получаться при различных значениях собственных параметров A, B, C, x_c, y_c, z_c.

1. Случай Эйлера: $x_c=y_c=z_c=0$, $A=B$, $\alpha=\beta=0$; $\gamma=1$, $M_i=0$ $(i=1, 2, 3)$. Этот случай является вырожденным, так как $\Delta\equiv 0$. Действительно, из третьего уравнения (3.14) имеем $x_3=\mathrm{const}$, и тогда ω_1 и ω_2 оказываются зависимыми: $\omega_1={}^1/_2A\omega_2+{}^1/_2(C-A)m^2$.

Выражение $\omega_1=h$ является первым интегралом системы (3.15), поэтому свойства (3.16) будут иметь место при любых начальных значениях переменных, связанных единственным соотношением $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$. Таким образом, регулярная прецессия в случае Эйлера представляет собой пятипараметрическое семейство.

2. Случай Лагранжа: $x_c=y_c=0$, $A=B$, $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$, $M_1=\mu z_c\gamma_2$, $M_2=-\mu z_c\gamma_1$, $M_3=0$. Имеем $\Delta\equiv 0$, и в этом смысле рассматриваемый случай также является вырожденным. Из третьего уравнения (3.14) получаем $x_3=\mathrm{const}$, следовательно, свойство $\omega_3=m$ имеет место. Так как $\omega_1=h$ является первым интегралом системы уравнений (3.14) и (2.4), то осталось рассмотреть свойство $\omega_2=\omega_0^2$. Дифференцируя это выражение в силу системы, нетрудно показать, что оно является двуслойным инвариантным соотношением: независимыми членами последовательности будут функции

$$\omega_2^{(0)}=x_1^2+x_2^2+x_3^2-\omega_0^2, \quad \omega_2^{(1)}=x_1\gamma_2-x_2\gamma_1, \quad \omega_2^{(2)}=x_1\gamma_1+x_2\gamma_2+c$$

где $c=c(h, \omega_0^2, m)$. Следовательно, на всех решениях системы со свойствами (3.15) выполняются равенства $\omega_2^{(j)}=0$ $(j=0, 1, 2)$ и переменные оказываются связанными двумя соотношениями: $x_1\gamma_2-x_2\gamma_1=0$ и $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$. Таким образом, регулярная прецессия в случае Лагранжа представляет собой четырехпараметрическое семейство.

3. Случай Гриоли: $y_c=0$, $(A-B)z_c^2+(C-B)x_c^2=0$, $\alpha=x_c/l$, $\gamma=z_c/l$, где $l=(x_c^2+z_c^2)^{1/2}$, $M_1=\mu z_c\gamma_2$, $M_2=\mu(x_c\gamma_3-z_c\gamma_1)$, $M_3=-\mu x_c\gamma_2$.

Используя соотношение

$$x_cx_1+z_cx_3=lm \tag{3.16}$$

получим

$$\Delta=mx_cz_c\lambda x_2, \quad \lambda=\frac{A-B}{x_c^2}=\frac{B-C}{z_c^2}=\frac{A-C}{l^2}$$

Предположение $x_2=0$ приводит к перманентному вращению, поэтому будем полагать $\Delta\neq 0$. Тогда равенства (2.9) будут иметь вид

$$\begin{gathered}
z_c^2\lambda x_2x_3+\mu z_c\gamma_2=\frac{A}{mx_c\lambda}\dot{U_f} \\
-l^2\lambda x_3x_1+\mu(x_c\gamma_3-z_c\gamma_1)=\frac{B(x_cx_3-z_cx_1)}{mx_cz_c\lambda x_2}\dot{U_f} \\
x_c^2\lambda x_1x_2-\mu x_c\gamma_2=-\frac{C}{mz_c\lambda}\dot{U_f} \\
\dot{U_f}=\mu[x_c(x_3\gamma_2-x_2\gamma_3)+z_c(x_2\gamma_1-x_1\gamma_2)]
\end{gathered} \tag{3.17}$$

Исключая x_1, x_2, x_3 из соотношений (3.15) и γ_2 из тривиального интеграла, нетрудно показать, что ни одно из равенств (3.17) не выполняется тождественно.

Складывая первое и третье равенство (3.17), вследствие соотношения (3.16) получим

$$U_f^{\bullet}=m^2x_cz_c\lambda l^{-1}x_2 \tag{3.18}$$

Подставляя это выражение в (3.17), будем иметь второе равенство в виде

$$-l^2\lambda x_3x_1+\mu(x_c\gamma_3-z_c\gamma_1)=mBl^{-1}(x_cx_3-z_cx_1) \tag{3.19}$$

а первое и третье умножим соответственно на Cx_c и Az_c и, складывая, получим

$$(Ax_cx_1+Cz_cx_3)x_2=\mu l^2\gamma_2 \tag{3.20}$$

Тогда сами эти равенства превращаются в следствия равенств (3.16) и (3.20) при $x_2\neq 0$. Таким образом система равенств (3.15) и (3.17) эквивалентна системе (3.15), (3.18), (3.20). Последняя представляет собой систему пяти независимых соотношений, указанных в [11], где показано также, что тривиальный интеграл оказывается зависимым от них при следующих значениях постоянных:

$$m=[\mu^2l^2/(A-B+C)^2-(A-B)(B-C)]^{1/4}$$

$$\omega_0=m\sqrt{2},\quad h={}^1/_2(A+C)m^2$$

и что существует решение системы уравнений Эйлера — Пуассона со свойствами, выраженными этими соотношениями. Это решение оказывается регулярной прецессией, которая, таким образом, представляет собой в случае Гриоли однопараметрическое семейство.

Поступила 12 VII 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галиуллин А. С.* Построение уравнений движения. Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, № 2.
2. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
3. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г., Фурасов В. Д.* Построение систем программного движения. М., «Наука», 1971.
4. *Шварц Л.* Анализ, т. 1, М., «Мир», 1972.
5. *Харламов П. В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений. В сб.: Механика твердого тела, вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1974.
6. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики и задачи управления движениями материальных систем. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 9.
7. *Горячев Д. Н.* Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910.
8. *Гюнтер Н. М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. М.– Л., Гостехиздат, 1934.
9. *Гуляев М. П.* О динамически возможных регулярных прецессиях твердого тела, имеющего одну закрепленную точку. Тр. сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, т. 1.
10. *Добронравов В. В.* Основы механики неголономных систем. М., «Высшая школа», 1970.
11. *Гуляев М. П.* О регулярной прецессии несимметричного гироскопа (случай Гриоли). Теоретическая механика, Сб. научно-метод. ст., вып. 5. М., «Высшая школа», 1975.