

## ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ В ШИРОКОМ ТЕМПЕРАТУРНО-ВРЕМЕННОМ ДИАПАЗОНЕ

В. С. ЕКЕЛЬЧИК

(Ленинград)

Рассматривается задача выбора ядра определяющих соотношений линейной вязкоупругости по заданным обобщенным кривым ползучести или релаксации. Используются некоторые опубликованные экспериментальные данные, относящиеся к полимерам и полученные с помощью температурно-временной аналогии. Показано, что применение дробно-экспоненциальной функции Работнова во многих случаях дает достаточную точность описания в широком временном диапазоне. Для определения необходимых констант применялся графоаналитический метод. Параметр дробности  $\alpha$  для  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций ряда полимеров при сдвиге и объемном сжатии заметно отличается; для различных полимеров величины  $\alpha$  изменяются в широком интервале:  $-0.8 \leq \alpha \leq -0.15$ .

Для построения обратных функций или других вязкоупругих функций, связанных с функциями ползучести (релаксации) при сдвиге и объемном сжатии, применены теоремы обращения или метод квадратур наивысшей степени точности численного обращения преобразования Лапласа. Приведено сопоставление с численными результатами, полученными другими авторами с помощью различных методов, свидетельствующее об эффективности аппарата  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций в теории вязкоупругости.

1. При аналитическом описании реологии полимеров и армированных пластиков на основе уравнений линейной вязкоупругости в форме Больцмана — Вольтерра [1, 2]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_{ijkl}} \left[ \sigma_{ij}(t) + \lambda_{ijkl} \int_0^t K_{ijkl}(t-\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau \right] \quad (1.1)$$

существенное значение имеет выбор ядра  $K_{ijkl}(t-\tau)$ . Наряду с целыми экспонентами [3-5] применяются слабосингулярные функции, среди которых наибольшее распространение получила дробно-экспоненциальная функция Работнова  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, \tau)$ , представляющая собой резольвенту ядра Абеля [6]. Эффективность аппарата  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций в значительной степени связана с существованием алгебры резольвентных операторов [6, 7], позволяющей легко выписать точные решения многих задач вязкоупругости. Область практического использования дробно-экспоненциальных функций особенно возросла после того, как были составлены таблицы [8] и разработана методика подбора констант  $\alpha, \beta, \lambda$  при помощи ЭЦВМ непосредственно по экспериментальным данным [9].

Обычно  $\mathcal{E}_\alpha$ -функции применяют для аппроксимации кривых ползучести (релаксации), полученных при испытании отдельных образцов на ограниченной временной базе в условиях нормальной и реже повышенной температуры в стеклообразном состоянии полимера [10-13]. При использовании гипотезы температурно-временного соответствия [14] удается получить вязкоупругие функции материала, например функции ползучести или релаксации, в широком временном интервале, охватывающем области от стеклообразного до высокоэластического состояний. Полу-

чаемые таким образом обобщенные вязкоупругие функции отличаются от обычных индивидуальных кривых значительной протяженностью, составляющей 8–12 порядков в логарифмической шкале времени, а также резким различием условно-мгновенного и равновесного высокоэластического модулей  $E_0/E_\infty = 10^2 - 10^3$  [17].

Вопрос о применимости дробно-экспоненциальных функций для описания обобщенных кривых изучен еще недостаточно. В [18] было показано, что обобщенную кривую податливости эпоксидной смолы ЭД-6 не удастся описать при помощи одной  $\mathcal{E}_\alpha$ -функции. Удовлетворительное соответствие экспериментальным данным во всем заданном временном диапазоне было достигнуто при введении суммы трех дробно-экспоненциальных функций одинакового порядка дробности. Эта же аппроксимация была использована далее для анализа температурной зависимости действительной и мнимой составляющих комплексного модуля сдвига. Расчетные и экспериментальные значения оказались достаточно близки [19].

В данной работе приведены примеры применения дробно-экспоненциальных функций для описания обобщенных кривых ползучести или релаксации других полимеров и показано, что во многих случаях удается получить удовлетворительные результаты при помощи одной дробно-экспоненциальной функции. При выборе констант аппроксимации использовался известный графоаналитический метод, описанный, например, в [18]. Следует отметить, что применение этого метода к обобщенным кривым, имеющим характер  $S$ -образной кривой в полулогарифмических координатах  $[\varepsilon(t) - \varepsilon_0]/\varepsilon_0 \sim \lg t$ , с отчетливо выраженной асимптотой при  $t \rightarrow \infty$ , оказывается весьма простым и приводит к последовательному вычислению констант ядра. В этом случае не возникает определенной неоднозначности описания, свойственной методу нахождения параметров ядра при помощи ЭЦВМ для кривых ползучести, заданных на небольшом временном интервале [9].

На фиг. 1 показана функция релаксации  $E(t)$  в мегапаскалях, характерная для полимеров, применяемых в твердых топливах [20] (время в минутах). Аналитическое выражение этой кривой, полученное в [20] методом коллокации, имеет вид

$$E(t) = 0.0703(600 - 1945.298e^{-500t} + 16334.19e^{-50t} + 21670.066e^{-5t} + 16951.871e^{-0.5t} + 6425.041e^{-0.05t}) \quad (1.2)$$

Представим функцию  $E(t)$  в следующем виде:

$$E(t) = E_0 \left[ 1 - \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, \tau) d\tau \right] \quad (1.3)$$

и будем искать параметры  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ , удовлетворяющие соотношению

$$f(t) = 1 - \frac{E(t)}{E_0} = \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, \tau) d\tau \quad (1.4)$$

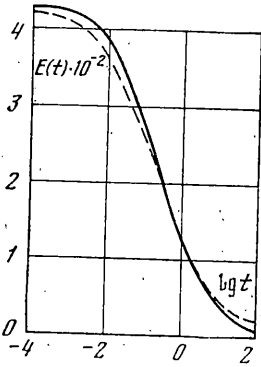
где функция  $f(t)$  известна.

Параметры  $\alpha$ ,  $\lambda$  и  $\beta$  находятся при помощи графоаналитического метода, после чего с использованием таблиц [8] легко вычисляется функция (1.3). Результат расчета показан на фиг. 1 пунктиром, расхождение между кривыми в области  $\lg t$   $[-4, 1]$  не превосходит 8%. Следует отметить, что обращение оператора релаксации, представленного интегралом от  $\mathcal{E}_\alpha$ -функции, совершенно элементарно и выполняется точно. Функция податливости имеет вид

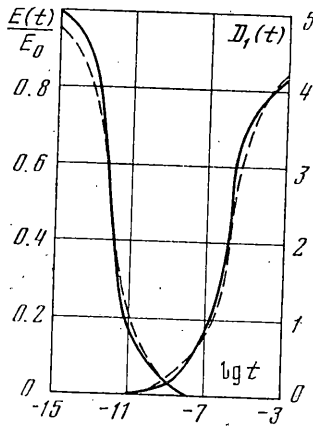
$$D(t) = \frac{1}{E_0} \left[ 1 + \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta + \lambda, \tau) d\tau \right] \quad (1.5)$$

Получение функции податливости для оператора, заданного суммой целых экспонент, требует значительно более громоздких вычислений.

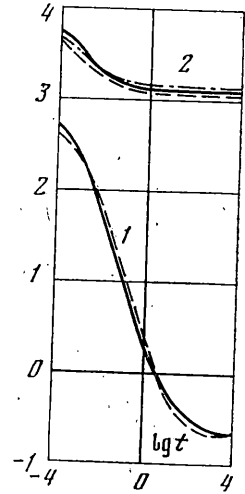
На фиг. 2 приведена экспериментальная кривая релаксации аморфного полимера — полиизобутилена NBS [21], использованная в [22] для построе-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ния функции податливости  $D(t)$  при помощи метода конечных разностей. Пунктиром показана аппроксимация измеренной функции  $E(t)$  в форме (1.3) ( $\alpha = -0.4$ ,  $\beta_E = 1.095 \cdot 10^7$ ,  $\lambda_E/\beta_E = 0.99976$ ), время в часах. В правой части фигуры пунктиром изображена функция  $D_1(t) = [E_0 D(t) - 1] \cdot 10^{-3}$ , а сплошной линией — соответствующее решение из [22]. Как видно, результаты, полученные различными методами, оказались достаточно близки.

На фиг. 3 для того же материала построены исходные кривые релаксации в мегапаскалях при сдвиге (кривая 1 соответствует  $\lg G(t)$ ) и объемном сжатии (кривая 2 соответствует  $\lg [{}^1/{}_3 \kappa(t)]$ ), найденные по результатам динамических экспериментов [23] (время в секундах). Эти кривые использовались в [24] в качестве исходных данных для расчета вязкоупругого цилиндра, подкрепленного упругой оболочкой, при нагружении внутренним давлением. Пунктиром на фиг. 3 показаны соответствующие аппроксимации, полученные при помощи  $\mathcal{E}_\alpha$ -функции при одинаковом для сдвига и объемного сжатия параметре дробности  $\alpha_\sigma = \alpha_\kappa$ . Напряженное состояние цилиндра описывается функцией  $R(t)$  соответствующей воздействию оператора  $R^\circ$ :

$$R^\circ = 2G^\circ / (\kappa^\circ + 4G^\circ) (s_{ij} = 2G^\circ \varepsilon_{ij}; \quad \sigma_{ii} = \kappa^\circ \varepsilon_{ii}; \quad \kappa^\circ = 1/K^\circ) \quad (1.6)$$

на единицу. В выражении (1.6) введено символическое обозначение интегрального оператора

$$E^\circ f(t) = E^\circ \left[ f(t) - \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) f(\tau) d\tau \right] \quad (1.7)$$

В [24] функция  $R(t)$  была найдена методом конечных разностей, вычисления проводились на ЭЦВМ. Используя аппроксимацию исходных кривых в форме (1.3) и применяя теорему умножения [1], легко получить функцию  $R(t)$ :

$$R(t) = R_0 \left[ 1 - r_1 \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\gamma_1, \tau) d\tau - r_2 \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\gamma_2, \tau) d\tau \right] \quad (1.8)$$

в виде монотонно убывающей функции времени. Числовые значения аргументов  $\gamma_i$  и коэффициентов  $r_i$  ( $i=1, 2$ ) определяются из решения квадратного уравнения и системы двух алгебраических уравнений, вид которых определяется теоремой умножения.

Результаты вычислений показаны на фиг. 4 темными точками. Сплошные линии представляют собой решение [24]. Кривая 2 соответствует предположению об упругой сжимаемости материала цилиндра  $\kappa(t) = \text{const} = \kappa(0)$ , кривая 3 найдена при допущении  $\kappa(t) = \text{const} = \kappa(\infty)$ , кривая 1 относится к общему случаю, когда учитываются неупругие свойства при сдвиге и объемном сжатии. Как следует из фиг. 4, учет ползучести при всестороннем сжатии существенно сказывается на величине функций  $R(t)$ . Поэтому желательно точнее описать релаксацию при объемном сжатии.

Пунктирная кривая для функции  $\kappa(t)$ , показанная на фиг. 3, соответствует параметру дробности  $\alpha_\kappa = \alpha_G = -0.4$ . При этом максимальная погрешность аппроксимации не превосходит 7%. Лучшие результаты могут быть получены при других значениях констант, соответствующих параметру  $\alpha_\kappa = -0.3$ . Эта аппроксимация показана на фиг. 3 штрихпунктиром. Поскольку в этом случае показатели дробности  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций в знаменателе оператора  $R^\circ$  оказываются различными, алгебра резольвентных операторов не может быть использована. Однако подобные аппроксимации могут быть полезны в связи с другим методом построения вязкоупругих функций и решения краевых задач вязкоупругости, основанным на интегральном преобразовании Лапласа.

Одно из преимуществ дробно-экспоненциальной функции по сравнению с другими функциями, применяемыми для описания реологии полимеров, например интегралом ошибок  $\text{erf } z$  [21, 25] или суммой большого числа целых экспонент [5, 20], состоит в том, что ее изображение по Лапласу имеет простой вид и содержит небольшое число констант. Применяя прямое преобразование Лапласа к зависимости (1.7), получим

$$E^\sim(p) f^\sim(p) = E_0 \left[ 1 - \frac{\lambda}{p^{\alpha+1} + \beta} \right] f^\sim(p) \quad (1.9)$$

Выполненные ранее исследования численного обращения преобразования Лапласа в квазистатических задачах вязкоупругости [26] показали, что высокая точность может быть достигнута при использовании квадратурных формул с комплексными узлами, применяемыми в методе наивысшей степени точности [27, 28].

Другой способ обращения — интерполяционный метод, основанный на применении ортогональных многочленов Чебышева с узлами на действительной оси параметра преобразования [27], приводит к худшим результатам; соответствующие величины показаны крестиками на фиг. 4. Светлыми точками на фиг. 4 изображены результаты расчетов по методу наивысшей степени точности. Отметим, что для случая  $\alpha_G = \alpha_\kappa = -0.4$  решение, найденное при помощи преобразования Лапласа, отличается от точного в диапазоне  $\lg t$  [-7, -2] не более чем на 1.6%. Как видно из фиг. 4, кривые 2 и 3, полученные по методу конечных разностей, почти не отличаются от кривых, построенных с применением  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций.

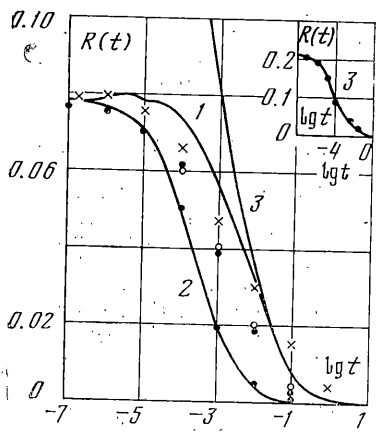
Для кривой 1 расхождение достигает 25%, причем имеется качественное различие: функция  $R(t)$ , найденная по методу конечных разностей, немонотонна. Оценить, какое из решений является более точным, довольно трудно, поскольку исходные кривые  $\kappa(t)$  и  $G(t)$ , аппроксимированные  $\mathcal{E}_\alpha$ -функциями в форме (1.3), были заданы своими графиками на фиг. 3, а точность их построения неизвестна. Если предположить, что релаксацию при объемном сжатии можно описать интегралом от  $\mathcal{E}_\alpha$ -функции<sup>1</sup> в форме (1.3), то функция  $R(t)$  имеет вид (1.8) и должна быть монотонно убывающей функцией.

Близкие величины параметров дробности для  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций, аппроксимирующих обобщенные кривые податливости при сдвиге и объемном сжатии, были получены также для эпоксидной смолы холодного отверждения C-100-0-8 ( $\alpha_G = -0.5$ ,  $\alpha_\kappa = -0.45$ ). Вязкоупругие свойства этого полимера подробно изучены в [29, 30] в связи с его применением для моделей в оптическом методе исследования напряжений.

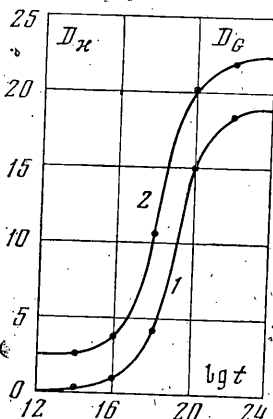
На фиг. 5 сплошными линиями показаны исходные функции  $D_G = (G^\circ)^{-1}(t) \cdot 10^3$  МПа<sup>-1</sup> (кривая 1) и  $D_\kappa = 3(\kappa^\circ)^{-1}(t) \cdot 10^4$  МПа<sup>-1</sup> (кривая 2) (время в минутах); темными точками отмечена найденная аппроксимация. Как видно из этой фигуры, область резкого изменения вязкоупругих функций  $(G^\circ)^{-1}(t)$  и  $(\kappa^\circ)^{-1}(t)$  вполне удовлетворительно описывается с помощью представления типа (1.3).

2. Рассмотрим вязкоупругие свойства полиуретана «Hysol 8705», описанные в [31, 32]. На фиг. 6 построены исходные кривые релаксации: при сдвиге  $T_1 = G(t) \cdot 10^{-2}$  МПа (кривая 1) и при объемном сжатии  $T_2 = \frac{1}{3}\kappa(t) \cdot 10^{-3}$  МПа (кривая 2) (время в минутах). Аналитическое представление этих кривых в форме (1.3) дает значения, показанные на фиг.

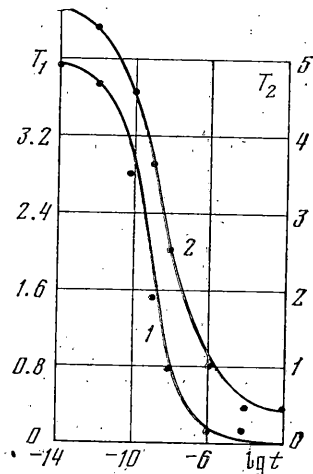
<sup>1</sup> Возможность такого представления для функции релаксации при сдвиге следует из хорошего соответствия результатов расчета для кривых 2 и 3 на фиг. 4.



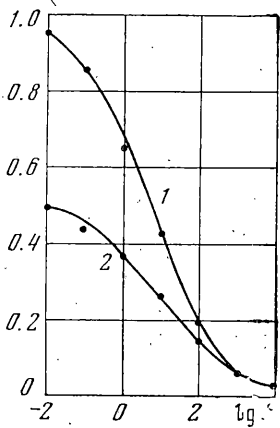
Фиг. 4



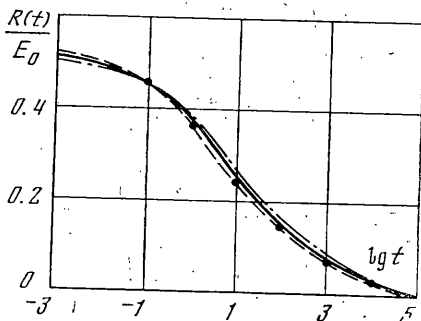
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

точками. Отметим, что величины параметра дробности при сдвиге и объемном сжатии несколько различаются:  $\alpha_G = -0.5$ ,  $\alpha_K = -0.65$ .

Располагая данными по объемному сжатию и сдвигу, функцию релаксации при растяжении  $E(t)$  и коэффициент Пуассона  $\nu(t)$  можно найти расчетным путем. Будем исходить из операторных соотношений

$$E^\circ = 3G^\circ / (1 + G^\circ K^\circ), \quad \nu^\circ = (1 - 2G^\circ K^\circ) / 2(1 + G^\circ K^\circ) \tag{2.1}$$

и воспользуемся преобразованием Лапласа. Задача сводится к восстановлению функций  $E(t)$  и  $\nu(t)$  по известному изображению  $E^\sim(p)$  и  $\nu^\sim(p)$ .

Для этой цели целесообразно применить интерполяционную формулу метода наивысшей степени точности [27, 28]:

$$E(t) \approx \sum_{k=0}^n A_k(1) W_1^\sim\left(\frac{p_k}{t}\right), \quad \nu(t) \approx \sum_{k=0}^n A_k(1) W_2^\sim\left(\frac{p_k}{t}\right) \tag{2.2}$$

где функции  $W_1^\sim(p)$  и  $W_2^\sim(p)$  известны:

$$W_1^\sim(p) = pE^\sim(p) = \frac{3pG^\sim(p)}{1 + G^\sim(p)K^\sim(p)},$$

$$W_2^{\sim}(p) = p v^{\sim}(p) = \frac{p[1 - 2G^{\sim}(p)K^{\sim}(p)]}{2[1 + G^{\sim}(p)K^{\sim}(p)]} \quad (2.3)$$

Найденные таким образом расчетные значения  $E(t)$  и  $v(t)$  оказались достаточно близки к экспериментальным данным [31, 32].

На фиг. 7 приведены экспериментальные данные по функции релаксации  $E(t)$  для полиметилметакрилата [25] (кривая 1, время в часах). При решении задачи неоднородного нагрева плиты [33-37] эта функция использовалась в качестве исходной для вычисления функции  $R_1(t)$ , соответствующей оператору

$$R_1^{\circ} = {}^1_3 E^{\circ} / (1 - v^{\circ}) \quad (2.4)$$

Аппроксимация функции релаксации в форме (1.3) показана на фиг. 7 темными точками. Воспользуемся этой аппроксимацией для нахождения  $R_1(t)$ . Будем предполагать, что при объемном сжатии материал деформируется упруго. Тогда условие неизменности объема во времени в операторной форме

$$(1 - 2v^{\circ}) / E^{\circ} = (1 - 2v_0) / E_0 \quad (2.5)$$

позволит построить оператор  $v^{\circ}$ , а затем и оператор  $R_1^{\circ}$ .

В результате несложных преобразований получим выражение для функции  $R_1(t)$  в форме

$$R_1(t) = \frac{E_0}{3(1 - v_0)} \left[ 1 + (m - \lambda) \int_0^t \mathcal{D}_\alpha(m - \beta, \tau) d\tau \right], \quad m = \frac{1 - 2v_0}{2(1 - v_0)} \lambda \quad (2.6)$$

Результаты вычислений для  $R_1(t)/E_0$  отмечены на фиг. 7 темными точками. Этот пример воспроизведен в [37] (стр. 257), но в величине параметра  $\lambda$  исходной кривой имеется опечатка.

На фиг. 8 приведены также другие решения этой задачи, полученные различными численными методами: методом конечных разностей [35] — пунктир, преобразованием Лапласа с использованием асимптотических решений для больших и малых времен и линейной интерполяцией между ними [33] — штрихпунктир, методом наименьших квадратов [34] — сплошная линия. Как видно из фигуры, расхождение результатов, полученных различными методами, сравнительно невелико, но использование аппарата  $\mathcal{D}_\alpha$ -функций обладает преимуществом простоты, так как нахождение функции  $R_1(t)$  выполняется точно и не требует применения ЭЦВМ.

3. Рассмотренные примеры свидетельствуют о широких возможностях дробно-экспоненциальных функций для описания обобщенных кривых реологии полимеров. Однако нужно отметить, что встречаются случаи, когда представления типа (1.3) оказываются неудовлетворительными. Если аппроксимация обобщенных кривых при помощи одной  $\mathcal{D}_\alpha$ -функции не приводит к положительному результату, то следует либо переходить к другим ядрам интегральных соотношений, содержащим большее количество констант и более сложным, чем дробно-экспоненциальная функция [38], либо попытаться аппроксимировать обобщенную кривую при помощи суммы дробно-экспоненциальных функций в форме, аналогичной (1.2)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_0^t \mathcal{D}_\alpha(-\beta_i, \tau) d\tau \right] \quad (3.1)$$

Если при этом  $n \leq 3$ , то представление (3.1) с практической точки зрения может оказаться вполне приемлемым. Эта вторая возможность под-

робно анализировалась, как указывалось выше, в [18] при обработке экспериментальных данных по термоползучести эпоксидной смолы горячего отверждения ЭД-6. Если для обращения операторов и решения краевых задач механики полимеров применять численные методы [27, 28], то при аппроксимации экспериментальных данных можно отказаться от жесткого ограничения в постоянстве параметров дробности  $\alpha$  для  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций. В этом случае для смолы ЭД-6 вместо трех дробно-экспоненциальных функций с одинаковым параметром  $\alpha = -0.15$  можно получить две. «Старшая» составляющая остается той же, а две «младшие» составляющие с  $\alpha = -0.15$  заменяются одной с параметрами:  $\alpha = -0.35$ ,  $\lambda = 0.83 \cdot 10^{-6}$ ,  $\beta = 0.83 \cdot 10^{-2}$ . При этом различие между двумя способами аппроксимации не только для функции податливости, но также и для численно найденной обратной функции релаксации не превосходит 4%.

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что аппарат дробно-экспоненциальных функций применим для описания экспериментально полученных обобщенных кривых ползучести (релаксации) полимеров. Приведены примеры аппроксимации обобщенных кривых реологии полимеров при одноосном растяжении и сдвиге, а также при изменении объема.

Для некоторых краевых задач вязкоупругости и термовязкоупругости, решенных ранее численно на ЭЦВМ и использующих обобщенные вязкоупругие функции, получены простые аналитические решения на основе алгебры  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций. Эти решения находятся в хорошем соответствии с известными результатами и для их реализации не требуется применения ЭЦВМ. При аппроксимации обобщенных кривых найдено, что величина параметра дробности  $\alpha$  у различных полимеров заметно отличается; для одного и того же полимера параметры дробности  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций при сдвиге и при объемном сжатии не всегда можно принимать совпадающими.

В некоторых случаях обобщенные кривые реологии полимеров могут быть описаны суммой небольшого числа дробно-экспоненциальных функций, причем величина параметра дробности этих функций может быть различной. В подобной ситуации для пересчета вязкоупругих функций и для решения краевых задач целесообразно использовать преобразование Лапласа с численной реализацией обращения по квадратурным формулам метода наимышей степени точности [26-28].

Автор благодарит Ю. Н. Работнова за обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 25 XII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
2. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., «Наука», 1970.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.-Л., Гостехиздат, 1952.
4. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. М., «Мир», 1965.
5. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М., «Мир», 1974.
6. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
7. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Наука», 1977.
8. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М., «Наука», 1969.
9. Звонов Е. Н., Малинин Н. И., Паперник Л. Х., Цейтлин Б. М. Определение характеристик ползучести линейных упругонаследственных материалов с использованием ЭЦВМ. Инж. ж. МТТ, 1968, № 5.
10. Ван Фо Фы Г. А., Озеров В. И. Вязкоупругие деформации некоторых терморективных полимеров. Прикл. механ., 1965, т. 1, вып. 8.
11. Малинин Н. И. Ползучесть элементов конструкций из полимерных материалов. ПМТФ, 1970, № 2.
12. Потураев В. Н., Дырда В. И., Круш И. И. Прикладная механика резины. Киев, «Наукова думка», 1975.
13. Брызгалов Г. И. К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ, 1963, № 6.

14. Ривкин В. Н., Екельчик В. С. К вопросу об анизотропии ползучести стеклопластика и оценке ее влияния на изгиб и устойчивость пластики. В сб.: Строительная механика корабля. Материалы по обмену опытом, вып. 110. Л., «Судостроение», 1968.
15. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Степаньчев Е. И. Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии. Механика полимеров, 1973, № 5.
16. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
17. Нильсен Л. Е. Механические свойства полимеров и полимерных композиций. М., «Химия», 1978.
18. Демидова И. И., Екельчик В. С. Об описании реологии полимеров с помощью суммы дробно-экспоненциальных функций. В сб.: Исследования по упругости и пластичности, вып. 12. Изд-во ЛГУ, 1978.
19. Екельчик В. С., Исмаилов В. С., Кострицкий С. Н., Сборовский А. К. Описание температурной зависимости вязкоупругих свойств полимеров в динамическом режиме на основе линейной теории термовязкоупругости. Механика полимеров, 1977, № 5.
20. Cost T. L. Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis. AIAA J., 1964, vol. 2, No. 12. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 12).
21. Tobolsky A. V., Catsiff E. Elastoviscous properties of polyisobutylene (and other amorphous polymers) from stress—relaxation studies. IX. A summary of results. J. Polymer Sci., 1956, vol. 19, No. 91, p. 111—121.
22. Hopkins I. L., Hamming R. W. On creep and relaxation. J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, No. 8, p. 906—909.
23. Marvin R. S., Aldrich R., Sack H. S. The dynamic bulk viscosity of polyisobutylene. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 10, p. 1213—1218.
24. Huang N. C., Lee E. H., Rogers T. G. On the influence of viscoelastic compressibility in stress analysis. Techn. Rept. Division of Engng. Mech., 1963, No. 140. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 6.)
25. Bischoff I., Catsiff E., Tobolsky A. Elastoviscous properties of amorphous polymers in the transition region — I. J. Amer. Chem. Soc., 1952, vol. 74, No. 13, p. 3378—3384.
26. Афанасенко Н. Н., Екельчик В. С., Ривкин В. Я., Рябов В. М. Численные методы решения некоторых краевых задач ползучести судовых конструкций из стеклопластика. В сб.: Применение численных методов в строительной механике корабля, вып. 198. Л., «Судостроение», 1973.
27. Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. Минск, «Наука и техника», 1968.
28. Рябов В. М. Обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурных формул. В сб.: Методы вычислений, вып. 10. Изд-во ЛГУ, 1976.
29. Theocaris P. S. Viscoelastic properties of epoxy resins derived from creep and relaxation tests at different temperatures. Rheol. Acta, 1962, Bd 2, H. 2, S. 92—96.
30. Theocaris P. S. Phenomenical analysis of linear viscoelastic media. Kolloid-Zeitschrift und Zeitschrift für Polymere, 1966, Bd 209, H. 1, S. 34—43.
31. Theocaris P. S. Relaxation response of polyurethane elastomers. J. Polymer Sci., pt A, 1965, vol. 3, No. 7, p. 2619—2635.
32. Theocaris P. S. Affine transformations of viscoelastic functions. Revue Roumaine des Sciences Techniques. Ser. Mec. Appl., 1966, t. 11, No. 4, p. 953—975.
33. Muki R., Sternberg E. On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperature—dependent properties. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 2, p. 193—207.
34. Shapery R. A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. Proc. 4th U. S. Nat. Congress of Appl. Mech., Berkeley, Calif., 1962. New York, ASME, 1962, vol. 2, p. 1075—1085.
35. Lee E. N., Rogers T. G. Solution of viscoelastic stress analysis problems using measured creep or relaxation properties. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 1, p. 127—133.
36. Cost T. L., Becker E. B. A multirate method of approximate Laplace transform inversion. Internat. J. Numerical Methods in Engng, 1970, vol. 2, No. 2, p. 207—219.
37. Бугаков И. И. Ползучесть полимерных материалов. М., «Наука», 1973.
38. Громов В. Г. К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости. Механика полимеров, 1967, № 6.