МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1980

УДК 539.214; 539.374

МОДЕЛЬ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

А. Д. ЧЕРНЫШОВ

(*Винница*)

Известно, что модель термопластического тела с учетом конечных пластических и температурных деформаций применяется для металлов при процессах ковки, волочения через криволинейные матрицы.

Перемещения частиц среды представляются в виде суммы температурного и пластического перемещений подобно случаю упругопластического тела в [1]. При помощи такого подхода удается показать, что для изотропной термопластической среды полная деформация с мерой Коши равна произведению несовместных тензоров температурной и пластической частей деформаций, полная скорость деформаций равна сумме температурной и пластической частей, изменение относительной плотности среды представимо в виде произведения относительных изменений плотности на пластических и температурных деформациях. Находится кинематическое условие несжимаемости процесса пластического деформирования термопластического тела. Затем дается вывод определяющих уравнений в предположении, что внутренняя энергия зависит от температуры и пластических деформаций. Выписываются определяющие уравнения в частном случае, когда пластические деформации несжимаемы.

1. Кинематика в переменных Эйлера. Пусть положение частиц среды в начальном недеформированном состоянии 0 при начальной температуре T_0 определяется вектором $\mathbf{r}_0$, а в деформированном состоянии 2 при температуре T — вектором $\mathbf{r}_2$. Если все тело мысленно расчленить на малые элементы, то определим промежуточное состояние 1 частицы, как состояние с теми же пластическими деформациями, что и в состоянии 2, но с температурой T_0. В состоянии 1 положение частицы определяется вектором $\mathbf{r}_p$. Если теперь малые элементы освободить от действующих на них сил, а температуру довести до начального значения T_0, то элементы будут иметь некоторую конфигурацию H_1, не совпадающую с первоначальной конфигурацией элементов в ненагруженном состоянии. Положение элементов тела в состоянии разгрузки H_1 определяется с точностью до жесткого поворота $\mathbf{L}_0$ и перемещения $\mathbf{e}_0$, которые могут быть различными для разных элементов. В состоянии разгрузки H_1 малые элементы ни при каком выборе системы жестких поворотов $\mathbf{L}_0$ и перемещений $\mathbf{e}_0$ не могут образовать сплошное тело. Между элементами в общем случае всегда будут зазоры, т. е. пластические деформации не образуют евклидово пространство и не совместны. Рассмотрим два соседних элемента в положении H_1. Назовем центром элемента его среднюю точку с лагранжевой координатой $\mathbf{r}_0^*$, в которую стягивается область этого элемента в процессе предельного измельчения элементов. До момента разделения соседних элементов их смежные поверхности Σ и Σ' совпадали, поэтому каждой частице K на поверхности Σ соответствует некоторая частица K' на поверхности Σ', которые имеют одну и ту же лангранжеву координату и из-за несовместности пластических деформаций не совпадают в положении H_1. Эти рассмотрения приводят к выводу, что координаты частицы в пространстве в состоянии разгрузки $\mathbf{r}_p$ зависят не только от ее начальных координат $\mathbf{r}_0$ и времени t, но и от координат центра элемента $\mathbf{r}_0^*$, к которому принадлежит эта частица $\mathbf{r}_p=\mathbf{r}_p(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0, t)$. Отклонение положения частицы в состоянии H_1 от ее первоначального положения $\mathbf{r}_0$ назовем пластическим перемещением $\mathbf{u}_p=\mathbf{u}_p(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0, t)=\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_0$. Отклонение положения частицы в конечном термопластическом состоянии $\mathbf{r}_2$ от ее положения после разгрузки назовем температурным перемещением $\mathbf{u}_T=\mathbf{u}_T(\mathbf{r}_0^*, \mathbf{r}_0, t)=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_p$. Полное перемещение частиц $\mathbf{u}$ из состояния 0 в состояние 2 связано с $\mathbf{u}_p$ и $\mathbf{u}_T$ равенством

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_p+\mathbf{u}_T \tag{1.1.}$$

Тензоры конечных деформаций среды $\mathbf{E}$, а также пластических $\mathbf{E}_p$ и температурных $\mathbf{E}_T$ деформаций определим соответственными тензорами Коши в переменных Эйлера

$$\begin{gathered}\mathbf{E}=\mathbf{G}^*\mathbf{G},\quad \mathbf{E}_p=\mathbf{G}_p^*\mathbf{G}_p,\quad \mathbf{E}_T=\mathbf{G}_T^*\mathbf{G}_T\\ \mathbf{G}=\partial\mathbf{r}_0/\partial\mathbf{r}_2=\mathbf{G}_p\mathbf{G}_T,\quad \mathbf{G}_p=\lim\partial\mathbf{r}_0/\partial\mathbf{r}_p,\quad \mathbf{G}_T=\lim\partial\mathbf{r}_p/\partial\mathbf{r}_2\end{gathered} \tag{1.2}$$

Символ lim в (1.2) означает предельный переход при мысленном неограниченном измельчении частиц среды для получения состояния 1 путем формального изменения температуры до значения T_0. По этой причине $\mathbf{G}_p$ и $\mathbf{G}_T$ в общем случае теряют свойства градиентных тензоров, а тензоры конечных пластических и температурных деформаций в отдельности не могут удовлетворять уравнениям совместности.

Тензоры скоростей полных, пластических и температурных деформаций введем по формулам

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\varepsilon}=-\operatorname{sym}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{\cdot})=\operatorname{sym}(\operatorname{grad}\mathbf{v})=\boldsymbol{\varepsilon}_p+\boldsymbol{\varepsilon}_T\\ \boldsymbol{\varepsilon}_p=-\operatorname{sym}(\mathbf{G}_p^{-1}\mathbf{G}_p^{\cdot}),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_T=-\operatorname{sym}(\mathbf{G}_T^{-1}\mathbf{G}_T^{\cdot})\end{gathered} \tag{1.3.}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость частиц среды. Из (1.3.) видно, что скорость деформации среды равна сумме скоростей пластических и температурных деформаций.

Обозначим через R_p, R_T и R относительное изменение плотности среды на путях деформирования 0-1, 1-2 и 0-2 соответственно. Эти относительные плотности определяются равенствами

$$R=\det\mathbf{G},\quad R_p=\det\mathbf{G}_p,\quad R_T=\det\mathbf{G}_T \tag{1.4.}$$

Из (1.2) и (1.4) можно получить зависимость

$$\det\mathbf{G}=\det\mathbf{G}_p\det\mathbf{G}_T,\quad R=R_pR_T \tag{1.5}$$

Относительная плотность R удовлетворяет уравнению сохранения массы

$$R^{\cdot}+R\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}=0 \tag{1.6}$$

Точкой в (1.6) обозначена материальная производная по времени, $\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$ — след тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$. После подстановки (1.3) и (1.5) в (1.6), используя (1.2) и (1.4), придем к равенству

$$(R_T^{\cdot}+R_T\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_T)R_p+(R_p^{\cdot}+R_p\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_p)R_T=0 \tag{1.7}$$

Из независимости R_p и R_T в (1.7) получаем

$$R_T^{\cdot}+R_T\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_T=0,\quad R_p^{\cdot}+R_p\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_p=0 \tag{1.8}$$

Таким образом, относительное изменение плотности на каждом пути деформирования **0-1**, **0-2**, **1-2** в отдельности удовлетворяет соответствующему уравнению сохранения массы. Для установления связи между конечными деформациями $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_p$ и $\mathbf{E}_T$ представим тензоры $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_p$ и $\mathbf{G}_T$ по теореме о полярном разложении в виде

$$\mathbf{G}=\mathbf{L}\mathbf{E}^{1/2},\quad \mathbf{G}_p=\mathbf{L}_p\mathbf{E}_p^{1/2},\quad \mathbf{G}_T=\mathbf{L}_T\mathbf{E}_T^{1/2} \tag{1.9}$$

где $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_T$ — тензоры конечных поворотов малой окрестности материального элемента на путях деформирования **0-2**, **0-1** и **1-2** соответственно и потому связаны между собой соотношением

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}_p\mathbf{L}_T \tag{1.10}$$

Положение материального элемента в состоянии 1 определяется с точностью до жесткого поворота, поэтому без ограничения общности рассмотрений можно считать $\mathbf{L}_T=\mathbf{I}$.

Предполагается, что термопластическая среда имеет изотропные температурные свойства, поэтому тензор $\mathbf{E}_T=E_T\mathbf{I}$ является шаровым.

Подставляя (1.9) во второе равенство из (1.2), учитывая (1.10) и шаровой вид тензора $\mathbf{E}_T$, получим искомую связь между тензорами конечных деформаций среды, пластических и температурных деформаций

$$\mathbf{E}=E_T\mathbf{E}_p \tag{1.11}$$

Отметим, что в случае несжимаемых пластических деформаций из (1.4) и (1.8) будем иметь

$$R_p=\det \mathbf{G}_p=1,\quad \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_p=0 \tag{1.12}$$

Применяя операцию свертки к третьему равенству из (1.3) и используя условие пластической несжимаемости из (1.12), получим

$$\operatorname{div}\mathbf{v}+{}^3/_2E_T^{\boldsymbol{\cdot}}\,/\,E_T=0 \tag{1.13}$$

Условие пластической несжимаемости (1.12) при помощи (1.5) можно также записать в конечной форме $E_1E_2E_3=E_T^3$, где E_i — главные значения тензора $\mathbf{E}$.

2. Термодинамические соотношения в переменных Эйлера. Предполагаем, что для термопластической среды внутренняя энергия U, энтропия S и свободная энергия $A=U-TS$ зависят от температуры и тензора конечных пластических деформаций. В данном случае параметрами, определяющими состояние среды, являются температура и пластические деформации, поэтому термодинамическое уравнение Гиббса [2, 3] можно записать в форме

$$TdS=dU-M_0dT-\operatorname{tr}\mathbf{M}d\mathbf{E}_p \tag{2.1}$$

При помощи функции A уравнение баланса энтропии (2.1) перепишем в виде

$$dA+SdT=M_0dT+\operatorname{tr}\mathbf{M}d\mathbf{E}_p \tag{2.2}$$

Используя независимость дифференциалов dT и $d\mathbf{E}_p$, из (2.2) получим

$$S=M_0-\partial A\,/\,\partial T,\qquad \mathbf{M}=\partial A\,/\,\partial\mathbf{E}_p \tag{2.3}$$

Эти равенства следует рассматривать как определение энтропии S и тензорного коэффициента Гиббса $\mathbf{M}$ через свободную энергию A. Скалярный коэффициент Гиббса M_0 остается пока неопределенным. Для получения искомой замкнутой системы определяющих уравнений запишем первый и второй законы термодинамики

$$\rho U^{\boldsymbol{\cdot}}=\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})-\operatorname{div}\mathbf{q} \tag{2.4}$$

$$T^{-1}(\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad}T)+\rho M_0T^{\boldsymbol{\cdot}}+\rho\operatorname{tr}(\mathbf{M}\mathbf{E}_p^{\boldsymbol{\cdot}})-\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}_p+\boldsymbol{\varepsilon}_T)]\leqslant 0$$

Следует обратить внимание на специфику температурных деформаций, которая заключается в том, что если упругие, вязкие и пластические деформации (или скорости деформаций) связываются в определяющих уравнениях с напряжениями, то температурные деформации в определяющих уравнениях связываются не с напряжениями, а с температурой. Простейшая зависимость температурных деформаций от температуры линейная

$$E_T=1-2\alpha(T-T_0) \tag{2.5}$$

где α — коэффициент температурного расширения. Обобщая формулу (2.5), можно считать, что α зависит от T и $\mathbf{E}_p$ или в еще более общем случае

$$\mathbf{E}_T=\mathbf{E}_T(T, \mathbf{E}_p) \tag{2.6}$$

Для реальных материалов неизвестны экспериментальные данные о зависимости температурных деформаций от пластических деформаций, поэтому на такую зависимость следует смотреть пока лишь как на теоретическую возможность. После подстановки $\mathbf{E}_p$ из (1.2) и $\mathbf{E}_T$ из (2.6) в неравенство из (2.4) будем иметь

$$T^{-1}(\mathbf{q}\cdot\operatorname{grad} T)+\left(\rho M_0+\frac{1}{2}\frac{\partial \ln E_T}{\partial T}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)T^{\boldsymbol{\cdot}}-$$
$$-\operatorname{tr}\left(2\rho\mathbf{M}\mathbf{E}_p+\frac{\partial \ln E_T}{\partial \mathbf{E}_p}\mathbf{E}_p\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\right)\boldsymbol{\varepsilon}_p\leqslant 0 \tag{2.7}$$

Из (2.3) и (2.7) получим

$$\mathbf{q}=-\Lambda\operatorname{grad} T,\quad \Lambda\geqslant 0,\quad \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\varepsilon}_p\geqslant 0$$
$$\boldsymbol{\tau}=-2\rho\frac{\partial A}{\partial \mathbf{E}_p}\mathbf{E}_p-\frac{\partial \ln E_T}{\partial \mathbf{E}_p}\mathbf{E}_p\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.8}$$
$$M_0=-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2\rho}\frac{\partial \ln E_T}{\partial T},\quad S=-\frac{\partial A}{\partial T}-\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2\rho}\frac{\partial \ln E_T}{\partial T}$$

Левая часть неравенства (2.8) представляет собой мощность диссипации энергии вследствие пластических деформаций, напряжение $\boldsymbol{\tau}$ описывает упрочнение материала при изменении пластических деформаций и температуры. Введем обозначение для тензора пластических напряжений $\mathbf{s}_p$:

$$\mathbf{s}_p=\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\tau} \tag{2.9}$$

Последнее неравенство из (2.8) с учетом (2.9) принимает форму

$$\operatorname{tr}(\mathbf{s}_p\boldsymbol{\varepsilon}_p)\geqslant 0 \tag{2.10}$$

Неравенство (2.10) имеет аналогию с неравенством $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma\varepsilon})\geqslant 0$ для идеально пластической среды, поэтому предполагаем, что функция нагружения должна иметь вид

$$f(\mathbf{s}_p, T, \mathrm{X}_i)=0 \tag{2.11}$$

где χ_i — параметры истории [1]. Формулируя постулат Мизеса для тензора пластических напряжений $\mathbf{s}_p$ и функции нагружения (2.11) [4], придем к ассоциированному закону пластического течения

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p=\lambda\partial f/\partial \mathbf{s}_p \tag{2.12}$$

где λ — неизвестная скалярная функция. В общем случае равенство

$$\mathbf{G}=\mathbf{G}_T\mathbf{G}_p \tag{2.13}$$

совместно с (1.2), (1.3), (2.6), (2.9), (2.11), (2.12) и законом сохранения энергии из (2.4) образуют искомую замкнутую систему определяющих уравнений относительно $\mathbf{E}_p$, $\mathbf{G}_p$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{s}_p$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$, ε_T, E_T, T, λ.

Система определяющих уравнений сильно упрощается, если свободная энергия и температурные деформации зависят только от температуры и не зависят от пластических деформаций, т. е. материал идеально термопластический без упрочнения. Тогда определяющие уравнения

$$f(\boldsymbol{\sigma}, T)=0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p=\lambda\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_T\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}_p$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}=-\operatorname{sym}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{G}^{\boldsymbol{\cdot}}), \quad \varepsilon_T={}^1/_2T^{\boldsymbol{\cdot}}d\ln E_T/dT$$

и закон сохранения энергии из (2.4) образуют замкнутую систему относительно T, λ, ε_T, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$, $\boldsymbol{\sigma}$.

Для модели среды, когда пластические деформации несжимаемы, функция нагружения из (2.11) будет зависеть только от девиаторной части тензора пластических напряжений и от параметров истории [5]

$$f(\mathbf{s}_p', T, \chi_i)=0 \tag{2.14}$$

где штрихом обозначены девиаторная часть тензора. В ассоциированный закон течения теперь будет входить только девиаторная часть тензора $\mathbf{s}_p$, а его шаровая часть остается неопределенной, поэтому для замыкания системы уравнений необходимо добавить условие несжимаемости пластических деформаций (1.12).

3. Переменные Лагранжа. Все вспомогательные величины в замкнутой системе определяющих уравнений, вообще говоря, выражаются через тензор $\mathbf{G}$, который представляется в виде производных от полных перемещений по переменным Эйлера. Для получения определяющих уравнений в переменных Лагранжа необходимо вместо тензора $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}_p$, $\mathbf{G}_T$ использовать тензоры $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_p$ и $\mathbf{F}_T$, которые выражаются по формулам

$$\mathbf{F}=\partial\mathbf{r}_2/\partial\mathbf{r}_0=\mathbf{F}_T\mathbf{F}_p, \quad \mathbf{F}_p=\lim\partial\mathbf{r}_1/\partial\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{F}_T=\lim\partial\mathbf{r}_2/\partial\mathbf{r}_1 \tag{3.1}$$

Символ lim в (3.1) имеет тот же смысл, что и в (1.2). Тензоры конечных деформаций среды $\mathbf{B}$, пластических $\mathbf{B}_p$ и температурных $\mathbf{B}_T$ деформаций, а также тензоры скоростей деформаций определим соответственными тензорами в переменных Лагранжа

$$\mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^*=\mathbf{B}_T\mathbf{B}_p, \quad \mathbf{B}_p=\mathbf{F}_p\mathbf{F}_p^*, \quad \mathbf{B}_T=\mathbf{F}_T\mathbf{F}_T^*$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}=\operatorname{sym}(\mathbf{F}^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{F}^{-1}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p=\operatorname{sym}(\mathbf{F}_p{}^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{F}_p{}^{-1}), \quad \varepsilon_T=F_T{}^{-1}F_T{}^{\boldsymbol{\cdot}}\mathbf{I} \tag{3.2}$$

Из (1.2) и (3.2) получим зависимости

$$\mathbf{G}\mathbf{F}=\mathbf{G}_p\mathbf{F}_p=\mathbf{G}_T\mathbf{F}_T=\mathbf{E}\mathbf{B}=\mathbf{E}_p\mathbf{B}_p=\mathbf{E}_T\mathbf{B}_T=\mathbf{I} \tag{3.3}$$

Учитывая (3.3), условие пластической несжимаемости (1.12) принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{v}={}^3/_2B_T{}^{\boldsymbol{\cdot}}/B_T \quad \text{или} \quad B_1B_2B_3=B_T{}^3 \tag{3.4}$$

Теперь состояние термопластической среды будет определяться параметрами T и $\mathbf{B}_p$, поэтому термодинамическое уравнение Гиббса запишется в форме

$$TdS=dU-M_0dT-\operatorname{tr}(\mathbf{N}d\mathbf{B}_p) \tag{3.5}$$

Из (3.5) после введения свободной энергии A получим

$$S=M_0-\partial A/\partial T, \quad \mathbf{N}=\partial A/\partial\mathbf{B}_p \tag{3.6}$$

Вместо (2.6) предполагается зависимость

$$\mathbf{B}_T=\mathbf{B}_T(T, \mathbf{B}_p) \tag{3.7}$$

Второй закон термодинамики запишем в форме

$$T^{-1}(\mathbf{q}\cdot \operatorname{grad} T)+\rho M_0 T^{\cdot}+\rho \operatorname{tr}(\mathbf{N}\mathbf{B}_p^{\cdot})-\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\varepsilon})\leqslant 0 \tag{3.8}$$

После подстановки $\mathbf{B}_T$ и $\mathbf{B}_p$ из (3.2) в (3.7) найдем

$$\mathbf{q}=-\Lambda \operatorname{grad} T, \quad \Lambda\geqslant 0, \quad M_0=\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2\rho}\frac{\partial \ln B_T}{\partial T} \tag{3.9}$$

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\mu})\,\boldsymbol{\varepsilon}_p\geqslant 0, \quad S=\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2\rho}\frac{\partial \ln B_T}{\partial T}-\frac{\partial A}{\partial T}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\tau}=\left(2\rho\frac{\partial A}{\partial \mathbf{B}_p}-\frac{\partial \ln B_T}{\partial \mathbf{B}_p}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\right)\mathbf{B}_p$$

Для доказательства равенства $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\tau}$ достаточно воспользоваться уравнением $\mathbf{E}_p\mathbf{B}_p=\mathbf{I}$ и перейти для простоты к прямоугольной декартовой системе координат. По этой причине соотношения (2.9) – (2.12) остаются пригодными и в данном случае, а вместо (2.13) следует использовать аналогичное равенство

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_T\mathbf{F}_p \tag{3.10}$$

Совокупность равенств (2.9), (2.11), (2.12), (3.2), (3.7), (3.10) и закон сохранения энергии из (2.4) образуют искомую замкнутую систему определяющих уравнений в переменных Лагранжа относительно T, B_T, λ, ε_T, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$, $\mathbf{B}_p$, $\mathbf{F}_p$, $\mathbf{s}_p$, $\boldsymbol{\sigma}$. Эта система сильно упрощается, если A и B_T зависят только от температуры и, подобно случаю (2.14), приводятся к виду

$$f(\boldsymbol{\sigma}, T)=0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p=\lambda\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_p+\varepsilon_T\mathbf{I}, \quad \varepsilon_T={}^1/{}_2B_T^{\cdot}/B_T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}=\operatorname{sym}(\mathbf{F}^{\cdot}\mathbf{F}^{-1})$$

Для модели среды с несжимаемыми пластическими деформациями функция нагружения (2.14) и ассоциированный закон пластического течения не будут содержать шаровую часть тензора $\mathbf{s}_p$, поэтому для замыкания системы уравнений необходимо добавить условие несжимаемости (3.4).

Простейшая модель термопластического тела получается в случае, когда $\boldsymbol{\tau}=0$, функция нагружения соответствует условию пластичности Мизеса, а материал пластически несжимаемый

$$f(\boldsymbol{\sigma}, T, \chi_i)=\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}')-2k^2(T)=0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p=\lambda\boldsymbol{\sigma}', \quad \varepsilon_T=\alpha T^{\cdot}, \quad E_T=\exp[2\alpha(T_0-T)]$$

Поступила 6 IX 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
2. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов. М., «Мир», 1967.
3. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1974.
4. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
5. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.