МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1980

УДК 539.214; 539.374

О ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ МАТЕРИАЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ПЛАСТИНЧАТЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

В. В. ДУДУКАЛЕНКО, Н. Н. ЛЫСАЧ

(*Куйбышев*)

В постановке теории идеальной пластичности рассмотрим влияние концентрации пластинчатых включений и их относительных размеров на значение предела пластичности композиционного материала. Указанную структуру имеют материалы, полученные спеканием алюминиевой пудры (САП), которые обладают высокой жаропрочностью и низким удельным весом. Из наиболее распространенных материалов этого типа промышленностью освоена технология четырех марок САП, различающихся по концентрации и размерам жестких включений Al_2O_3.

1. Композиционная структура образована матрицей и включениями, прочно связанными между собой. Напряжения σ_{ij} удовлетворяют условию пластичности Мизеса

$$(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_{ll}/3)(\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_{mm}/3)=k^2,\ k_1^2 \tag{1.1}$$

где k, k_1 — пределы пластичности на сдвиг в матрице и включениях.

Упругие деформации по сравнению с пластическими предполагаются пренебрежимо малыми. Поля скоростей деформаций e_{ij} и напряжений являются статистически однородными и удовлетворяют условию эргодичности, т. е. средние значения $\langle\sigma_{ij}\rangle$, $\langle e_{ij}\rangle$ можно вычислять, используя интегрирование по макрообъему V.

Диссипативную функцию $D^*(\langle e_{ij}\rangle)$, определяющую макросвойства композиционного материала, получим как минимальное значение скорости диссипации энергии [2], отнесенной к единице макрообъема для произвольно фиксированных значений $\langle e_{ij}\rangle$:

$$D^*=\min\frac{1}{V}\int\limits_V D(e)\,dV,\quad \langle\sigma_{ij}\rangle=\frac{\partial D^*}{\partial\langle e_{ij}\rangle} \tag{1.2}$$

Здесь при условии Мизеса (1.1) в матрице $D(e)=k[e_{ij}e_{ij}]^{1/2}$ и на включениях $D(e)=k_1[e_{ij}e_{ij}]^{1/2}$ [2]; предполагается несжимаемость $e_{ii}=0$.

Пусть геометрическая структура материала задана функцией $\varkappa$, принимающей значение ноль в области матрицы и единица в области включений V_1. Тогда диссипативную функцию в произвольной точке объема V представим в виде

$$D=[f_{ij}f_{ij}]^{1/2},\quad f_{ij}=[k(1-\varkappa)+k_1\varkappa]e_{ij} \tag{1.3}$$

Учитывая неаналитичность функции $[f_{ij}f_{ij}]^{1/2}$, представляющей собой конус над пространством f_{ij}, аппроксимируем ее в окрестности точки $\langle f_{ij}\rangle$ параболоидом вращения, вписанным в конус. Таким образом, после осреднения имеет место приближение, содержащее второй порядок малости относительно флуктуаций f_{ij}':

$$\langle[f_{ij}f_{ij}]\rangle^{1/2}\approx[\langle f_{ij}\rangle\langle f_{ij}\rangle]^{1/2}+\langle f_{ij}'f_{ij}'\rangle/2[\langle f_{ij}\rangle\langle f_{ij}\rangle]^{1/2} \tag{1.4}$$

При использовании вариационного метода [3] требуется приближение функционала (1.2), поэтому предполагается малость f_{ij}' в среднем, т. е. необходимое условие, что мера множеств точек пространства x_i, где значения f_{ij}' неограничены, равна нулю. Этим множествам соответствуют поверхности разрыва скоростей v_i, которые характерны для пластических сред и имеют место не только на границе матрица — включение. Вычисление функционала (1.2) производится в классе обобщенных функций, которые представимы интегралом Фурье (спектральными разложениями).

Условие несжимаемости $v_{i,i}=0$ с использованием обобщенных производных эквивалентно непрерывности нормальной составляющей скорости на поверхности разрыва [4]. Таким образом, при вычислении (1.2) не требуется отдельного рассмотрения соотношений на поверхности разрывов.

Можно показать выполнение неравенств

$$\langle [f_{ij}f_{ij}]\rangle^{1/2}\leqslant[\langle f_{ij}f_{ij}\rangle]^{1/2}\leqslant[\langle f_{ij}\rangle\langle f_{ij}\rangle]^{1/2}+\langle f_{ij}'f_{ij}'\rangle/2[\langle f_{ij}\rangle\langle f_{ij}\rangle]^{1/2}$$

из которых следует, что приближение $D\approx[\langle f_{ij}f_{ij}\rangle]^{1/2}$ является более точным, чем соотношение (1.4). Представляя интеграл по объему матрицы в виде разности интегралов по объему V и области включений V_1, в результате осреднений получим

$$[\langle f_{ij}f_{ij}\rangle]^{1/2}=k[\langle e_{ij}e_{ij}\rangle+C\langle e_{ij}e_{ij}\rangle_1 q]^{1/2},\quad C=V_1/V \tag{1.5}$$

где $\langle e_{ij}e_{ij}\rangle_1$ — осреднение по объему включений; C — концентрация включений; $q=(k_1^2-k^2)k^{-2}$.

Приближение (1.4) дает возможность преодолеть трудности, связанные с нелинейностью уравнений теории пластичности. Однако нелинейность статистической задачи создает усложнения, которые имеют место в аналогичных расчетах упругих композитов. В этом случае используется предположение [5] о возможности в общих соотношениях приближенно принять деформированные состояния включений одинакового типа (ориентации, формы) равными значениями деформаций средних по однотипным включениям. При вычислении функционала (1.5) это предположение соответствует приближению $\langle e_{ij}e_{ij}\rangle_n=\langle e_{ij}\rangle_n\langle e_{ij}\rangle_n$, где $\langle\ldots\rangle_n$ — осреднение по области включений n-го типа. Таким образом,

$$D^*=\min k\left[\langle e_{ij}e_{ij}\rangle+q\sum_n C_n\langle e_{ij}\rangle_n\langle e_{ij}\rangle_n\right]^{1/2} \tag{1.6}$$

$$\langle e_{ij}\rangle_n=\langle e_{ij}\rangle+\langle \varkappa_n' e_{ij}'\rangle/C_n \tag{1.7}$$

Здесь флуктуации, обозначаемые штрихом, рассматриваются относительно средних по объему V, C_n — концентрация включений n-го типа; $\varkappa_n$ принимает значение единица на n-включениях и ноль в остальных точках объема V. Заметим, что

$$\varkappa_n\varkappa_m=\delta_{nm},\quad \sum_n C_n=C,\quad \sum_n C_n\langle e_{ij}\rangle_n=C\langle e_{ij}\rangle_1 \tag{1.8}$$

2. При варьировании функционала (1.6) учитываем, что переход по формуле Гаусса — Остроградского к интегралам по поверхности S объема V дает значения поверхностных интегралов, отнесенных к объему V, которые при неограниченном возрастании V стремятся к нулю, как отношение площади к объему S/V. Учитывая это замечание, после варьирования по флуктуациям поля скоростей v_i получим условие минимальности функционала (1.6)

$$\frac{1}{2}v_{i,jj}'+q\sum_n\langle e_{ij}\rangle_n\varkappa_{n,j}'+k^{-1}P_{,i}'=0,\quad v_{i,i}'=0 \tag{2.1}$$

где P' — флуктуации давления $\sigma_{ii}/3$.

Уравнение (2.1) решается методом интегрального преобразования Фурье. Функции и их спектральные разложения по волновым числам ξ будем обозначать одинаковыми буквами и различать указанием на аргумент x или ξ. Причем функции $g_{ijkl}(x)$ соответствует спектральное разложение

$$g_{ijkl}(x)=\int g_{ijkl}(\xi)\,e^{i\xi_i x_i}dx$$

Из уравнения (2.1) определяется $P'_{,i}$ при $v_{i,}{}'_{i}=0$:

$$P_{,i}'=-kq\sum_n\langle e_{kl}\rangle_n\xi_k\xi_l|\xi|^{-2}\varkappa_{n,i} \tag{2.2}$$

Спектральное представление функции Грина найдем, решая уравнение (2.1) с учетом (2.2),

$$\frac{1}{2}v_i'(\xi)=iq\sum_n\langle e_{il}\rangle_n\xi_l|\xi|^{-2}\varkappa_n'-iq\sum_n\langle e_{kl}\rangle_n\xi_i\xi_k\xi_l|\xi|^{-4}\varkappa_n'$$

$$e_{ij}'(\xi)=\frac{1}{2}i(\xi_jv_i'-\xi_iv_j')=q\sum_n\varkappa_n'\left\{2\frac{\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l}{|\xi|^4}\langle e_{kl}\rangle_n-\right.$$

$$\left.-\frac{\xi_i\xi_l}{|\xi|^2}\langle e_{jl}\rangle_n-\frac{\xi_j\xi_l}{|\xi|^2}\langle e_{il}\rangle_n\right\}=g_{ijkl}(\xi)\sum_n\langle e_{kl}\rangle_n\varkappa_n'(\xi).$$

В результате будем иметь

$$g_{ijkl}=2\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l|\xi|^{-4}-\xi_i\xi_l|\xi|^{-2}\delta_{jk}-\xi_j\xi_l|\xi|^{-2}\delta_{ik} \tag{2.3}$$

причем

$$e_{ij}=q\int g_{ijkl}(x-y)\sum_n\langle e_{kl}\rangle_n\varkappa_n'(y)\,dy \tag{2.4}$$

Для вычисления значений $\langle e_{ij}\rangle_n$ соотношение (2.4) умножим на $\varkappa_m'$ и произведем осреднение по формуле (1.7)

$$C_m(\langle e_{ij}\rangle_m-\langle e_{ij}\rangle)=q\int g_{ijkl}(x-y)\sum_n\langle e_{kl}\rangle\langle\varkappa_m'(x)\varkappa_n'(y)\rangle dy \tag{2.5}$$

Выполняя суммирование в уравнении (2.5), с учетом свойств индикаторной функции (1.8) получим

$$\sum_n C_n[\langle e_{ij}\rangle_n-\langle e_{ij}\rangle]=\frac{q}{V}\iint g_{ijkl}(x-y)\sum_n\langle e_{kl}\rangle_n\varkappa_n'(x)\varkappa_n'(y)\,dx\,dy \tag{2.6}$$

Используя теорему Остроградского — Гаусса, равенство нулю поверхностного интеграла, деленного на V, при $V\to\infty$, уравнение (2.1), условие несжимаемости $v'_{i,i}=0$, уравнение (1.7), получим

$$\langle e_{ij}'e_{ij}'\rangle=-\langle e'_{ij,j}v_i'\rangle=-q\sum_n\langle e_{ij}\rangle_nC_n[\langle e_{ij}\rangle_n-\langle e_{ij}\rangle] \tag{2.7}$$

Воспользовавшись формулами (1.8) и (2.7), функционал (1.6) запишем следующим образом:

$$D^*=k[\langle e_{ij}\rangle\langle e_{ij}\rangle+qC\langle e_{ij}\rangle_1\langle e_{ij}\rangle]^{1/2} \tag{2.8}$$

Решение линейной системы уравнений (2.5) относительно $\langle e_{ij}\rangle_n$ и вычисление $\langle e_{ij}\rangle_1$ по формуле (1.8) определяют диссипативную функцию (2.8). Однако необходимо задать коэффициенты уравнений (2.5), которые зависят от статистических свойств геометрической структуры материала.

Покажем, что при $m \neq n$ выполняется равенство

$$\frac{1}{V_m} \int \int g_{ijkl}(x-y) \varkappa_m(x) \varkappa_n(y) \, dx \, dy =$$
$$= \frac{1}{V-V_n} \int \int g_{ijkl}(x-y) \varkappa_n(y) [1-\varkappa_n(x)] \, dx \, dy \qquad (2.9)$$

Левая часть равенства (2.9) определяет средние по области $\varkappa_m$ значения деформаций в статистически однородном материале, созданные наличием включений $\varkappa_n$, правая — средние по области $V-V_n$ (или $1-\varkappa_n(x)$), равной сумме областей всех включений и матрицы V_m. Из независимости распределения включений различных ориентаций и эргодичности поля скоростей деформаций следует, что рассматриваемые средние значения будут одинаковыми при осреднении по области любого вида включений $m \neq n$.

Используя равенства (2.6) и (2.9) в уравнении (2.5) и осуществляя предельный переход к непрерывному распределению ориентаций n, можно показать [5]:

$$\langle e_{ij} \rangle_m - \langle e_{ij} \rangle = q S^{(m)} \langle e_{kl} \rangle_m - C[\langle e_{ij} \rangle_1 - \langle e_{ij} \rangle]/(1-C) \qquad (2.10)$$

где

$$S_{ijkl}^{(m)} = \int g_{ijkl}(x-y) \lambda_m(x-y) \, dy$$
$$\lambda_m(x-y) = \lim_{C_m \to 0} [\langle \varkappa_m'(x) \varkappa_m'(y) \rangle / C_m] \qquad (2.11)$$

При решении уравнений (2.10) потребуются свойства интегралов (2.11), которые при определенных условиях равны интегралам Эшелби [6].

3. Будем считать включения пластинчатыми, имеющими одинаковый порядок по длине и ширине. Ориентация включений, которую будем задавать нормалью к пластинам n_i, равновероятна по всем направлениям. Тип включений, по которым производится осреднение (1.7), определяется единичным вектором n_i.

Решение тензорного уравнения (2.10) можно получить после вычисления значений $S_{(ijk}^{n)l}$. Для этого рассмотрим симметризованную по всем индексам часть тензора $S_{ijkl}^{(n)}$, которая в соответствии с формулой (2.3) выражается через спектр $\Lambda_n^{(n)}(\xi)$ корреляционной функции $\lambda_n(x-y)$ в (2.11)

$$R_{ijkl}^{(n)} = \int \xi_i \xi_j \xi_k \xi_l |\xi|^{-4} \Lambda^{(n)}(\xi) \, d\xi \qquad (3.1)$$

Анизотропия тензора $R_{ijkl}^{(n)}$ определена только ориентацией включений n_i, следовательно, общий вид тензора можно представить тензорной функцией векторного аргумента

$$R_{ijkl}^{(n)} = A\delta_{(ij}\delta_{kl)} + B\delta_{(ij}n_k n_{l)} + D n_i n_j n_k n_l \qquad (3.2)$$

$$\delta_{(ij}\delta_{kl)} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$$

$$\delta_{(ij}n_k n_{l)} = \delta_{ij}n_k n_l + \delta_{ik}n_j n_l + \delta_{il}n_j n_k + \delta_{jk}n_i n_l + \delta_{jl}n_i n_k + \delta_{kl}n_i n_j$$

где A, B, D — скалярные величины; скобки означают симметризацию по всем индексам.

Если ориентация включений направлена по оси x_3, то корреляционную функцию будем представлять в виде $\lambda_3(x_1^2+x_2^2+a^2x_3^2)$, т. е. в сечениях, ортогональных оси n_i, функция $\varkappa_n$ обладает свойством статистической изотропности. Преобразование $y_1=x_1$, $y_2=x_2$, $y_3a^{-1}=x_3$ приводит к изотропной корреляционной функции. При этом сжатие изотропного распределения в пространстве y_i соответствует пластинчатым включениям ($a\ll1$), растяжение — иглообразным включениям ($a\gg1$).

Представление корреляционной функции λ_3 в пространстве Фурье имеет вид $\Lambda^{(3)}(\xi_1^2+\xi_2^2+a^2\xi_3^2)$, откуда следует, что интегралы (3.1) равны нулю, за исключением значений

$$
\begin{aligned}
R_{1111}^{(3)}&=R_{11}=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi_1^4}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2/a^2)^2}\frac{\Lambda^{(3)}(|\xi|)}{a}d\xi_1d\xi_2d\xi_3=R_{2222}^{(3)}\\
R_{1122}^{(3)}&=R_{12}=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2/a^2)^2}\frac{\Lambda^{(3)}(|\xi|)}{a}d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\\
R_{1133}^{(3)}&=R_{13}=R_{2233}^{(3)}=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi_1^2\xi_3^2}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2/a^2)^2}\frac{\Lambda^{(3)}(|\xi|)}{a^3}d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\\
R_{3333}^{(3)}&=R_{33}=\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\xi_3^4}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2/a^2)^2}\frac{\Lambda^{(3)}(|\xi|)}{a^5}d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Замена переменных, соответствующая введению сферической системы координат, с учетом соотношения

$$
\int\limits_0^\infty\frac{4\pi}{a}\Lambda^{(3)}(|\xi|)\,|\xi|^2d|\xi|=1
\tag{3.4}
$$

позволяет найти значения интегралов (3.3) при $a\leqslant1$:

$$
\begin{aligned}
4R_{13}&=(\alpha^2+1)\alpha^{-4}[(\alpha^2+3)\alpha^{-1}\operatorname{arctg}\alpha-3]\\
R_{33}&=(1+\alpha^2)\alpha^{-4}[1.5+\alpha^2-1.5(1+\alpha^2)\alpha^{-1}\operatorname{arctg}\alpha]\\
R_{11}&={}^3/_{16}\alpha^{-4}[\alpha^2+3+(\alpha^2+1)(\alpha^2-3)\operatorname{arctg}\alpha]\\
R_{12}&={}^1/_3R_{11},\quad a^{-2}=1+\alpha^2
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Скаляры A, B, D в соотношениях (3.2) инвариантны относительно поворота системы координат и ориентаций n_i. Следовательно, после сравнения с формулами (3.3) получим соотношения

$$
R_{11}=3A,\quad R_{13}=A+B,\quad R_{33}=3A+6B+D
\tag{3.6}
$$

которые определяют значения A, B, D. Соотношения (2.3) и (3.1) преобразуют тензорное уравнение (2.10) к виду

$$
\begin{aligned}
\alpha_{ij}&=\langle e_{ij}\rangle_n-q(2R_{ijkl}^{(n)}\langle e_{kl}\rangle_n-R_{ikll}^{(n)}\langle e_{jk}\rangle_n-R_{jkll}^{(n)}\langle e_{ki}\rangle_n)=\\
&=[\langle e_{ij}\rangle-C\langle e_{ij}\rangle_1]/(1-C)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Таким образом задача сводится к вычислению значений $\langle e_{ij}\rangle_n$ из уравнений (3.7), в которых коэффициенты определены формулой (3.2)

$$\alpha_{ij}=\langle e_{ij}\rangle_n+q[(6A+2B)\langle e_{ij}\rangle_n-2B\delta_{ij}n_kn_l\langle e_{kl}\rangle_n+ +(3B+D)(n_in_l\langle e_{jl}\rangle_n+n_jn_l\langle e_{il}\rangle_n)-2Dn_in_jn_kn_l\langle e_{kl}\rangle_n] \quad (3.8)$$

В дальнейшем будем использовать свойство равновероятности направлений n_i. При осреднении по ансамблю следует, что $\langle n_in_j\rangle={}^1/_3\delta_{ij}$, $\langle n_in_jn_kn_l\rangle={}^1/_{15}\delta_{(ij}\delta_{kl)}$.

Произведя последовательно свертки уравнения (3.8) с n_in_j и n_j и выполняя осреднения по равновероятным направлениям, получим

$$\alpha_{ij}=[1+q(6A+2B)]\langle e_{ij}\rangle_1+{}^1/_{15}\{[2(3B+D)/(q^{-1}+6A+5B+D)] [5+2(D-B)/(q^{-1}+6A+6B)]-4D/(q^{-1}+6A+6B)\}\alpha_{ij} \quad (3.9)$$

Среднее деформированное состояние включений вычисляется из формулы (3.9) с учетом правой части уравнения (3.7)

$$\langle e_{ij}\rangle_1=\langle e_{ij}\rangle\{C+(1-C)[1+q(6A+2B)]F^{-1}\}^{-1} \quad (3.10)$$

$$F=1+{}^4/_{15}Dq(1+6qA+6qB)^{-1}-2(3B+D)q [1+q(6A+5B+D)]^{-1}[{}^1/_3+{}^2/_{15}(D-B)q(1+6qA+6qB)^{-1}]$$

Диссипативная функция (2.8) композиционного материала вычисляется по соотношению (3.10) и соответствует условию пластичности Мизеса с предельным значением сдвиговых напряжений

$$k^*=k\{1+qC/[C+(1-C)(1+6qA+2qB)F^{-1}]\}^{1/2} \quad (3.11)$$

Используя соотношения (3.6), найдем

$$6A+2B=4R_{12}+2R_{13},\quad 3B+D=R_{33}-3R_{13}$$
$$6A+5B+D=R_{33}+4R_{12}-R_{13},\quad D-B=R_{33}+4R_{12}-7R_{13} \quad (3.12)$$

В результате исключения коэффициентов A, B, D с помощью соотношений (3.12) и проведения соответствующих преобразований будем иметь

$$[1+2q(3A+B)]F^{-1}=[1+2q(2R_{12}+R_{13})]$$
$$\left\{1-\frac{2}{15}q\left[\frac{3(R_{13}-R_{12})}{1+6qR_{13}}+\frac{4(R_{33}-3R_{13})}{1+q(R_{33}+4R_{12}-R_{13})}\right]\right\}^{-1} \quad (3.13)$$

В итоге, используя соотношения (3.5), для композиционных материалов с включениями, характеризуемыми $a\leqslant 1$, получим

$$[1+2q(3A+B)]F^{-1}=\{1+{}^1/_4q\alpha^{-5}[3(1+\alpha^2)^2\operatorname{arctg}\alpha-5\alpha^3-3\alpha]\}$$
$$\left\{1-\frac{2q}{15}\left[\frac{3}{8}\frac{3(1+\alpha^2)(\alpha^2+5)\operatorname{arctg}\alpha-13\alpha^3-15\alpha}{2\alpha^5+3q(1+\alpha^2)[(\alpha^2+3)\operatorname{arctg}\alpha-3\alpha]}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2(1+\alpha^2)[(4\alpha^2+15)\alpha-3(3\alpha^2+5)\operatorname{arctg}\alpha}{2\alpha^5+q[(2\alpha^4+7\alpha^2+6)\alpha-3(1+\alpha^2)(\alpha^2+2)\operatorname{arctg}\alpha]}\right]\right\}^{-1} \quad (3.14)$$

В предельном переходе при $\alpha\to 0$ $(a\to 1)$ уравнение (3.14) принимает вид

$$[1+2q(3A+B)]F^{-1}=1+0.4q \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.11), получим формулу для предела пластичности в случае сферических включений

$$k^*=k\{1+qC/[C+(1-C)(1+0.4q)]\}^{1/2} \quad (3.16)$$

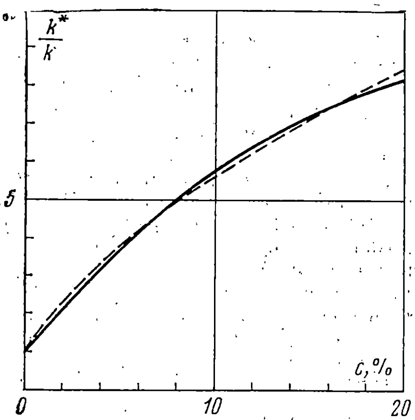
Действительно, из соотношений (3.5), (3.6) следует, что $A={}^1/_{15}$, $B=D=0$ и формулы (3.10) для F, (3.11) в этом случае при $a=1$ определяют выражение для предела пластичности, совпадающее с (3.16). В случае $a \ll 1$ ($\alpha \gg 1$), когда включения имеют пластинчатую форму, при $q \gg 1$ с учетом, что $\operatorname{arctg} \alpha \to \pi/2$ (при $\alpha \to \infty$), соотношение (3.14) будет равно

$$[1+2q(3A+B)]F^{-1} = \frac{2.14(1+1.177aq)(1+2.35aq)}{1+2.1aq} \tag{3.17}$$

Подставляя (3.18) в (3.12), получим

$$k^* = k\{1+qC[C+(1-C)2.14(1+1.177aq)(1+2.35aq)(1+2.1aq)^{-1}\}^{1/2} \tag{3.18}$$

Воспользуемся далее соотношением (3.18) для исследования материала САП, который содержит высокотвердые частицы Al_2O_3 в алюминиевой матрице. САП получают путем спекания и прессования окисленной с поверхности алюминиевой пудры, которая имеет форму чешуек толщиной менее 1 мкм с размером плоской поверхности до десятков микрон.



На фигуре показаны экспериментальная (сплошная линия) и расчетная (пунктирная) зависимости предела пластичности $\sigma_{0.2}$ для четырех марок САП от объемной концентрации C [1]. Все величины отнесены к их значению при $C=0$, поэтому в условиях идеальной пластичности их можно рассматривать как k^*/k. Для расчета использованы усредненные данные: толщина окисной пленки $h=0.055$ *мкм*, размер частиц $L=40$ *мкм*, $a=1.25 \cdot 10^{-3}$; $2k=4.5$ *кгс/мм*^{2}, $\sigma^1_{0.2}=2k_1=1100$ *кгс/мм*^{2}, $q=4.94 \cdot 10^4$ [1, 7, 8].

Ниже дано сопоставление вычисленных значений k^*/k с экспериментальными $[k^*/k]_0$ для четырех типов САП (в соответствии с порядком следования строк):

C	k^*/k	$[k^*/k]_0$	L
0.075	4.9	4.8	30–50
0.110	5.97	6.22	10–16
0.155	7.23	7.11	–
0.200	8.42	8.22	–

Из сравнения графических зависимостей, приведенных на фигуре, можно сделать вывод, что теория дает хорошее совпадение с экспериментальными данными.

Поступила 17 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Основы материаловедения. (Под ред. Сидорина И. И.), М., «Машиностроение», 1976, с. 246–248.
2. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. *Болотин В. В.* Механика композиционных материалов и конструкций из них. В сб.: Строительная механика. М., Стройиздат, 1972.
4. *Гельфанд И. М.* Обобщенные функции. М., Физматгиз, 1963.
5. *Левин В. М.* К определению упругих и термоупругих постоянных композитных материалов. Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 6.
6. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. Изд-во иностр. лит., 1963.
7. *Самсонов Г. В.* Физико-химические свойства окислов. М., «Металлургия», 1978.
8. *Келли Л.* Высокопрочные материалы. М., «Мир», 1976.