

О ПОДКРЕПЛЕНИИ КОНТУРА ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНКЕ

Л. М. КУРШИН, Г. И. РАСТОРГУЕВ

(Новосибирск)

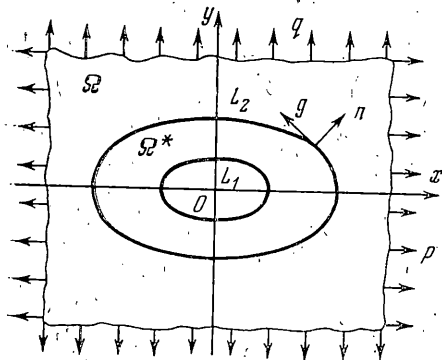
Под оптимальным подкреплением контура отверстия в пластинке обычно понимают так называемое эквивалентное подкрепление, при котором вне области, занимаемой подкреплением, сохраняется то же самое однородное напряженное состояние, которое при данной нагрузке имеется в пластинке без отверстия. Задача об эквивалентном подкреплении отверстия в пластинке, растянутой в двух направлениях, была рассмотрена в [1-4]. Подкрепление рассматривалось как пластинка постоянной толщины, занимающая в плане достаточно большую симметричную двусвязную область.

В данной работе в качестве условия оптимального выбора подкрепления вырез тонкостенных конструкций предлагается условие минимума суммарной энергии упругой деформации конструкции и подкрепления. Математически задача сводится к разысканию экстремума некоторого функционала в областях с подвижными границами. Вариационная задача об экстремуме функционала в области с подвижной границей обсуждалась в [5] в связи с задачей об определении оптимальной формы поперечного сечения скручиваемого стержня.

Ниже рассматривается задача о плоском напряженном состоянии пластинки, растянутой в двух направлениях, с отверстием, подкрепленным плоской шайбой. Двусвязная область, занимаемая подкреплением, определяется из условия минимума энергии деформации при заданных площадях подкрепляющей шайбы и отверстия. Варьированием функционала, связанного с энергией упругой деформации пластинки и подкрепления, в областях с подвижными границами получены граничные условия задачи, позволяющие сформулировать обратную краевую задачу теории упругости:

задачу определения форм контуров, ограничивающих подкрепление, при избыточном для обычной краевой задачи условии на искомой границе.

Построено приближенное решение по методу малого параметра, справедливое при напряженном состоянии на бесконечности, мало отличающемся от равностороннего растяжения.



Фиг. 1

1. **Постановка задачи.** Рассматривается пластинка с подкрепленным отверстием (фиг. 1) с напряжениями на достаточном удалении от выреза $\sigma_x = p, \sigma_y = q, \tau_{xy} = 0$ (1.1)

Контур отверстия свободен от внешних нагрузок. Пусть E, ν, h — модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина пластинки, занимающей область Ω . Разыскиваются контуры L_1, L_2 , ограничивающие двусвязную область Ω^* подкрепления толщиной h^* с упругими характеристиками E^*, ν^* , из условия минимума суммарной энергии упругой деформации пластинки и подкрепления при заданных площадях отверстия (площади области F , охватываемой L_1)

$$F_0 = \iint_F dx dy \quad (1.2)$$

и подкрепления

$$F_n = \iint_{\Omega^*} dx dy \quad (1.3)$$

Рассмотрим функционал

$$J = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left[u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \frac{1-\nu}{2} (u_y + v_x)^2 \right] dx dy + \\ + \frac{E^* h^*}{2[1-(\nu^*)^2]} \iint_{\Omega^*} \left[(u_x^*)^2 + (v_y^*)^2 + 2\nu^* u_x^* v_y^* + \frac{1-\nu^*}{2} (u_y^* + v_x^*)^2 \right] dx dy - \\ - h \int_L (u p x_n + v q y_n) ds \quad (1.4)$$

где u, v — компоненты вектора перемещения точки пластинки в декартовой системе координат, связанной с пластинкой (фиг. 1); звездочкой здесь и в дальнейшем обозначены соответствующие величины, относящиеся к подкреплению; нижними индексами обозначено дифференцирование по соответствующей переменной; $x_n = \cos(n, x)$, $y_n = \cos(n, y)$ — направляющие косинусы нормали к контуру при обходе в направлении против часовой стрелки; под контуром L понимается некоторый достаточно удаленный замкнутый контур, охватывающий отверстие в пластинке.

В правой части (1.4) первые два слагаемых представляют собой энергии деформации пластинки и подкрепляющей шайбы, последнее слагаемое — работу внешних сил.

Задача об определении контуров L_1, L_2 , ограничивающих подкрепление, из условия минимума суммарной энергии упругой деформации пластинки и подкрепления при заданных площадях отверстия и подкрепления может быть поставлена как вариационная задача о стационарном значении функционала (1.4) в областях с подвижными границами при дополнительных условиях (1.2), (1.3). В соответствии с правилом Лагранжа [6] для решения изопериметрической вариационной задачи составляем функционал

$$\Pi = J + \lambda_1 \iint_F dx dy - \lambda_2 \iint_{\Omega^*} dx dy \quad (1.5)$$

где λ_1, λ_2 — постоянные множители Лагранжа. Варьирование интегралов с переменной областью интегрирования рассматривалось в [7, 8]. Для первой вариации функционала (1.5) при варьировании контуров L_1, L_2 имеем

$$\delta \Pi = -B \iint_{\Omega} [(u_{xx} + \gamma_2 u_{yy} + \gamma_1 v_{xy}) \delta u^{\vee} + (v_{yy} + \gamma_2 v_{xx} + \gamma_1 u_{xy}) \delta v^{\vee}] dx dy + \quad (1.6)$$

$$+ B \int_{L_2} \{ [(u_x + \nu v_y) x_n + \gamma_2 (u_y + v_x)] \delta u^{\vee} + [(v_y + \nu u_x) y_n + \gamma_2 (u_y + v_x) x_n] \delta v^{\vee} \} ds +$$

$$+ B \int_L \{ [(u_x + \nu v_y) x_n + \gamma_2 (u_y + v_x) y_n] \delta u + [(v_y + \nu u_x) y_n + \gamma_2 (u_y + v_x) x_n] \delta v \} ds +$$

$$+ \frac{B}{2} \int_{L_2} [u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \gamma_1 (u_y + v_x)^2] \delta n ds -$$

$$\begin{aligned}
& -B^* \int_{\Omega} [(u_{xx}^* + \gamma_2^* u_{yy}^* + \gamma_1^* v_{xy}^*) \delta u^{\vee*} + (v_{yy}^* + \gamma_2^* v_{xx}^* + \gamma_1^* u_{xy}^*) \delta v^{\vee*}] dx dy + \\
& + B^* \int_{L_1+L_2} \{ [(u_x^* + v^* v_y^*) x_n \gamma_2^* (u_y^* + v_x^*) y_n] \delta u^{\vee*} + \\
& + [(v_y^* + v^* u_x^*) y_n + \gamma_2^* (u_y^* + v_x^*) x_n] \delta v^{\vee*} \} ds + \\
& + \frac{B^*}{2} \int_{L_1+L_2} [(u_x^*)^2 + (v_y^*)^2 + 2\nu^* u_x^* v_y^* + \gamma_2^* (u_y^* + v_x^*)^2] \delta n ds - \\
& - h \int_L (p x_n \delta u + q y_n \delta v) ds + \lambda_1 \int_{L_1} \delta n ds - \lambda_2 \int_{L_1+L_2} \delta n ds \\
B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad B^* = \frac{E^* h^*}{1-(\nu^*)^2}, \quad \gamma_1 = \frac{1+\nu}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1-\nu}{2}, \quad \gamma_1^* = \frac{1+\nu^*}{2} \\
\gamma_2^* = (1-\nu^*)/2, \quad \delta u^{\vee} = \delta u - u_x \delta x - u_y \delta y \\
\delta v^{\vee} = \delta v - v_x \delta x - v_y \delta y, \quad \delta u^{\vee*} = \delta u^* - u_x^* \delta x - u_y^* \delta y \\
\delta v^{\vee*} = \delta v^* - v_x^* \delta x - v_y^* \delta y, \quad \delta n = x_n \delta x + y_n \delta y
\end{aligned}$$

Направление обхода контурных интегралов в (1.6) — такое, при котором рассматриваемая область находилась слева.

Условию стационарности функционала (1.5) соответствуют дифференциальные уравнения равновесия в областях Ω , Ω^* , статические условия на L , условия отсутствия внешних нагрузок на L_1 и условия стыковки усилий и перемещений на границе L_2 , разделяющей пластинку и подкрепление. Кроме того, вследствие варьирования контуров L_1 , L_2 получаем два дополнительных краевых условия. На контуре отверстия L_1 :

$$1/2 B^* [(u_x^*)^2 + (v_y^*)^2 + 2\nu^* u_x^* v_y^* + \gamma_2^* (u_y^* + v_x^*)^2] = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{const} \quad (1.7)$$

Переходя к напряжениям и учитывая, что на L_1 , свободном от внешних нагрузок, второй инвариант напряжений $I_2 = (\tau_{xy}^*)^2 - \sigma_x^* \sigma_y^*$ равен нулю, условие (1.7) можно записать в виде

$$\sigma_i = [(\sigma_x^*)^2 + (\sigma_y^*)^2 - \sigma_x^* \sigma_y^* + 3(\tau_{xy}^*)^2]^{1/2} = C \quad (C = \text{const}) \quad (1.8)$$

где σ_i — интенсивность напряжений по Мизесу. Условие (1.8) означает, что форма отверстия L_1 должна быть равнопрочной.

Дополнительное условие на L_2 приводится к виду

$$\begin{aligned}
& h \sigma_n \left(\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial U^*}{\partial n} \right) + h \tau_{gn} \left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V^*}{\partial n} \right) - \\
& - \frac{h}{2E} [(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y)] + \\
& + \frac{h^*}{2E^*} \{ (\sigma_x^* + \sigma_y^*)^2 + 2(1+\nu^*) [(\tau_{xy}^*)^2 - \sigma_x^* \sigma_y^*] \} = \lambda_2 = \text{const}
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь U , V — проекции вектора перемещения соответственно на нормаль n и касательную g к контуру (фиг. 1), σ_n , τ_{gn} — соответствующие компоненты напряжения.

Следует заметить, что если рассмотреть задачу об определении формы отверстия в пластинке без подкрепления при тех же условиях нагружения (1.4) из условия минимума энергии деформации в области, занимаемой пластинкой, при заданной площади отверстия, то в качестве дополнительного условия на контуре отверстия получили бы условие (1.8) постоянства интенсивности напряжений. Такое же условие было получено в [9], где за критерий оптимальности формы отверстия был принят минимум максимального значения интенсивности напряжений в области, занимаемой пластинкой, с присоединенной границей. Таким образом, предложенный критерий выбора формы отверстия из условия минимума энергии деформации в случае пластинки с неподкрепленным отверстием эквивалентен критерию минимума наибольшего значения интенсивности напряжений. Задача об определении формы равнопрочного контура неподкрепленного отверстия в пластинке была решена в [10].

2. Преобразование уравнений задачи с применением комплексных представлений напряжений и перемещений. Пусть $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi_n(z)$, $\psi_n(z)$ — функции Колосова — Мусхелишвили ($z=x+iy$) соответственно пластинки и подкрепления. При $z \rightarrow \infty$ функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ должны удовлетворять условию

$$z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} = -1/2(p-q), \quad \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} = 1/4(p+q) \quad (2.1)$$

На контуре отверстия L_1 имеем условие отсутствия внешних нагрузок, которое ввиду симметрии задачи запишется в виде [1]:

$$\varphi_n(t) + t\overline{\varphi_n'(t)} + \overline{\psi_n(t)} = 0 \quad (2.2)$$

где через t здесь и в дальнейшем обозначается аффикс точек контуров L_1, L_2 .

Условия стыковки усилий и перемещений пластинки и подкрепления на L_2 :

$$\varphi_n(t) + t\overline{\varphi_n'(t)} + \overline{\psi_n(t)} = \frac{h}{h^*} [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] \quad (2.3)$$

$$\frac{\mu}{\mu^*} [\kappa^* \varphi_n(t) - t\overline{\varphi_n'(t)} - \overline{\psi_n(t)}] = \kappa \varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad \mu^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)}, \quad \kappa^* = \frac{3-\nu^*}{1+\nu^*}$$

Условие (1.8) постоянства интенсивности напряжений на L_1 в силу (2.2) имеет вид

$$\varphi_n'(t) + \overline{\varphi_n'(t)} = C_1 \quad (C_1 = \text{const}) \quad (2.4)$$

Наконец, дополнительное условие (1.9) на границе L_2 , разделяющей пластинку и подкрепление

$$\frac{h}{h^*} \{ \text{Re } D(t) \text{Re } M(t) + \text{Im } W(t) \text{Im } P(t) - 2(\kappa-1) [\text{Re } \varphi'(t)]^2 - S(t) \overline{S(t)} \} + \quad (2.5)$$

$$+ \frac{\mu}{\mu^*} \{ 2(\kappa^*-1) [\text{Re } \varphi_n'(t)]^2 + S^*(t) \overline{S^*(t)} \} = C_2 \quad (C_2 = \text{const})$$

$$D(t) = 2\varphi'(t) + P(t), \quad M(t) = (\kappa-1)\varphi'(t) - \frac{\mu}{\mu^*}(\kappa^*-1)\varphi_n'(t) + G(t)$$

$$W(t) = -(\chi+1)\varphi'(t) + \frac{\mu}{\mu^*}(\chi^*+1)\varphi_n'(t) + G(t), \quad P(t) = l(t)S(t)$$

$$G(t) = P(t) - \frac{\mu}{\mu^*}l(t)S^*(t), \quad S(t) = \bar{t}\varphi''(t) + \psi'(t)$$

$$S^*(t) = \bar{t}\varphi_n''(t) + \psi_n'(t), \quad l(t) = -(x_n + iy_n)^2$$

Главный вектор усилий, приложенных к каждому из контуров L_1, L_2 равен нулю, на бесконечности действует самоуравновешенная нагрузка, поэтому $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ должны быть однозначными соответственно в областях Ω, Ω^* аналитическими функциями.

Таким образом, поставленная задача формулируется следующим образом: найти границы областей Ω, Ω^* (контур L_1, L_2), в которых существуют соответствующие регулярные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$, удовлетворяющие краевым условиям (2.1)–(2.5).

3. Случай равностороннего растяжения пластинки на бесконечности. Покажем, что в частном случае, когда пластинка на бесконечности растягивается одинаковыми усилиями постоянных интенсивностей в направлениях осей Ox, Oy , т. е. $p=q$, решению поставленной задачи удовлетворяет кольцевое подкрепление.

Для кольцевого подкрепления функции, отображающие внешности единичных кругов $|\chi| > 1, |\xi| > 1$ соответственно на внешности контуров L_1, L_2 , имеют вид

$$z = A_1\chi, \quad z = A_2\xi \quad (3.1)$$

где A_1, A_2 — радиусы окружностей L_1, L_2 .

Согласно [11], а также из соображений симметрии функции Колосова — Мухелишвили бесконечной пластинки с круговым отверстием, главный вектор усилий приложенных к которому равен нулю, имеют вид

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K_j}{z^{2j-1}}, \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N_j}{z^{2j-1}} \quad (3.2)$$

Здесь K_j, N_j действительные, а Γ, Γ' определяются из условий на бесконечности (2.1) и в случае равностороннего растяжения равны

$$\Gamma = 1/2p, \quad \Gamma' = 0 \quad (3.3)$$

Функции $\varphi_n(z), \psi_n(z)$ являются однозначными аналитическими функциями в кольцевой области Ω^* и, следовательно, представляются рядами Лорана

$$\varphi_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{R_{-j}}{z^{2j-1}} + R_j z^{2j-1} \right), \quad \psi_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{Q_{-j}}{z^{2j-1}} + Q_j z^{2j-1} \right) \quad (3.4)$$

где R_j, Q_j — действительные коэффициенты.

На контурах L_1, L_2 из (3.1) получаем

$$t = A_1\xi, \quad \xi = \exp(i\beta), \quad 0 \leq \beta < 2\pi$$

$$t = A_2\tau, \quad \tau = \exp(i\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Подставляя значения функций (3.2)–(3.4) при $z \rightarrow t$ в условия прямой краевой задачи теории упругости (2.2), (2.3) и учитывая (3.5), получаем

бесконечную систему при одинаковых степенях ξ , τ , из которой следует, что все коэффициенты в (3.2), (3.4) равны нулю, кроме N_1 , R_1 , Q_{-1} , определяющихся из системы

$$2 \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 R_1' + Q_{-1}' = 0, \quad 2R_1' + Q_{-1}' - \frac{h}{h^*} N_1' = \frac{h}{h^*} \quad (3.6)$$

$$\frac{\mu}{\mu^*} [(\kappa^* - 1)R_1' - Q_{-1}'] + N_1' = \frac{1}{2}(\kappa + 1)$$

$$R_1' = R_1/p, \quad Q_{-1}' = Q_{-1}/A_2^2 p, \quad N_1' = N_1/A_2^2 p$$

В результате функции Колосова — Мусхелишвили принимают вид

$$\varphi(z) = 1/2 p z, \quad \psi(z) = N_1/z, \quad \varphi_n(z) = R_1 z, \quad \psi_n(z) = Q_{-1}/z \quad (3.7)$$

Непосредственной подстановкой (3.5), (3.7) в (2.4), (2.5) убеждаемся, что дополнительные условия на L_1 , L_2 выполняются тождественно, причем постоянные будут равны

$$C_1' = \frac{C_1}{p} = 2R_1', \quad C_2' = \frac{C_2}{p^2} = \frac{h}{2h^*}(\kappa + 1)N_1' \quad (3.8)$$

$$- \frac{h\mu}{h^*\mu^*} (1 + N_1') [Q_{-1}' + (\kappa^* - 1)R_1'] + \frac{\mu}{\mu^*} [2(R_1')^2(\kappa^* - 1) + (Q_{-1}')^2]$$

Таким образом, решением задачи определения двусвязной области, занимаемой подкреплением, из условия минимума суммарной энергии деформации пластинки и подкрепления (при заданных площадях отверстия и подкрепления) в случае равностороннего растяжения пластинки на бесконечности является кольцевое подкрепление. Интересно заметить, что и в случае задач об эквивалентном подкреплении решением является также кольцевое подкрепление, причем соотношение радиусов A_1/A_2 определяется однозначно [1]. В рассматриваемом же случае имеем множество решений, поскольку величина A_1/A_2 задается.

4. Приближенное решение по методу малого параметра для случая, когда напряженное состояние на бесконечности в пластинке мало отличается от равностороннего растяжения. Пусть в направлениях осей Ox , Oy в пластинке на бесконечности действуют напряжения (1.1), причем параметр несимметрии нагрузки $\varepsilon = (p - q)/(p + q)$ считается малым. Функции, отображающие внешности единичных кругов $|\chi| > 1$, $|\xi| > 1$ соответственно на внешности искомого контура L_1 , L_2 , ищем в виде

$$z = A_1 \chi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\chi^{2j}}, \quad z = A_2 \xi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{\xi^{2j}} \quad (a_0 = b_0 = 1) \quad (4.1)$$

Здесь A_1 , A_2 — действительные постоянные, определяющие масштаб. На границах L_1 , L_2 из (4.1) имеем

$$t = A_1 \xi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\xi^{2j}}, \quad \xi = \exp(i\beta), \quad 0 \leq \beta < 2\pi \quad (4.2)$$

$$t = A_2 \tau \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{\tau^{2j}}, \quad \tau = \exp(i\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Функции Колосова — Мусхелишвили пластинки и подкрепления возьмем в виде (3.2), (3.4), причем

$$\Gamma = 1/2r, \quad \Gamma' = -\varepsilon r, \quad r = 1/2(p+q) \quad (4.3)$$

Коэффициенты в (4.1), (3.2), (3.4) будем искать в виде разложения по степеням ε :

$$a_h = \sum_{j=h}^{\infty} a_h^{(2j-h)} \varepsilon^{2j-h}, \quad b_h = \sum_{j=h}^{\infty} b_h^{(2j-h)} \varepsilon^{2j-h}, \quad K_h = \sum_{j=h}^{\infty} K_h^{(2j-h)} \varepsilon^{2j-h}, \quad (4.4)$$

$$N_h = \sum_{j=h}^{\infty} N_h^{(2j-h-1)} \varepsilon^{2j-h-1}$$

$$R_h = \sum_{j=h}^{\infty} R_h^{(2j-h-1)} \varepsilon^{2j-h-1}, \quad R_{-h} = \sum_{j=h}^{\infty} R_{-h}^{(2j-h)} \varepsilon^{2j-h}, \quad Q_h = \sum_{j=h}^{\infty} Q_h^{(2j-h)} \varepsilon^{2j-h},$$

$$Q_{-h} = \sum_{j=h}^{\infty} Q_{-h}^{(2j-h-1)} \varepsilon^{2j-h-1} \quad (h=1, 2, 3, \dots)$$

Аналогичным образом постоянные C_1, C_2 в правых частях краевых условий (2.4), (2.5) представим в виде

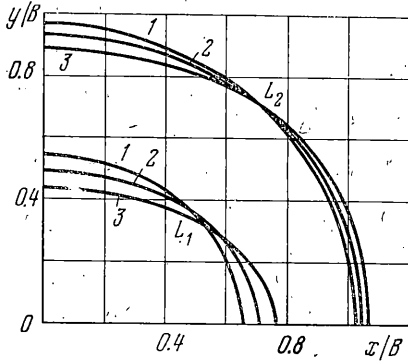
$$C_1 = \sum_{j=0}^{\infty} C_1^{(2j)} \varepsilon^{2j}, \quad C_2 = \sum_{j=0}^{\infty} C_2^{(2j)} \varepsilon^{2j} \quad (4.5)$$

При $\varepsilon=0$, т. е. при $p=q$, остаются только коэффициенты нулевого приближения $N_1^{(0)}, R_1^{(0)}, Q_{-1}^{(0)}$, постоянные $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}$, совпадающие с соответствующими величинами в (3.6), (3.8).

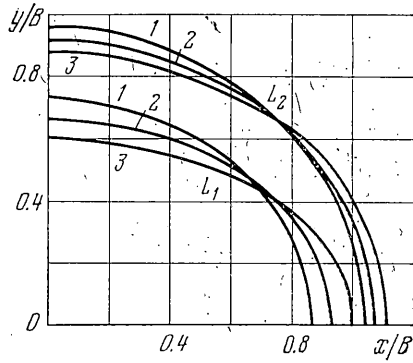
При записи выражения (4.4) предполагалось, что наименьшая степень ε в разложении коэффициента равна абсолютной величине разности между номерами данного коэффициента и коэффициентом в этом же ряде, отличным от нуля при $\varepsilon=0$. Например, в разложении коэффициента N_1 наименьшая степень ε равна нулю, поскольку при $\varepsilon=0$ коэффициент $N_1 = -N_1^{(0)} \neq 0$, коэффициента N_2 — единице, N_3 — двум и т. д.

Кроме того, учитывалось, что разложения (4.4), (4.5) либо четны, либо нечетны относительно ε , так как значения выражений для напряжений и перемещений пластинки и подкрепления не должны изменяться при одновременной замене в них ε на $-\varepsilon$, z на iz , т. е. модули всех коэффициентов, в том числе и постоянных C_1, C_2 , не должны меняться при замене ε на $-\varepsilon$. Четность или нечетность коэффициентов определяется наименьшей степенью ε .

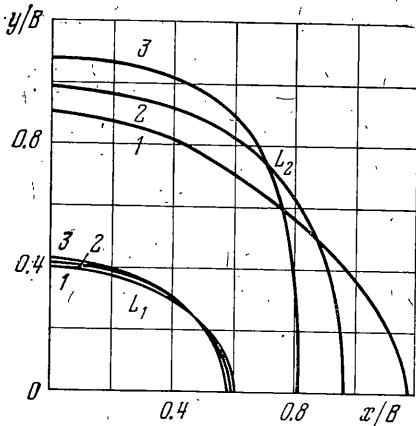
Подставляя (4.2)–(4.5) и значения (3.2), (3.4) на L_1, L_2 в краевые условия (2.2)–(2.5), получаем при одинаковых степенях ξ, τ системы уравнений для коэффициентов нулевого приближения при ε^0 , первого при ε^1 , второго при ε^2 и т. д. Поскольку коэффициенты предыдущих приближений вычисляются, то система уравнений для определения коэффициентов последующего приближения оказывается линейной. При практическом решении были вычислены коэффициенты нулевого, первого и второго приближений, т. е. в разложениях коэффициентов (4.4), постоянных



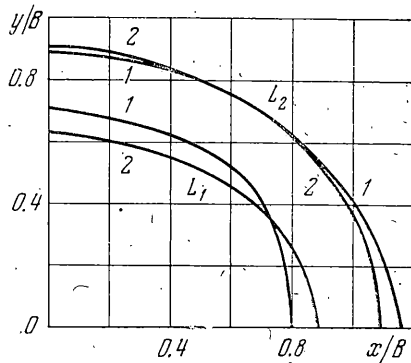
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

(4.5) и в дальнейших действиях удерживались слагаемые, содержащие степени ε не выше второй.

Полученные при этом двусвязные области подкрепления, удовлетворяющие условию минимума энергии деформации пластинки и подкрепления, изображены на фиг. 2–5. На фиг. 2, 3 показаны контуры L_1 , L_2 при значениях параметров $\nu = \nu^* = 0.3$, $E/E^* = 1$, $h/h^* = 0.4$, причем на фиг. 2 величина $A_1/A_2 = 0.6$, на фиг. 3 $A_1/A_2 = 0.8$. Кривые 1–3 соответствуют искомым контурам при значениях параметра нагрузки $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3$.

На фиг. 4 приведены контуры подкрепления при $\nu = \nu^* = 0.3$, $E/E^* = 1$, $A_1/A_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.2$. Значениям $h/h^* = 0.4, 0.6, 0.8$ соответствуют кривые 1, 2, 3.

Представляет определенный интерес сопоставить полученное решение с найденным в [3] эквивалентным подкреплением. При эквивалентном подкреплении, как указывалось выше, соотношение размеров внутреннего и внешнего контуров A_1/A_2 находится в процессе решения, а не задается, как в рассматриваемой задаче. Поэтому величина A_1/A_2 была взята из решения задачи определения эквивалентного подкрепления. На фиг. 5 изображены контуры эквивалентного подкрепления (кривые 1) и найденного подкрепления из условия минимума энергии деформации (кривые 2) при $\nu = \nu^* = 0.3$, $E/E^* = 1$, $h/h^* = 0.2$, $A_1/A_2 = 0.754$, $\varepsilon = 0.2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Я., Куршин Л. М. Об эквивалентном подкреплении отверстий. Тр. VI Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.
2. Александров А. Я., Горбатый А. В., Куршин Л. М. К решению задачи эквивалентного подкрепления отверстий. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
3. Куршин Л. М., Оноприенко П. Н. К задаче об эквивалентном подкреплении отверстий в пластинах. В сб.: Динамика и прочность конструкций, вып. 4. Новосибирск, Изд-во Новосибирск, электротехн. ин-та, 1976.
4. Александров А. Я. Некоторые решения задач об эквивалентном и равнопрочном подкреплении отверстий в пластинах. В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., ВИНТИ, 1974.
5. Куршин Л. М. К задаче об определении формы сечения стержня максимальной крутильной жесткости. Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 3.
6. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.-Л., Гостехиздат, 1950.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. М.-Л., Гостехиздат, 1933.
8. Volza O. Vorlesungen über Variationsrechnung. Leipzig, Teubner, 1949.
9. Баничук Н. В. Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах. ПММ, 1977, т. 41, вып. 5.
10. Черепанов Г. П. Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей. В кн.: Приложение теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.