

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ИЗГИБА И РАСТЯЖЕНИЯ УПРУГИХ ПЛАСТИН

К. А. ЛУРЬЕ

(Ленинград)

Тонкой упругой пластине при заданных условиях нагрузки и закрепления можно придать экстремальную жесткость при определенном оптимальном распределении модулей упругости ее материала. Вопрос о том, как найти такое распределение, изучается ниже применительно к задачам изгиба пластин нормальными силами, а также к задачам об обобщенном плоском напряженном состоянии пластин.

1. Описание управлений и постановка оптимальных задач. Распределение моментов  $M$ , перерезывающих сил  $N$  и прогиба  $w$  пластины  $S$ , изгибаемой нормальной нагрузкой  $q(x, y)$ , описывается уравнениями статики

$$\operatorname{div} M = N, \operatorname{div} N = -q \quad (1.1)$$

и законом Гука

$$M = D \cdot \cdot e \quad (1.2)$$

устанавливающим связь между  $M$  и тензором деформации

$$e = -\operatorname{grad} \operatorname{grad} w \quad (1.3)$$

К уравнениям (1.1)–(1.3) добавляются известные условия на контуре  $\partial S$  пластины.

Тензор четвертого ранга  $D$ , характеризующий упругие модули материала, определяется для двумерного пространства шестью параметрами. Свойство самосопряженности<sup>1</sup>, которым обладает этот тензор, позволяет представить его в виде диадного разложения по симметричным собственным тензорам второго ранга  $a_i$ , число которых в случае двух измерений равно трем  $D = d_i a_i a_i$  (здесь и ниже, если не оговорено противное, предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3).

Величины  $d_i$  — собственные числа самосопряженного тензора — всегда вещественны; вместе с собственными тензорами  $a_i$  они определяются из уравнений (не суммировать!)  $D \cdot \cdot a_i = d_i a_i$ .

Тензоры  $a_i$  и  $a_k$ , отвечающие различным собственным значениям  $d_i$  и  $d_k$ , ортогональны  $a_i \cdot \cdot a_k = 0$  ( $d_i \neq d_k$ ), символом  $(\cdot \cdot)$  обозначена операция свертки; эти тензоры можно считать и нормированными, т. е.  $a_i \cdot \cdot a_i = 1$  (не суммировать). Последние два равенства распространяются и на случай, когда  $d_i = d_k$ , так что всегда

$$a_i \cdot \cdot a_k = \delta_{ik} \quad (1.4)$$

<sup>1</sup> Пусть  $D$  — тензор четвертого ранга. Если  $a \cdot D \cdot b = b \cdot D \cdot a$  для всех тензоров второго ранга  $a$  и  $b$ , то тензор симметричен. Если симметричный тензор  $D$  удовлетворяет условию  $a \cdot D = 0$  для всех кососимметричных тензоров второго ранга  $a$ , то  $D$  самосопряжен. Тензор упругих модулей обладает этим свойством, если существует упругий потенциал.

Если  $d_i = d_h$ , то подпространство  $(a_i, a_h)$  не имеет выделенных собственных тензоров.

Совокупность линейно-независимых тензоров  $a_i$  образует базис в пространстве симметричных тензоров второго ранга; в частности

$$e = a_i a_i, \quad e_i = e \cdot a_i \quad (1.5)$$

и закон Гука (1.2) допускает запись

$$M = D \cdot e = d_i e_i e_i \quad (1.6)$$

Для удельной работы деформации имеем представление  $M \cdot e = d_i e_i^2$ ; неравенства  $d_i > 0$  равносильны положительной определенности удельной работы.

Тройка собственных тензоров  $a_i$  определяется девятью параметрами; благодаря шести условиям ортогональности (1.4) только три из них можно считать независимыми. Вместе с тремя величинами  $d_i$  всего получается шесть независимых параметров, которые в общем случае определяют тензор  $D$  в двумерном пространстве.

Главные значения  $a_i^1, a_i^2$  тензоров  $a_i$ , соответствующие главным осям  $1i, 2i$ , удобно определить как  $a_i^1 = \cos \theta_i, a_i^2 = \sin \theta_i$ , удовлетворив тем самым условиям нормировки. Если теперь ввести углы  $\varphi_i$  между осями  $1i$  и осью  $x$ , то оставшиеся условия ортогональности запишутся в виде ( $u_i = \operatorname{tg} \theta_i$ ):

$$1 + u_i u_k + u_i + u_k + (1 + u_i u_k - u_i - u_k) \cos 2(\varphi_k - \varphi_i) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

Эта система трех квадратных уравнений относительно  $u_i$  имеет вещественные решения при условии

$$\cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) \cos 2(\varphi_2 - \varphi_3) \cos 2(\varphi_3 - \varphi_1) \leq 0 \quad (1.8)$$

запрещающем, в частности, всем трем главным осям  $1i$  располагаться внутри сектора раствором, не превышающим  $\pi/4$ .

Если какой-нибудь из углов  $\varphi_k = \varphi_i - \varphi_h$ , например  $\varphi_{23}$ , равен нулю, то соответствующее условие (1.7) дает  $1 + u_2 u_3 = 0$ , т. е.  $\cos(\theta_2 - \theta_3) = 0, \theta_2 = \theta_3 + \pi/2$ . Соотношение (1.8) выполняется при этом как равенство:  $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi/4$ . Оставшиеся два уравнения (1.7) с учетом того, что  $1 + u_2 u_3 = 0$ , показывают, что  $u_1 = -1$ , т. е.  $\theta_1 = -\pi/4$ . Итак, если два собственных тензора соосны, то третий необходимо является девиатором, главные оси которого образуют угол  $\pi/4$  с главными осями двух первых тензоров. Верно и обратное: если один из собственных тензоров девиатор, то остальные два соосны и их главные оси образуют угол  $\pi/4$  с главными осями девиатора.

Именно такими свойствами обладает тензор  $D$  в случае ортотропной среды. Если  $i, j$  — единичные векторы главных осей упругости, в которых закон Гука записывается в виде

$$M = [u I_1(e) + v_1 e_{ii}] ii + [u I_1(e) + v_2 e_{jj}] jj + v_3 e_{ij} (ij + ji)$$

то собственные числа  $d_i$  и собственные тензоры  $a_i$  определяются формулами

$$d_{1,2} = u + \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \pm \frac{1}{2}[(v_1 - v_2)^2 + 4u^2]^{1/2}, \quad d_3 = v_3$$

$$a_1 = \cos \theta ii + \sin \theta jj, \quad a_2 = \sin \theta ii - \cos \theta jj, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ij + ji)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2u} \{ -(v_1 - v_2) + [(v_1 - v_2)^2 + 4u^2]^{1/2} \}$$

Если  $v_1 = v_2 \neq v_3$  (полуизотропная среда), то  $\theta = \pi/4, d_1 = 2u + v_1, d_2 = v_1$ ; тензор  $a_1$  шаровой, а  $a_2$  — девиатор. Сказанное справедливо и для случая

изотропной среды ( $v_1=v_2=v_3$ ), но на этот раз  $i, j$  — любые ортогональные один другому единичные векторы.

Приведенное описание легко распространяется на случай трехмерного пространства.

Представление тензора  $D$  в виде диадного разложения дает естественный способ выбора управляющих функций в задачах оптимизации распределения упругих модулей материала: в качестве управлений выбираются собственные тензоры  $a_i$ , связанные условием (1.4), и собственные числа  $d_i$ , ограниченные неравенствами

$$0 \leq d_{\min} \leq d_i \leq d_{\max} \leq \infty \quad (1.9)$$

Податливость пластины при изгибе будем характеризовать функционалом

$$I_1 = \int_S \rho q w \, dS \quad (1.10)$$

где  $\rho(x, y)$  — весовая функция; если  $\rho=1$ , то функционал (1.10) совпадает с работой нагрузки  $q$ .

Оптимальная задача заключается в определении таких управлений  $a_i, d_i$  при условиях (1.4), (1.9), что функционал (1.10) принимает максимальное возможное значение. Прогиб  $w$  определяется уравнениями (1.1) — (1.3) и соответствующими условиями на  $\partial S$ .

Для пластин, находящихся в обобщенном плоском напряженном состоянии, задача оптимизации формулируется совершенно аналогично; роль жесткости при этом играет функционал

$$I_2 = \int_{\partial S} \rho F \cdot u \, dt$$

выражающий (взвешенную) работу контурных сил  $F$ .

**2. Необходимые условия стационарности. Формула приращения функционала.** Вычисления проведем для задачи изгиба. Вводятся множители Лагранжа: тензоры  $\mu, \varepsilon, \pi$ , вектор  $\lambda$  и скаляр  $\omega$  и составляется функционал Лагранжа

$$\int_S [\rho q w + \mu \cdot (\varepsilon + \text{grad grad } w) + \varepsilon \cdot (M - D \cdot \varepsilon) + \lambda \cdot (\text{div } M - N) + \\ + \omega (\text{div } N + q) + \pi_{ik} (a_i \cdot a_k - \delta_{ik})] \, dS$$

Приращение этого функционала совпадает с  $\Delta I_1$ ; имеем

$$\Delta I_1 = \int_S [\rho q \Delta w + \mu \cdot (\Delta \varepsilon + \text{grad grad } \Delta w) + \varepsilon \cdot \Delta M - \varepsilon \cdot D \cdot \Delta \varepsilon - \\ - \varepsilon \cdot \Delta D \cdot (\varepsilon + \Delta \varepsilon) + \lambda \cdot (\text{div } \Delta M - \Delta N) + \omega \text{ div } \Delta N + \\ + \pi_{ik} (a_i \cdot \Delta a_k + \Delta a_i \cdot a_k + \Delta a_i \cdot \Delta a_k)] \, dS$$

Интегрируя по частям и приравнявая нулю коэффициенты при  $\Delta w, \Delta \varepsilon, \Delta M$  и  $\Delta N$  в линейных по этим переменным слагаемых, получим

$$\text{div div } \mu + \rho q = 0, \quad \mu = D \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{grad } \lambda, \quad \lambda = -\text{grad } \omega$$

или, что то же,

$$\text{div } \mu = \nu, \quad \text{div } \nu = -\rho q, \quad \mu = D \cdot \varepsilon = d_i \varepsilon_i a_i, \quad \varepsilon_i = \varepsilon \cdot a_i, \quad \varepsilon = -\text{grad grad } \omega \quad (2.1)$$

Выражения

$$\Delta \mathbf{D} = D_i (\mathbf{a}_i + \Delta \mathbf{a}_i) (\mathbf{a}_i + \Delta \mathbf{a}_i) - d_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i, \quad D_i = d_i + \Delta d_i, \\ \pi_{ih} (\mathbf{a}_{ih} \cdot \Delta \mathbf{a}_h + \Delta \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_h + \Delta \mathbf{a}_i \cdot \Delta \mathbf{a}_h)$$

удобно преобразовать, воспользовавшись разложением приращений  $\Delta \mathbf{a}_i$  по собственным тензорам  $\Delta \mathbf{a}_i = (\Delta \mathbf{a}_i)_s \mathbf{a}_s$ ,  $(\Delta \mathbf{a}_i)_s = \Delta \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_s$ .

Сделав это, приведем выражение для  $\Delta I_1$  к виду

$$\Delta I_1 = - \int_S \{ (\Delta d_i) \varepsilon_i e_i + D_i (\Delta \mathbf{a}_i)_s (\varepsilon_s e_i + \varepsilon_i e_s) + D_i (\Delta \mathbf{a}_i)_s (\Delta \mathbf{a}_i)_p \varepsilon_s e_p + \\ + (\Delta d_i) \varepsilon_i \Delta e_i + D_i (\Delta \mathbf{a}_i)_s (\varepsilon_s \Delta e_i + \varepsilon_i \Delta e_s) + D_i (\Delta \mathbf{a}_i)_s (\Delta \mathbf{a}_i)_p \varepsilon_s \Delta e_p - \\ - \pi_{ih} [ (\Delta \mathbf{a}_h)_i + (\Delta \mathbf{a}_i)_h + (\Delta \mathbf{a}_i)_s (\Delta \mathbf{a}_h)_s ] \} dS + \\ + \int_{\partial S} [ (\boldsymbol{\mu} \cdot \text{grad } \Delta w) \cdot \mathbf{n} - (\Delta w) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - (\Delta \mathbf{M} \cdot \text{grad } \omega) \cdot \mathbf{n} + \omega \Delta \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} ] dt \quad (2.2)$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $(\Delta \mathbf{a}_i)_s$ , получим

$$d_i (\varepsilon_s e_i + \varepsilon_i e_s) = \pi_{si} + \pi_{is} \quad (i, s = 1, 2, 3)$$

или, что то же (не суммировать),

$$(d_i - d_s) (\varepsilon_s e_i + \varepsilon_i e_s) = 0 \quad (2.3)$$

Система условий первого порядка включает еще неравенства (в следующих четырех формулах суммирование по  $i$  не производится)

$$(\Delta d_i) \varepsilon_i e_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

которые с учетом (1.9) дают

$$\varepsilon_i e_i > 0, \quad d_i = d_{\min}; \quad \varepsilon_i e_i < 0, \quad d_i = d_{\max} \quad (2.4)$$

Равенство  $\varepsilon_i e_i = 0$  соответствует промежуточному режиму по  $d_i$ . Из (2.3) вытекает, что либо  $d_i = d_s$ , либо  $\varepsilon_s e_i + \varepsilon_i e_s = 0$ . Если по всем трем собственным числам режимы управления предельные, то по крайней мере два из трех собственных чисел совпадают.

Контурный интеграл в (2.2) порождает в каждой конкретной задаче естественные граничные условия для  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\omega$ .

Выражение (2.2) зависит от проекций  $\Delta \mathbf{e}_i = \Delta \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}_i$ ; приращения тензора деформаций на собственные тензоры  $\mathbf{a}_i$ ; при локальном варьировании  $\mathbf{D}$  эти приращения вносят в пределах области варьирования вклад порядка  $\Delta \mathbf{D}$ , и поэтому должны учитываться при составлении условия Вейерштрасса.

1. *Случай*  $\rho = \text{const} = 1$ . Сопряженная система (2.1) совпадает с исходной (1.1)–(1.3); если этим свойством обладают и граничные условия, то совпадают и решения. Это имеет место, в частности, при жестко заделанной, либо свободно опертой границе. В обоих случаях можно считать, что  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}$ ; если  $e_i \neq 0$ , то из (2.4) вытекает, что  $d = d_{\min}$ . Такой выбор  $d_i$  для всех значений  $i$  удовлетворяет условиям (2.3); этим условиям можно также удовлетворить, полагая  $e_1 \neq 0$ ,  $e_2 = e_3 = 0$  (тогда  $d_1 = d_{\min}$ , а значения  $d_2$  и  $d_3$  безразличны), либо  $e_1 = 0$ ,  $e_2 \neq 0$ ,  $e_3 \neq 0$  (тогда  $d_2 = d_3 = d_{\min}$ , а  $d_1$  безразлично). Во всех трех случаях закон Гука в оптимальном режиме записывается в виде  $\mathbf{M} = d_{\min} \mathbf{e}$ , характерном для изотропной среды с нулевым коэффициентом Пуассона. Учитывая сказанное, можно считать эту среду и анизотропной с  $d_1 = d_{\min}$ ,  $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})^{-1/2} \mathbf{e}$ ; значения собственных чисел  $d_2$  и  $d_3$ , отвечающих собственным тензорам  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ , при этом безразличны.

2. *Случай*  $\rho \neq \text{const}$ . Сопряженные краевые задачи для уравнений (1.1)–(1.3) и (2.1) при заделанном или опертом контуре отличаются только внешней нагрузкой. Поэтому, вообще говоря,  $\varepsilon \neq e$ ; если все собственные числа  $d_i$  различны, то условия (2.3) показывают, что  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 0$  (в случае, если  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \neq 0$ , из (2.3) вытекает тривиальный результат  $e = 0$ ). Пусть  $\varepsilon_1 = 0$ ; тогда из (2.3) следует, что либо  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  (это тривиально), либо  $e_1 = 0$ . Остающееся уравнение (2.3)

$$\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_2 = 0 \quad (2.5)$$

равносильно соотношениям

$$e_2 = h \varepsilon_2, \quad e_3 = -h \varepsilon_3 \quad (2.6)$$

Условиям  $\varepsilon_1 = e_1 = 0$  при  $\varepsilon \neq e$  можно удовлетворить, считая  $d_1 = \infty$ ; если это противоречит (1.9), то следует отказаться от гипотезы  $d_1 \neq d_2 \neq d_3$ , положив, например,  $d_1 = d_3 \neq d_2$ . Тогда к (2.5) присоединится уравнение  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_1 = 0$  или, с учетом (2.6),  $e_1 = -h \varepsilon_1$ .

Но при  $d_1 = d_3$  подпространство  $(a_1, a_3)$  не имеет выделенных собственных тензоров, и, значит, для проекции  $e_1 a_1 + e_3 a_3$  тензора  $e$  на это подпространство можно, не нарушая общности, сохранить обозначение  $e_3 a_3$ . Называя через  $a_1$  ортогональный  $a_3$  тензор подпространства, сохраним приведенную схему, при которой

$$e_1 = \varepsilon_1 = 0, \quad e_2 = h \varepsilon_2, \quad e_3 = -h \varepsilon_3 \quad (2.7)$$

Условия (2.4) показывают, что при  $h > 0$  имеем  $d_2 = d_{\min}$ ,  $d_3 = d_{\max}$ ; согласно предыдущему, последнее равенство относится и к  $d_1$ .

3. *Асимптотический случай*  $d_{\max} = \infty$ . Считая  $h > 0$ , найдем в этом случае, что  $e = h \varepsilon$ . Закон Гука в исходной задаче (1.6) выразится равенством

$$h^{-1} M = d_{\min} \varepsilon_2 a_2 - K a_3, \quad K = \lim_{d_{\max} \rightarrow \infty} d_{\max} \varepsilon_3$$

а в сопряженной задаче (третье уравнение (2.1))

$$\mu = d_{\min} \varepsilon_2 a_2 + K a_3$$

Пользуясь тем, что  $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ , и учитывая (2.7), приведем написанные соотношения к виду

$$h^{-1} M = d_{\min} \varepsilon - K a_3, \quad \mu = d_{\min} \varepsilon + K a_3, \quad \varepsilon \cdot a_3 = 0 \quad (2.8)$$

или, наконец,

$$\mu + h^{-1} M = 2d_{\min} \varepsilon, \quad \mu - h^{-1} M = 2K a_3 \quad (2.9)$$

Равенство  $e = h \varepsilon$  (с учетом того, что  $e = -\text{grad grad } w$ ,  $\varepsilon = -\text{grad grad } \omega$ ) возможно лишь при условии  $h = \text{const}$ . Действительно, соотношения  $w_{xx} = h \omega_{xx}$ ,  $w_{xy} = h \omega_{xy}$ ,  $w_{yy} = h \omega_{yy}$  влекут за собой равенства  $h = f(\omega_x) = g(\omega_y)$  и, если  $h \neq \text{const}$ , то поверхности  $w = w(x, y)$ ,  $\omega = \omega(x, y)$  развертывающиеся. Пусть ось  $x$  имеет направление проекции одной из прямолинейных образующих поверхности  $\omega = \omega(x, y)$  на плоскость  $xy$ ; вдоль этой оси  $\omega_x = \text{const}$ ,  $\omega_y = \text{const}$  и  $\omega_{xx} = \omega_{xy} = 0$ . Дифференцируя равенство  $f(\omega_x) = g(\omega_y)$  по  $y$ , получим  $f_{\omega_x} \omega_{xy} = g_{\omega_y} \omega_{yy}$ ; левая часть этого равенства на оси  $x$  равна нулю, откуда  $g_{\omega_y} = 0$ , так как в противном случае имели бы  $\omega_{yy} = 0$ , т. е. поверхность прогиба — плоскость. Поскольку выбор образующей произволен, то  $g_{\omega_y} = 0$  во всей плоскости, т. е.  $h = \text{const}$ .

Первое из уравнений (2.8) вместе с уравнениями статики (1.1) и (2.1) показывает, что деформация оптимальной пластины, нагруженной силами с плотностью  $q$ , совпадает с деформацией изотропной пластины с нулевым

коэффициентом Пуассона и цилиндрической жесткостью  $2d_{\min}$  при условии, что эта пластина нагружена силами с плотностью  $q(1+h\rho)$ . Сказанное не означает, конечно, что оптимальная пластина изотропна: напротив, она, вообще говоря, существенно анизотропна и имеет два других собственных числа равными бесконечности. Эти собственные числа становятся безразличными, если  $M=h\mu$ , т. е.  $K=0$ , что справедливо в случае  $\rho=1$ . Выше указывалось, что в этом случае оптимальную пластинку можно считать и изотропной с нулевым коэффициентом Пуассона.

Остается указать правило определения постоянной  $h$ ; составляя с этой целью свертку первых двух уравнений (2.8) с тензором  $\varepsilon$ , интегрируя по  $S$  и сравнивая результаты, получим

$$h = \frac{A}{B}, \quad A = \int_S q\omega \, dS + \int_{\partial S} \left( N_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \right) \omega \, dt - \int_{\partial S} \omega_n M_{nn} \, dt$$

$$B = \int_S \rho q\omega \, dS + \int_{\partial S} \left( v_n + \frac{\partial \mu_{nt}}{\partial t} \right) \omega \, dt - \int_{\partial S} \omega_n \mu_{nn} \, dt$$

При сделанном предположении  $d_{\max}=\infty$  естественно задавать силовые граничные условия, т. е. моменты  $M_{nn}$  и обобщенную перерезывающую силу  $N_n + \partial M_{nt} / \partial t$ ; геометрические параметры  $w$ ,  $w_n$  (а, значит, и  $\omega$ ,  $\omega_n$ ) могут быть заданы на границе только нулями — в противном случае придется допустить бесконечные значения моментов. Этим требованиям удовлетворяют условия жесткого закрепления и свободного опирания, для которых параметр  $h$  определяется формулой

$$h = \int_S q\omega \, dS / \int_S \rho q\omega \, dS = \int_S qw \, dS / \int_S \rho qw \, dS \quad (2.10)$$

К сказанному следует добавить, что функция  $K$ , входящая во второе уравнение (2.9), остается неопределенной, а вместе с ней не удается определить и моменты  $\mu$  и  $M$  по отдельности: известной оказывается только их линейная комбинация  $h\mu + M$ . Это действительно так, если учесть, что оптимальная пластина оказывается «абсолютно твердой» по двум собственным значениям из трех<sup>1</sup>.

В качестве примера рассмотрим задачу максимизации прогиба в произвольной точке  $P(\mathbf{r}_0)$  круглой пластины радиуса  $a$ , изгибаемой равномерной нагрузкой и жестко закрепленной по контуру.

Пусть  $\mathbf{r}_0 = i\kappa a$ ,  $0 \leq \kappa \leq 1$ ; в качестве весовой функции в (1.10) возьмем  $\rho = \pi a^2 \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ . Прогиб  $w$  оптимальной пластины совпадает с прогибом изотропной пластины с нулевым коэффициентом Пуассона и жесткостью  $2d_{\min}$ , вызванным совместным действием равномерной нагрузки  $q=Q/(\pi a^2)$  и сосредоточенной силы  $hQ$  в точке  $P(\mathbf{r}_0)$ . Пользуясь соответствующими решениями [1], найдем

$$w = \frac{Q}{16\pi d_{\min}} \left[ hr_1^2 \ln \frac{r_1}{\kappa r_2} + \frac{1}{2} h(\kappa^2 r_2^2 - r_1^2) + \frac{1}{4}(a^2 - r^2) - \frac{1}{8a^2}(a^4 - r^4) \right] \quad (2.11)$$

$$r_1^2 = (x - \kappa a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - a/\kappa)^2 + y^2$$

<sup>1</sup> Можно попытаться получить значение  $K$  предельным переходом  $d_{\max} \rightarrow \infty$  от случая, когда  $d_{\max}$  конечно. Информация о моментах, однако, не нужна: для подсчета значений функционала требуется знать только деформации.

Прогиб в точке  $P(r_0)$  равен

$$w(P) = \frac{Qa^2}{32\pi d_{\min}} (1-\kappa^2)^2 \left( \frac{1}{4} + h \right) \quad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в (2.10), получим уравнение для определения  $h$ ; этот параметр оказывается равным  $h = 1/[2\sqrt{3}(1-\kappa^2)] \geq 0$ . Подстановка в (2.12) теперь дает

$$w(P) = \frac{Qa^2}{64\pi d_{\min}} \frac{1}{\sqrt{3}} (1-\kappa^2) \left[ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\kappa^2) \right]$$

Это выражение естественно сравнить с прогибом  $w^0(P) = Qa^2(1-\kappa^2)^2 / 64\pi d_{\min}$  в точке  $P$  изотропной пластины, нагруженной равномерной нагрузкой  $Q/\pi a^2$ , имеющей жесткость  $d_{\min}$  и нулевой коэффициент Пуассона. Функция

$$f_1(\kappa) = w(P) / w^0(P) = [1 / \sqrt{3} + 1/2 (1-\kappa^2)] / (1-\kappa^2)$$

параметра  $\kappa$  представлена кривой 1 ( $\lg f_1$ ) на фигуре.

Если условие жесткого закрепления контура заменить условием его свободного опирания, то соответствующий выигрыш в прогибе определится формулой<sup>1</sup>

$$f_2(\kappa) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5-\kappa^2} \left[ \frac{7}{3} \left( \frac{2}{\kappa} \ln \frac{1+\kappa}{1-\kappa} - 1 \right) \right]^{1/2}$$

функция  $f_2(\kappa)$  представлена кривой 2 ( $\lg f_2$ ) на фигуре. Как видно из графиков, оптимизация более эффективна в случае жесткого закрепления.

**3. Обобщенное плоское напряженное состояние пластины.** Составляющие деформации  $e$  даются уравнениями

$$e_{xx} = u_x, \quad e_{yy} = v_y, \quad e_{xy} = 1/2 (u_y + v_x) \quad (3.1)$$

в которых  $u, v$  — проекции вектора перемещения; составляющие напряжения  $T$  выражаются через функцию Эри

$$T = \varphi_{yy} i i - \varphi_{xy} (i j + j i) + \varphi_{xx} j j$$

Закон Гука записывается в форме  $e = C \cdot T$ , содержащей тензор упругих податливостей  $C$ ; для этого тензора справедливо представление  $C = c_i b_i b_i$ .

Жесткость пластины будем характеризовать функционалом

$$I_2 = \int_{\partial S} \rho (F_x u + F_y v) dt \quad (3.2)$$

$$F_x = \varphi_{yy} y_t + \varphi_{xy} x_t, \quad F_y = -\varphi_{xy} y_t - \varphi_{xx} x_t$$

где  $\rho$  — весовая функция, а  $F_x, F_y$  — составляющие контурных сил. Максимируемый функционал выражает (взвешенную) работу этих сил на перемещениях точек контура.

<sup>1</sup> Для вывода нужно воспользоваться решением задачи об изгибе свободно опертой круглой пластины сосредоточенной силой [2].

Подобно предыдущему управлению будем считать собственные тензоры  $\mathbf{b}_i$  и собственные значения  $c_i$  при ограничениях, аналогичных (1.4) и (1.9).

Сопряженная система  $\varepsilon_{xx} = \xi_x$ ,  $\varepsilon_{yy} = \eta_y$ ,  $\varepsilon_{xy} = 1/2(\xi_y + \eta_x)$ ,  $\Theta = \psi_{yy} \mathbf{i} \mathbf{i} - \psi_{xy} (\mathbf{i} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{i}) + \psi_{xx} \mathbf{j} \mathbf{j}$ ,  $\varepsilon = \mathbf{C} \cdot \Theta$  дополняется граничными условиями для переменных  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\psi$ ; эти условия порождаются слагаемыми

$$\int_{\partial S} \{ (-\xi + \rho u) [ (\Delta \varphi_{yy}) y_i + (\Delta \varphi_{xy}) x_i ] + (\eta - \rho v) [ (\Delta \varphi_{xy}) y_i + (\Delta \varphi_{xx}) x_i ] + (\Delta u) (\psi_{yy} y_i + \psi_{xy} x_i + \rho F_x) - (\Delta v) (\psi_{xy} y_i + \psi_{xx} x_i - \rho F_y) \} dt$$

в выражении для первой вариации расширенного функционала.

Будем считать заданными составляющие перемещения точек контура:  $u = u_0$ ,  $v = v_0$ ; тогда  $\xi = \rho u_0$ ,  $\eta = \rho v_0$  вдоль  $\partial S$ .

Полагая  $c_{\max} = \infty$ , по аналогии с предыдущим заключаем, что  $\mathbf{T} = g \Theta$ ,  $g = \text{const}$  и, если  $g > 0$ , то  $g^{-1} \mathbf{e} = c_{\min} \Theta - L \mathbf{b}_3$ ,  $\varepsilon = c_{\min} \Theta + L \mathbf{b}_3$ ,  $\Theta \cdot \mathbf{b}_3 = 0$ . Отсюда, подобно (2.9), получаются уравнения  $g \varepsilon + \mathbf{e} = 2 c_{\min} \mathbf{T}$ ,  $\varepsilon - g^{-1} \mathbf{e} = 2 L \mathbf{b}_3$ , где параметр  $g$  определяется формулой

$$g = \frac{A_1}{B_1}, \quad A_1 = \int_{\partial S} [ u (\psi_{yy} y_i + \psi_{xy} x_i) - v (\psi_{xy} y_i + \psi_{xx} x_i) ] dt$$

$$B_1 = \int_{\partial S} [ \xi (\psi_{yy} y_i + \psi_{xy} x_i) - \eta (\psi_{xy} y_i + \psi_{xx} x_i) ] dt$$

или, если заданы перемещения

$$g = \frac{A_2}{B_2}, \quad A_2 = \int_{\partial S} [ u_0 (\psi_{yy} y_i + \psi_{xy} x_i) - v_0 (\psi_{xy} y_i + \psi_{xx} x_i) ] dt$$

$$B_2 = \int_{\partial S} [ \rho u_0 (\psi_{yy} y_i + \psi_{xy} x_i) - \rho v_0 (\psi_{xy} y_i + \psi_{xx} x_i) ] dt$$

Задание перемещений точек контура естественно, если иметь в виду известную статико-геометрическую аналогию; поверхностные силы на контуре могут быть заданы только нулями. В результате решения задачи определяются напряжения, а деформации  $\varepsilon$  и  $\mathbf{e}$  остаются произвольными: известной оказывается только комбинация  $g \varepsilon + \mathbf{e}$ .

Как пример была рассмотрена задача максимизации функционала (3.2) для круглой пластинки, точки контура которой получают перемещение  $u_0 \cos \varphi$ ,  $u_0 = \text{const}$ ; весовая функция в (3.2) была выбрана равной  $\rho = \cos 2\varphi$ . Вычисления показали, что отношение оптимального значения функционала к его значению для изотропной среды с нулевым коэффициентом Пуассона и податливостью  $c_{\min}$  равно  $1/2(1 + \sqrt{3}) = 1.366$ .

Автор благодарен П. А. Жилину, ознакомившему его с представлением тензора четвертого ранга через собственные элементы.

Поступила 25 X 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М., «Машиностроение», 1977.
2. Лурье А. И. К задаче о равновесии пластинки с опертыми краями. Изв. Ленингр. политехн. ин-та, 1928, т. 31.