МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1979

УДК 624.074.4:512.83:681.3

УЧЕТ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. А. ПОСТНОВ, Н. Г. СЛЕЗИНА

(Ленинград)

Исследование нелинейных краевых задач с помощью метода конечных элементов (МКЭ) приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений, выражающих связь между узловыми обобщенными усилиями и перемещениями.

Вопросы, касающиеся численных методов и алгоритмизации решения указанной системы уравнений, разработаны с достаточной полнотой и широко освещены в литературе [1–8].

Наиболее приемлемыми с точки зрения точности и экономичности признаны методы «шагового нагружения» с контролем равновесия системы в процессе нагружения [1, 2]. Процедура шагового метода предполагает осреднение жесткостных параметров системы в пределах каждого шага нагружения на основе линеаризации уравнений равновесия метода конечных элементов.

Построение разрешающих уравнений метода конечных элементов и их линеаризация обычно [1, 2, 4, 5] рассматривается в самой общей постановке, поскольку конкретное их изложение зависит от выбора теории, описывающей поведение материала, базовой метрики и некоторых других факторов. Существующие конкретные решения [3, 6–8] основываются, как правило, на теории течения и эйлеровой метрике. Линеаризация уравнений метода конечных элементов при этом осуществляется путем определения полного дифференциала вектора узловых обобщенных сил.

Для области малых упругопластических деформаций, сопровождаемых большими перемещениями, что характерно для задач изгиба тонких оболочек, допустимо использование деформационной теории [7, 9, 10]. Однако при данной постановке задачи необходимо прибегать к уравнениям деформационной теории в приращениях, которые громоздки и крайне неудобны для практического применения. Замена указанных уравнений приближенными зависимостями типа [11] может привести к существенным погрешностям и сузить круг решаемых задач.

Ниже предложен иной путь получения линеаризованной системы уравнений метода конечных элементов [4, 5], основанный на разложении исходной матрицы жесткости упругой системы в ряд Тейлора по перемещениям в окрестности достигнутого уровня нагружения. Такой путь обеспечивает единый методологический подход при учете физической и геометрической нелинейности. Применение деформационной теории (без каких-либо упрощающих аппроксимаций) приводит к простым и удобным для реализации на ЭВМ зависимостям шагового метода.

1. Решение строится в системе координат, связанной с исходным состоянием тела (лагранжев подход) [6]. Кинематические соотношения берутся на основе нелинейной теории оболочек, учитывающей только большие повороты меридиональных сечений [12]. В качестве конечного элемента принимается усеченный конус, переходящий в пределе в цилиндр и пластину с вырезом (фиг. 1). Шаговое нагружение трактуется в постановке, изложенной в [4]. Согласно [4], при приращении нагрузки от i-го до $(i+1)$-го шага уравнение равновесия конечного элемента оболочки в местной системе координат имеет вид

$$[K^{(i)}]\{\Delta U_*^{(i+1)}\}+\left[\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial[K]}{\partial q_j}\Delta q_j^{(i+1)}\right]\Bigg|_{\{q\}=\{q\}^{(i)}}\{U_*^{(i)}\}=\{\Delta P\}_{i+1} \qquad (1.1)$$

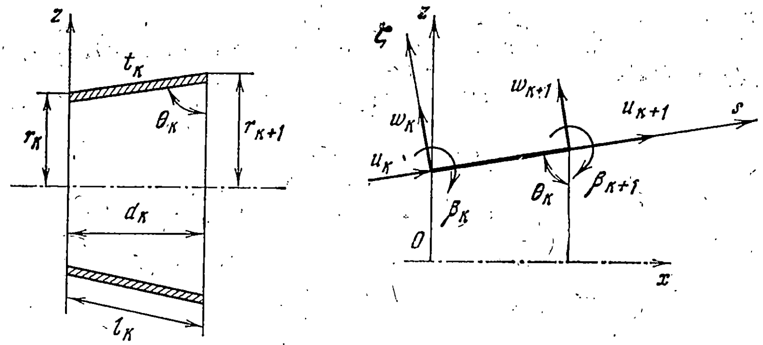
$$\{U_*\}=\{u_k w_k \beta_k u_{k+1} w_{k+1} \beta_{k+1}\}$$

где $\{\Delta P\}_{i+1}$ — матрица приращений нагрузки для $(i+1)$-го шага; $\{U_*\}$ — вектор узловых перемещений элемента (фиг. 2); q_j — j-й член матрицы $\{U_*\}$; $[K^{(i)}]$ — матрица жесткости элемента при $\{q\}=\{q\}^{(i)}$.

Матрица $[K]$ получается на основе принципа возможных перемещений, согласно которому

$$\{\delta U_*\}^T\{R\}=\int_V\{\delta\varepsilon\}^T\{\sigma\}dV,\quad \{\varepsilon\}=\{\varepsilon_s\varepsilon_\varphi\},\quad \{\sigma\}=\{\sigma_s\sigma_\varphi\} \tag{1.2}$$

где $\{R\}$ — вектор узловых обобщенных сил, соответствующих вектору узловых перемещений $\{U_*\}$; $\{\varepsilon\}$, $\{\sigma\}$ — векторы деформаций и напряжений элемента (в меридиональном и окружном направлениях).



Фиг. 1–2

Перемещения срединной поверхности элемента аппроксимируем степенными функциями длины дуги меридиана s:

$$\{U\}=\{C\}\{\alpha\},\qquad \{\alpha\}=\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\} \tag{1.3}$$

где $\{U\}=\{uw\beta\}$ — вектор перемещений конечного элемента; $\{\alpha\}$ — вектор, состоящий из неопределенных параметров

$$[C]=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \\ 0 & 0 & 1 & 2s & 3c^2 & 0 \end{Vmatrix}$$

$[C]$ — матрица связи перемещений элемента и неопределенных параметров.

На основе нелинейной теории [12] будем иметь

$$\{\varepsilon\}=[D_0]\{U\} \tag{1.4}$$

$$[D_0]=\begin{Vmatrix} \dfrac{d}{ds} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{ds}\right)^2 & -\zeta\dfrac{d}{ds} \\ \dfrac{\cos\theta}{r} & \dfrac{\sin\theta}{r} & -\zeta\dfrac{\cos\theta}{r} \end{Vmatrix}$$

где ζ — координата, совпадающая с направлением нормали к элементу оболочки. Если далее воспользоваться зависимостями деформационной теории [10], то

$$\{\sigma\}=[E]\{\varepsilon\} \tag{1.5}$$

$$[E]=\frac{2}{3}E_c[E_0]=\frac{2}{3}E_c\begin{Vmatrix}1+\nu_i & \nu_i\\ \nu_i & 1+\nu_i\end{Vmatrix}$$

$$E_c=\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i},\quad \sigma_i=\frac{\sqrt{2}}{2}[(\sigma_s-\sigma_\varphi)^2+\sigma_\varphi^2+\sigma_s^2]^{1/2}$$

$$\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\{(\varepsilon_s-\varepsilon_\varphi)^2+[\varepsilon_\varphi+\nu_i(\varepsilon_s+\varepsilon_\varphi)]^2+[\nu_i(\varepsilon_s+\varepsilon_\varphi)+\varepsilon_s]^2\}^{1/2}$$

$$\nu_i=\frac{1-{}^2/_9E_c/K_0}{1+{}^4/_9E_c/K_0},\quad K_0=\frac{E}{3(1-2\mu)}$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Используя выражение для перемещений элемента (1.3), найдем связь между $\{U\}$ и $\{U_*\}$:

$$\{U\}=[B]\{U_*\} \tag{1.6}$$

$$[B]=\begin{Vmatrix}b_{11} & 0 & 0 & b_{14} & 0 & 0\\ 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & b_{25} & b_{26}\\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & b_{35} & b_{36}\end{Vmatrix}$$

$$b_{11}=1-\xi,\quad b_{14}=\xi,\quad b_{22}=1-3\xi^2+2\xi^3$$

$$b_{23}=(\xi-2\xi^2+\xi^3)l,\quad b_{25}=3\xi^2-2\xi^3$$

$$b_{26}=(-\xi^2+\xi^3)l,\quad b_{32}=(-6\xi^2+6\xi^3)/l$$

$$b_{33}=1-4\xi+3\xi^2,\quad b_{35}=(6\xi-6\xi^2)/l$$

$$b_{36}=-2\xi+3\xi^2,\quad \xi=s/l$$

где l — длина образующей элемента.

Тогда выражения (1.4), (1.5) примут вид

$$\{\varepsilon\}=[D_2]\{U_*\},\quad \{\sigma\}=[E][D_2]\{U_*\},\quad [D_2]=[D_0][B] \tag{1.7}$$

Выделяя члены, не зависящие от перемещений, представим матрицу в виде суммы линейной $[D^1]$ и нелинейной $[D^2]$ матриц

$$[D_2]=[D^1]+[D^2] \tag{1.8}$$

$$[D^1]=\begin{Vmatrix}d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16}\\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26}\end{Vmatrix}$$

$$d_{1j}=d_{1j}^\circ+\zeta d_{3j}^\circ,\quad d_{2j}=d_{2j}^\circ+\zeta d_{4j}^\circ \quad (j=1-6)$$

$$d_{11}^\circ=-d_{14}^\circ=-1/l,\quad d_{12}^\circ=d_{13}^\circ=d_{15}^\circ=d_{16}^\circ=0$$

$$d_{31}^\circ=d_{41}^\circ=d_{34}^\circ=d_{44}^\circ=0,\quad d_{21}^\circ=(1-\xi)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$d_{22}^\circ=(1-3\xi^2+2\xi^3)\frac{\sin\theta}{r}$$

$$d_{23}^\circ=(\xi-2\xi^2+\xi^3)\frac{l\sin\theta}{r},\quad d_{24}^\circ=\xi\frac{\cos\theta}{r}$$

$$d_{25}^\circ=(3\xi^2-2\xi^3)\frac{\sin\theta}{r},\quad d_{26}^\circ=(-\xi^2+\xi^3)\frac{l\sin\theta}{r}$$

$$d_{32}^{\circ}=-d_{35}^{\circ}=\frac{6(1-2\xi)}{l^2},\quad d_{33}^{\circ}=\frac{2(2-3\xi)}{l}$$

$$d_{36}^{\circ}=\frac{2(1-3\xi)}{l},\quad d_{42}^{\circ}=-d_{45}^{\circ}=(6\xi-6\xi^2)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$d_{43}^{\circ}=-(1-4\xi+3\xi^2)\frac{\cos\theta}{r},\quad d_{46}^{\circ}=(2\xi-3\xi^2)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$[D^2]=\begin{Vmatrix}0 & d_{12}^1 & d_{13}^1 & 0 & d_{15}^1 & d_{16}^1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}$$

$$d_{1j}^1=\frac{1}{2}\sum_{k=2,3}^{5,6} f_{jk}q_k,\quad f_{jk}=b_{3j}b_{3k}$$

где b_{3j} — элементы матрицы $[B]$ в (1.6). Варьируя вторую зависимость (1.2) и учитывая структуру матрицы $[D_2]$, имеем

$$\{\delta\varepsilon\}=[D]\{\delta U_*\},\qquad [D]=[D^1]+2[D^2] \tag{1.9}$$

С учетом полученных выше выражений (1.7), (1.9) непосредственно из равенства (1.2) найдем

$$\{\delta U_*\}^T\{R\}=\{\delta U_*\}^T\left[\int_V [D]^T[E][D_2]dV\right]\{U_*\} \tag{1.10}$$

Отсюда получаем следующую формулу для определения матрицы жесткости элемента:

$$[K]=\int_V [D]^T[E][D_2]dV \tag{1.11}$$

Вернемся снова к уравнению (1.1). Дифференцируя (1.11) по q_j, найдем

$$\frac{\partial[K]}{\partial q_j}=2\int_V\frac{\partial[D^2]^T}{\partial q_j}[E][D_2]dV+\int_V[D]^T[E]\frac{\partial[D^2]}{\partial q_j}dV+$$
$$+\frac{2}{3}\int_V[D]^T[I][D_2]E_c\frac{\partial\nu_i}{\partial q_j}dV+\frac{2}{3}\int_V[D]^T[E_0][D_2]\frac{\partial E_c}{\partial q_j}dV \tag{1.12}$$

где $[I]$ — единичная матрица.

Подставляя (1.12) во второй член уравнения (1.1) и меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$\left[2\int_V\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial[D^2]^T}{\partial q_j}\Delta q_j[E][D_2]dV+\int_V[D]^T[E]\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial[D^2]}{\partial q_j}\Delta q_j dV+\right.$$
$$+\frac{2}{3}\int_V[D]^T[I][D_2]E_c\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\nu_i}{\partial q_j}\Delta q_j dV+$$
$$\left.+\frac{2}{3}\int_V[D]^T[E_0][D_2]\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial E_c}{\partial q_j}\Delta q_j dV\right]\{U_*\} \tag{1.13}$$

2. Перейдем к упрощению структуры выражения (1.13). С этой целью обозначим

$$[D^{2*}]=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial [D^2]^T}{\partial q_j}\Delta q_j$$

Матрица $[D^{2*}]$ имеет вид, аналогичный матрице $[D^2]$, но при определении коэффициентов $d_{1j}{}^1$ вместо величин q_j следует ввести приращения Δq_j. Далее можно показать, что

$$[D^{2*}]\{U_*\}=[D^2]\{\Delta U_*\} \tag{2.1}$$

Входящие в (1.13) физические параметры материала ν_i и E_c определяются из диаграммы растяжения $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Рассматривая их как сложные функции перемещений (через ε_i), получим

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\nu_i}{\partial q_j}\Delta q_j=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial\nu_i}{\partial\varepsilon_i}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial q_j}\Delta q_j=\frac{\partial\nu_i}{\partial\varepsilon_i}\Delta\varepsilon_i\\ \sum_{j=1}^{6}\frac{\partial E_c}{\partial q_j}\Delta q_j=\sum_{j=1}^{6}\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_i}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial q_j}\Delta q_j=\frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_i}\Delta\varepsilon_i\end{gathered} \tag{2.2}$$

Представим $\Delta\varepsilon_i$ как функцию деформаций в виде

$$\Delta\varepsilon_i=\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_s}\Delta\varepsilon_s+\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_\varphi}\Delta\varepsilon_\varphi \tag{2.3}$$

Значения производных $\partial\varepsilon_i/\partial\varepsilon_s$ и $\partial\varepsilon_i/\partial\varepsilon_\varphi$ находятся из соответствующих зависимостей в (1.5):

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_s}=\frac{1}{\varepsilon_i(1+M)}[a\varepsilon_s+b\varepsilon_\varphi]\\ \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\varepsilon_\varphi}=\frac{1}{\varepsilon_i(1+M)}[b\varepsilon_s+a\varepsilon_\varphi]\end{gathered} \tag{2.4}$$

$a={}^4/_9(1+\nu_i+\nu_i^2)$, $b={}^2/_9(-1+2\nu_i+2\nu_i^2)$

$$M=\frac{2}{9\varepsilon_i}\frac{\partial\nu_i}{\partial\varepsilon_i}(1+2\nu_i)(\varepsilon_s+\varepsilon_\varphi)^2$$

Приращения $\Delta\varepsilon_s$ и $\Delta\varepsilon_\varphi$ являются членами вектора $\{\Delta\varepsilon\}$:

$$\{\Delta\varepsilon\}=\{\Delta\varepsilon_s\Delta\varepsilon_\varphi\}=[D]\{\Delta U_*\} \tag{2.5}$$

С учетом зависимостей (2.4) и (2.5) выражение (2.3) перепишется в виде

$$\Delta\varepsilon_i=\frac{1}{\varepsilon_i(1+M)}\{U_*\}^T[D_2]^T[A][D]\{\Delta U_*\} \tag{2.6}$$

$$[A]=\begin{Vmatrix}a & b\\ b & a\end{Vmatrix}$$

Интенсивность деформаций ε_i:

$$\varepsilon_i=\frac{2}{9\varepsilon_i}\{(\varepsilon_s-\varepsilon_\varphi)^2+[\varepsilon_\varphi+\nu_i(\varepsilon_s+\varepsilon_\varphi)]^2+[\nu_i(\varepsilon_s+\varepsilon_\varphi)+\varepsilon_s]^2\} \tag{2.7}$$

если воспользоваться формулами (1.7), можно преобразовать к виду

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\varepsilon_i}\{U_*\}^T[D_2]^T[A][D_2]\{U_*\} \tag{2.8}$$

Из анализа выражений (2.6) и (2.8) можно показать, что

$$\frac{\varepsilon_i}{1+M}[D]\{\Delta U_*\} = \Delta\varepsilon_i[D_2]\{U_*\} \tag{2.9}$$

Наконец, на основании выражений, входящих в (1.5), будем иметь

$$\frac{\partial\nu_i}{\partial\varepsilon_i} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\varepsilon_i}\frac{E_k-E_c}{K_0(1+{}^4/_9E_c/K_0)^2}, \quad \frac{\partial E_c}{\partial\varepsilon_i} = \frac{E_k-E_c}{\varepsilon_i} \tag{2.10}$$

Полученные выше зависимости позволяют упростить выражение (1.13), представив его в следующем виде:

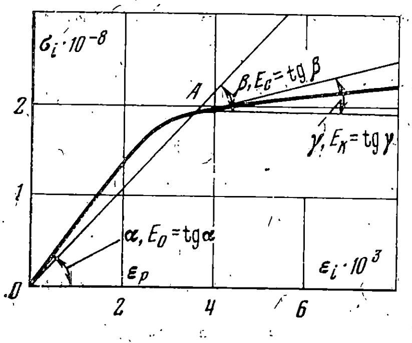
$$\left[2\int_V [D^{2*}]^T[E][D_2]dV\right]\{U_*\} + \left[\int_V [D]^T[E][D^2]dV + \right.$$
$$+\frac{4}{9}\int_V [D]^T[I][D]E_c\frac{(E_k-E_c)dV}{(1+M)K_0(1+{}^4/_9E_c/K_0)^2} + \tag{2.11}$$
$$\left. +\frac{2}{3}\int_V [D]^T[E_0][D]\frac{E_k-E_c}{1+M}dV\right]\{\Delta U_*\}$$

Подставив (2.11) вместо второго члена уравнения (1.1) и воспользовавшись формулой (1.11) для определения матрицы $[K]$, получаем окончательный вид уравнений равновесия конечного элемента оболочки

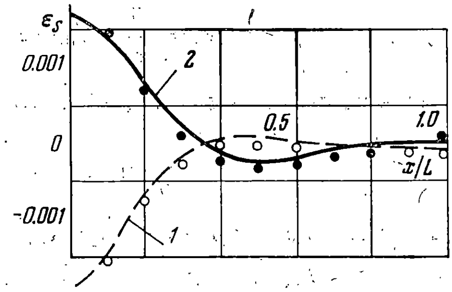
$$[K_*]\{\Delta U_*\} = \{\Delta P\} + \{\Delta Q\}, \quad [K_*] = [K_1] + [K_2] \tag{2.12}$$
$$[K_1] = \int_V [D]^T[E][D]N\,dV, \qquad N = \frac{E_k+ME_c}{(1+M)E_c}$$
$$[K_2] = \frac{4}{9}\int_V [D]^T[I][D]E_c\frac{(E_k-E_c)dV}{(1+M)K_0(1+{}^4/_9E_c/K_0)^2}$$
$$\{\Delta Q\} = -2\left[\int_V [D^{2*}]^T[E][D_2]dV\right]\{U_*\} = -2\int_V [D^{2*}]^T\{\sigma\}dV$$

Следует заметить, что полученная система уравнений не накладывает каких-либо ограничений на вид диаграммы деформирования материала $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Кроме того, структура уравнений (2.12) достаточно проста и наглядна и в частных случаях может быть упрощена. Так, член $\{\Delta Q\}$ представляет известную из нелинейного анализа матрицу начальных напряжений, которая учитывается обычно в задачах устойчивости или при больших (порядка E_c) значениях напряжений. В задачах изгиба этим членом можно пренебречь. При учете только геометрической нелинейности коэффициент $M=0$, а также матрица $[K_2]=0$.

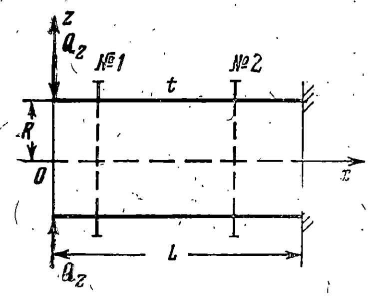
3. Полученные зависимости были положены в основу при разработке алгоритма и программы метода конечных элементов (применительно к ЭВМ типа «Минск»).



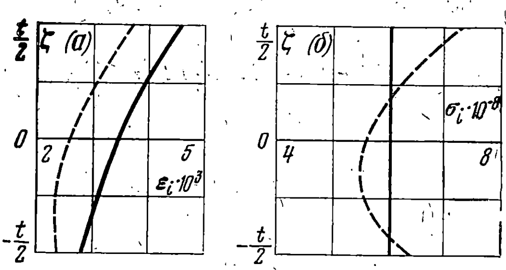
Фиг. 3



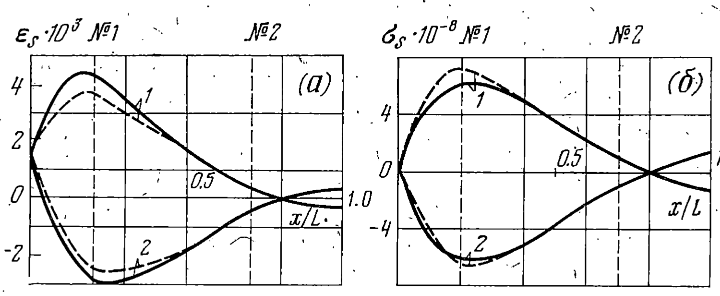
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 7



Фиг. 6

для расчета оболочек вращения с учетом физической и геометрической нелинейности. При этом реализована процедура шагового нагружения с самокоррекцией. Кроме того, параллельно предусмотрена возможность итераций по Ньютону – Рафсону через любое наперед заданное число шагов нагружения. Расчет в упругопластической области основан на реальной диаграмме деформирования материала $\sigma_i(\varepsilon_i)$; учитывается сжимаемость материала. Представление оболочки набором конечных элементов (конических, в пределе переходящих в цилиндр и круглую пластину с вырезом) позволяет рассматривать оболочку любой сложной формы, включая поперечные ребра и переборки, при произвольной внешней нагрузке и условиях закрепления. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов по указанной программе.

1. Гладкая цилиндрическая оболочка, один торец которой заделан по перемещениям u и w, загружена по другому торцу моментом интенсивностью $M_0=245$ Н. Параметры оболочки: $R_0=0.3$ м, $t/R_0=0.001$, $l/R_0=0.5$, $E=0.650\cdot10^{11}$ Н/м², $\mu=0.3$. При этом использована диаграмма $\sigma_i(\varepsilon_i)$, представленная на фиг. 3 ($E_0=0.65\cdot10^{11}$ Н/м², $\varepsilon_p=0.002$).

Результаты расчета (при числе элементов $N=16$) приведены на фиг. 4. Показано распределение по длине оболочки деформаций ε_s, соответствующих наружной (кривая 1) и внутренней (кривая 2) поверхности оболочки в линейной (пунктир) и нелинейной (сплошная линия) постановке задачи. Для сравнения на этом же графике нанесены результаты расчета (светлые точки – линейное, темные точки – нелинейное) данной оболочки по методу конечных разностей (МКР) [9]. Как видно, согласование результатов по разным методам вполне удовлетворительное. Некоторое различие результатов может быть отнесено за счет разных диаграмм $\sigma_i(\varepsilon_i)$, используемых в расчетах, и того, что в [9] не учтена сжимаемость материала.

2. Цилиндрическая оболочка, подкрепленная поперечными ребрами, загружена в торцевом сечении поперечной силой $Q_z=0.48\cdot10^6$ Н/м (фиг. 5). Другой торец оболочки жестко заделан ($u=0$, $w=0$, $\beta=0$). Параметры оболочки: $R=4.9$ м, $t/R=0.00815$, $L/R=0.225$ $F/Rt=0.045$ (F – площадь сечения ребра), $E=2\cdot10^{11}$ Н/м², $\mu=0.3$. При расчете в упругопластической области использована диаграмма типа, изображенного на фиг. 3, при $E_0=2.3\cdot10^{11}$ Н/м², $\varepsilon_p=0.002$, $\sigma_p=0.46\cdot10^9$ Н/м².

На фиг. 6, *а*, *б* представлено распределение по длине оболочки деформаций ε_s и напряжений σ_s в Н/м² для наружной (кривая *1*) и внутренней (кривая *2*) поверхностей оболочки в линейной (пунктир) и нелинейной постановках задачи. Кроме того, для наиболее напряженного сечения – у ребра № 1 на фиг. 7 показано распределение интенсивностей напряжений σ_i и деформаций ε_i по толщине оболочки. Видно, что учет нелинейных факторов дает поправку к решению до 30%, хотя пластические деформации в оболочке невелики ($\varepsilon_i<3\varepsilon_p$), и диаграмма $\sigma_i(\varepsilon_i)$ обладает значительным упрочнением.

При решении рассмотренных задач оказалось также возможным внести упрощение в уравнения (2.12). Так, член $\{\Delta Q\}$ вносит поправку к решению, лежащую в пределах точности расчетов (меньше 2%), и им можно пренебречь. Кроме того, значение коэффициента $\bar{M}$ пренебрежимо мало по сравнению с единицей, и отсюда можно принять $N=E_k/E_c$.

Поступила 11 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haisler W. E., Stricklin J. A., Stebbins F. J.* Development and evaluation of solution procedures for geometrically non-linear structural analysis. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 3. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1972, № 3.)
2. *Stricklin J. A., Haisler W. E., Riesemann W. A.* Evaluation of solution procedures for material and/or geometrically non-linear structural analysis. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 1. (Русс. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1973, № 3.)
3. *Marcal P. V.* A comparative study of numerical methods of elastic-plastic analysis. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 1 (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1968, № 1.)
4. *Постнов В. А., Хархурим И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л., «Судостроение», 1974.
5. *Постнов В. А.* Численные методы расчета судовых конструкций. Л., «Судостроение», 1977.
6. *Dupuis G. A., Hibbit H. D., McNamara S. F., Marcal P. V.* Non-linear material and geometric behavior of shell structures. Computers and Structures, 1971, vol. 1, No. 1–2, p. 223–239.
7. *Угодчиков А. Г., Коротких Ю. Г., Капустин С. А., Санков Е. И., Паутов А. Н.* Численный анализ квазистатических упругопластических задач оболочек и пластин. Тр. 9-й Всес. конференции по теории оболочек и пластин. Л., «Судостроение», 1975, стр. 334–340.
8. *Marcal P. V.* Large deflection analysis of elastic-plastic shells of revolution. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 9 (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 9).
9. *Чернышенко И. С.* Упругопластический прогиб цилиндрической оболочки с учетом конечных прогибов. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 2.
10. *Ильюшин А. А.* Пластичность. М.– Л., Гостехиздат, 1948.
11. *Капустин С. А., Коротких Ю. Г.* О применении метода последовательных нагружений и сходимости метода переменных параметров упругости при решении упругопластических задач. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1969, вып. 89.
12. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.– М., Гостехиздат, 1948.