

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ
И ФИЗИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ ОБОЛОЧЕК

А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

(Москва)

Замкнутые поверхности или поверхности с закрепленными определенным образом краями в дифференциальной геометрии называются жесткими, если они не могут испытывать нетривиальных изгибаний, т. е. деформаций, отличных от жесткого смещения и не сопровождающихся изменением длин и углов между лежащими на поверхности линиями. Тонкая оболочка является материальной моделью поверхности, а изгибание представляет собой деформацию, по отношению к которой оболочка наиболее податлива. Поэтому естественно было бы ожидать, что описанное выше понятие математической жесткости поверхности близко к понятию физической жесткости соответствующей оболочки. Однако если сравнить с этой точки зрения теоремы теории изгибаний поверхностей с результатами, известными в теории оболочек, то в ряде случаев обнаруживаются существенные противоречия.

В предлагаемой работе показывается, что несоответствие между математической и физической жесткостью устраняется, если обобщить понятие изгибаний, введя в рассмотренное псевдоизгибание [1], т. е. деформации, в определенном смысле близкие к изгибаниям.

Кроме того, обсуждается вопрос об асимптотическом влиянии виртуальных (допускаемых условиями закрепления) псевдоизгибаний на деформативность оболочки и на ее поведение при колебаниях и потере устойчивости.

1. Линейная задача построения напряженно-деформированного состояния тонкой упругой оболочки сводится к минимизации функционала [2]:

$$Q = \iint (\varepsilon_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}) dF - 2 \iint (v_\alpha X^\alpha + wx) dF \quad (1.1)$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$ — тензоры тангенциальных и изгибных деформаций; $T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}$ — тензоры тангенциальных усилий и моментов; v_α, w — тензор тангенциальных перемещений и прогиб; X^α, x — тензор тангенциальных составляющих и нормальная составляющая внешней поверхности нагрузки; F — площадь срединной поверхности; ковариантные и контрвариантные индексы принимают значения 1, 2. Предполагается, что граничные условия однородны и отвечают случаю, когда работа краевых сил оболочки равна нулю.

Высказанное утверждение строго правильно только тогда, когда уравнения состояния подобраны так, чтобы в теории оболочек выполнялись основные общие теоремы теории упругости [3] (гл. 5, § 32). Такие варианты уравнений состояния существуют, но они громоздки, и ниже при асимптотических оценках эти соотношения будем принимать в простейшем виде:

$$T^{\alpha\beta} = B (a^{\alpha m} a^{\beta n} + \nu c^{\alpha m} c^{\beta n}) \varepsilon_{mn} \quad (1.2)$$

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{3} B h^3 (a^{\alpha m} a^{\beta n} + \nu c^{\alpha m} c^{\beta n}) \mu_{mn}, \quad B = 2Eh / (1 - \nu^2)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, h — полутолщина, a_{pq} — метрический тензор, c_{pq} — дискриминантный тензор

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = -c_{21} = [a_{11}a_{22} - (a_{21})^2]^{1/2}$$

2. Введем понятие об эталонном деформированном состоянии P_0 . Под этим подразумевается деформированное состояние некоторой оболочки с простой геометрией срединной поверхности (например, неполюгий сегмент сферы), нагруженной «спокойной» поверхностной нагрузкой (X^α, x) и закрепленной так, что всюду, включая край, P_0 — безмоментно. Это значит, что величины, определяющие эталонное деформированное состояние, имеют вид

$$T_0^{mn} \sim RX, \quad M_0^{mn} \sim \theta^2 R^2 X \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{mn}^0 \sim \frac{RX}{B}, \quad \mu_{mn}^0 \sim \frac{X}{B}, \quad (v_m^0, w^0) \sim \frac{R^2 X}{B}$$

где (\sim) — знак соизмеримости, R — характерный радиус кривизны срединной поверхности, X — характеристическая интенсивность наибольшей компоненты (X^α, x) , а малый параметр $\theta = h/R$.

Основная цель исследования будет заключаться в том, чтобы сравнить эталонную деформацию с реальной деформацией, получающейся при решении более сложных задач.

Введем обозначения

$$I_\varepsilon = \frac{1}{F} \iint (a^{\alpha m} a^{\beta n} + \gamma c^{\alpha m} c^{\beta n}) \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{mn} dF \quad (2.2)$$

$$I_\mu = \frac{1}{F} \iint (a^{\alpha m} a^{\beta n} + \gamma c^{\alpha m} c^{\beta n}) \mu_{\alpha\beta} \mu_{mn} dF$$

$$I_q = \frac{1}{F} \iint (v_s X^s + wx) dF$$

и перепишем эти формулы так:

$$I_\varepsilon = \theta^{-2\gamma + \kappa} \frac{R^2 X^2}{B^2} A_\varepsilon, \quad I_\mu = \theta^{-2\gamma - 4p} \frac{X^2}{B^2} A_\mu, \quad I_q = \theta^{\beta - \gamma} \frac{R^2 X^2}{B} A_q \quad (2.3)$$

Здесь $A_\varepsilon, A_\mu, A_q$ — функционалы, соизмеримые с единицей и зависящие от конкретного вида рассматриваемой деформации, p — показатель изменчивости, а γ, κ и β — числа, определяющие асимптотику (при $\theta \rightarrow 0$) величин (2.2).

Будем отмечать звездочкой величины, задающие реальную деформацию оболочки, и рассмотрим случай, когда

$$(v_m^*, w^*) \sim \theta^{-\gamma} \frac{R^2 X}{B}, \quad \varepsilon_{mn}^* \sim \theta^{\kappa/2} \frac{RX}{B}, \quad \mu_{mn}^* \sim \theta^{-\gamma - 2p} \frac{X}{B} \quad (2.4)$$

В этих формулах число γ характеризует асимптотическое увеличение смещений, число κ характеризует близость реальной деформации к изгибанию, т. е. асимптотическое уменьшение значений компонент тангенциальной деформации по сравнению с теми значениями, которые они имели бы, если считать, что $R\varepsilon_{mn}^* \sim (v_m, w)$; множитель θ^{-2p} учитывает асимптотическое увеличение компонент μ_{mn} , связанное с высокой изменчивостью реальной деформации и с тем, что w^* в выражении μ_{mn} дифференцируется дважды.

В формулах (2.2) величины I_ε, I_μ обращаются в нуль тогда и только тогда, когда тождественно исчезают все компоненты $\varepsilon_{mn}, \mu_{mn}$ соответственно; следовательно, γ и κ для деформации вида (2.4) имеют в формулах (2.3) и (2.4) одинаковый смысл. Эти числа назовем показателем деформативности и показателем псевдоизгибаний соответственно. Величина I_q

определяет работу сил (X^α, x) на перемещениях (v_m, w) . Если задать (X^α, x) , а закон изменения (v_α, w) варьировать, не изменяя их характерную интенсивность, то I_q может существенно уменьшиться или обратиться в нуль, но не может существенно увеличиться. Поэтому число β назовем показателем работы и будем считать, что $\beta \geq 0$.

В конкретных задачах свойства реальной деформации P^* могут быть и более сложными. Например, могут возникнуть местные упругие явления большой интенсивности. Тогда смысл чисел γ, κ, β изменится. Однако на дальнейшие формально асимптотические рассуждения это не повлияет, и при истолковании получаемых результатов будут условно приниматься формулы (2.4), а числа γ, κ, β будут рассматриваться соответственно как характеристики осредненной интенсивности P^* , близости P^* к изгибаниям и малости работы внешних сил на перемещениях P^* . Как и в [1], назовем деформацию, для которой $\kappa > 0$, псевдоизгибанием, а под истинным изгибанием или просто изгибанием будем понимать псевдоизгибание $\kappa = \infty$, т. е. деформацию, для которой все компоненты ϵ_{mn} точно равны нулю.

3. В обозначениях п. 2 функционал (1.1) записывается так:

$$Q = \frac{FR^2X^2}{B} \left(\theta^{-2\gamma+\kappa} A_\epsilon + \frac{1}{3} \theta^{2-2\gamma-4p} A_\mu - 2\theta^{\beta-\gamma} A_q \right) \quad (3.1)$$

а равенство, выражающее теорему Клайперона, приобретает вид

$$\theta^{-2\gamma+\kappa} A_\epsilon^* + \frac{1}{3} \theta^{2-2\gamma-4p} A_\mu^* = \theta^{\beta-\gamma} A_q^* \quad (3.2)$$

(звездочка обозначает, что соответствующий функционал вычислен для истинной деформации).

Принято, что A_ϵ, A_μ, A_q соизмеримы единице. Кроме того, из составления (2.3) с (2.4) вытекает, что A_ϵ, A_μ положительны. Поэтому при достаточно малом θ равенство (3.2) может выполняться только тогда, когда

$$\gamma = \min(\kappa; 2-4p) - \beta \quad (3.3)$$

В противоположном случае (3.2) будет приближенно сводиться к одному из четырех равенств: $A_\mu^* = 0, A_\epsilon^* + A_\mu^* = 0, A_q^* = 0, A_\epsilon^* = 0$, ни одно из которых не совместимо со свойствами величин A_ϵ, A_μ, A_q .

Сопоставив (3.1) с (3.2) и приняв во внимание (3.3), получим для Q^* (минимального значения функционала Q) формулу

$$Q^* = - \frac{FR^2X^2}{B} \theta^{-\kappa+2\beta} A_q^* \quad \text{при } \kappa \leq 2-4p$$

$$Q^* = - \frac{FR^2X^2}{B} \theta^{-2+4p+2\beta} A_q^* \quad \text{при } \kappa \geq 2-4p \quad (3.4)$$

4. Псевдоизгибание π для заданной нагрузки q назовем существенным, если на перемещениях π показатель работы подчиняется требованию

$$0 \leq 2\beta < \min(\kappa; 2-4p) \quad (4.1)$$

Замечание 4.1. Псевдоизгибание с достаточно большим показателем изменяемости (а именно, при $p \geq 1/2$) для любой внешней нагрузки не является существенным, так как при таких p требование (4.1) невыполнимо.

Пусть оболочка ограничена краем (здесь и ниже, если не оговорено противоположное, считается, что край может состоять из нескольких замкнутых линий), на котором должны выполняться четыре граничных условия, заключающихся либо в требовании отсутствия перемещений (каждое

такое условие назовем закреплением), либо в требовании отсутствия реакций. Если срединная поверхность такой оболочки не имеет виртуальных (согласованных со всеми закреплениями) псевдоизгибаний, то, положив $\kappa=0$ в (3.3), (3.4), получим

$$Q^* = -\frac{FR^2X^2}{B}A_q^*\theta^a, \quad a \geq 0, \quad \gamma \leq 0 \quad (4.2)$$

Замечание 4.2: Формула (4.2) будет вытекать из (3.4) и в том случае, когда есть согласованные с закреплениями псевдоизгибания, но они не являются существенными, т. е. когда нарушается неравенство (4.1).

Наоборот, если закрепления оболочки и характер ее загрузки допускают существенные псевдоизгибания, то из (3.3), (3.4); (4.1) вытекает, что на соответствующих перемещениях будет достигаться более сильный минимум, при котором

$$Q^* = -FR^2X^2A_q^*\theta^a/B, \quad a < 0, \quad \gamma > 0$$

Заметим, что если определено некоторое псевдоизгибание π , то можно построить и целый класс присоединенных псевдоизгибаний $\pi' = \pi + \delta\pi$, таких, что каждое из них в интегральном смысле мало отличается от π . Для этого необходимо под $\delta\pi$ подразумевать деформации, дающие малый интегральный вклад, т. е. либо требовать, чтобы $\delta\pi$ всюду в рассматриваемой области были малы по сравнению с π , либо требовать, чтобы $\delta\pi$, будучи соизмеримы с π на некоторой линии ρ , достаточно быстро затухали при удалении от ρ (в дальнейшем в подобных случаях будем для краткости говорить, что две деформации почти всюду мало отличаются одна от другой). Поскольку здесь рассуждения основываются на оценках интегралов (2.2) различие между π и π' несущественно. Поэтому можно принять следующее *предположение*.

Если при данных закреплениях и данном характере внешней нагрузки оболочка имеет существенные виртуальные псевдоизгибания π , то истинные перемещения, минимизирующие Q , будут почти всюду мало отличаться от перемещений одного из π , а деформативность оболочки станет асимптотически больше эталонной деформативности.

Такое утверждение можно было бы считать очевидным, если бы удалось показать, что присоединенные псевдоизгибания можно подчинить не только требованиям, определяющим закрепления, но и всем четырем (в том числе и статическим) условиям теории оболочек¹.

5. Будем считать, что некоторое напряженно-деформированное состояние P оболочки вызвано поверхностной нагрузкой N (с показателем изменности ν), и обсудим влияние ν на асимптотику P .

Пусть оболочка имеет виртуальные псевдоизгибания π , и их полная совокупность определяется формулой

$$\pi' = \sum_{k=1}^K C_k (\pi_k + \delta\pi_k) \quad (C_k = \text{const}) \quad (5.1)$$

Это значит, что существует конечное число K таких линейно-независимых порождающих псевдоизгибаний π_k , из которых любое π' может быть получено как линейная комбинация присоединенных псевдоизгибаний $\pi_k' = \pi_k + \delta\pi_k$. Будем считать, кроме того, что среди π_k' при любом k есть и такие, которые удовлетворяют всем граничным условиям задачи.

Каждому π_k при фиксированном N соответствуют свои показатели изменности (p_k), псевдоизгибания (κ_k) и работы (β_k). Эти величины сохра-

¹ Объем данной работы не позволяет обсудить этот вопрос со всей полнотой.

няют свой смысл и для соответствующих присоединенных псевдоизгибаний π_k' (п.4).

Обозначим через p, κ, β такие значения p_k, κ_k, β_k , которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \kappa - 2\beta &= \max(\kappa_k - 2\beta_k) \quad \text{при } \kappa_k \leq 2 - 4p_k \\ 2 - 4p - 2\beta &= \max(2 - 4p_k - 2\beta_k) \quad \text{при } \kappa_k \geq 2 - 4p_k \end{aligned} \quad (5.2)$$

и будем считать, что они выполняются при $k=r$. Тогда, очевидно, сохраняют силу утверждения п.4, но теперь их необходимо относить к псевдоизгибанию π_r .

Из результатов, изложенных в [4], следует, что оболочка положительной кривизны со свободным от закреплений краем имеет бесчисленное множество истинных виртуальных псевдоизгибаний. В (5.1) последовательность $\{\pi_k\}$ бесконечна. Это не изменяет сделанных выводов. Составляя линейные комбинации из π_k , можно упорядочить эту бесконечную последовательность таким образом, чтобы в ней p_k возрастало вместе с k . Тогда при достаточно большом k условие (4.1) будет заведомо нарушаться и в $\{\pi_k\}$ можно будет оставить только конечное число первых элементов.

Примем теперь, что закрепления оболочки не допускают псевдоизгибаний. Тогда отпадут асимптотические соображения (п.4), показывающие, что минимум Q достигается в относительно узком классе деформаций, являющихся виртуальными псевдоизгибаниями. Поэтому значения, принимаемые показателями работы β , становятся более «свободными». Вместе с тем из формул (3.4) вытекает, что минимум функционала Q с уменьшением показателя работы β становится более сильным и естественно принять второе предположение.

Если оболочка не имеет существенных виртуальных псевдоизгибаний, то истинной будет та деформация, для которой показатель работы β равен нулю, т. е. принимает наименьшее из допустимых значений.

Рассмотрим интеграл

$$W = \int_0^l \sin sx \sin tx \, dx = \frac{\sin(s-t)l}{2(s+t)} - \frac{\sin(s+t)l}{2(s-t)} \quad (s \neq t) \quad (5.3)$$

и будем считать, что он представляет работу сил $\sin sx$ на перемещениях $\sin tx$.

Для больших s и t числа σ и τ , определенные равенствами $s = \theta^{-\sigma}$, $t = \theta^{-\tau}$, являются показателями изменчивости сил и перемещений соответственно. Из (5.3) тогда следует

$$W = O(\theta^{-\sigma}) \quad \text{при } \sigma < \tau, \quad W = O(\theta^{-\tau}) \quad \text{при } \tau > \sigma, \quad W = O(\theta^0) \quad \text{при } \sigma = \tau \quad (5.4)$$

Здесь символ O использован потому, что в конкретных случаях в последней части (5.3) могут исчезнуть главные слагаемые.

Примем, что если силы и перемещения подобны по характеру изменчивости, в частности, если они имеют попарно одинаковые направления относительно медленного и относительно быстрого изменения, то свойства работы, выраженные равенствами (5.4), можно обобщить на случай двумерных областей и считать, что показатель работы β выражается следующими соотношениями:

$$\beta \geq \max(\sigma, \tau) \quad \text{при } \sigma \neq \tau, \quad \beta = 0 \quad \text{при } \sigma = \tau \quad (5.5)$$

где σ, τ — общие (наибольшие) показатели изменчивости сил и перемещений.

В первом из этих соотношений знак равенства соответствует общему случаю, когда показатель работы β определяется только различием изменяемости сил и перемещений, а знак неравенства может иметь место, когда силы и перемещения обладают некоторыми специфическими свойствами, например когда они ортогональные.

Так как β — интегральная характеристика, то требования $\sigma \neq \tau$ или $\sigma = \tau$ в узких зонах могут нарушаться.

Из (5.5) вытекает, что β может принимать нулевое значение только тогда, когда показатели изменяемости внешних сил и перемещений почти всюду равны. Поэтому в качестве следствия из второго предположения сформулируем третье предположение.

Если существенные виртуальные псевдоизгибания отсутствуют, то показатель изменяемости напряженного состояния такой оболочки почти всюду совпадает с показателем изменяемости вызвавшей их внешней нагрузки N (считается, что N достаточно однородна по изменяемости и последняя может быть задана одним числом ν).

При этом показатель деформативности γ определяется формулой (3.3), в которой надо положить $\kappa = \beta = 0$, $p = \nu$.

В [3] (Приложение) краевая задача статической теории оболочек рассмотрена при помощи методов асимптотического интегрирования и сформулированные там (§ 16) выводы подтверждают третье предположение. А именно показано, что общие (наибольшие) показатели изменяемости для нагрузки и перемещений совпадают всюду, кроме, быть может, зон действия простых краевых эффектов. Надо заметить, что в [3] общность задачи была ограничена предположением, что края оболочки нигде не касаются асимптотических линий срединной поверхности. Вместе с тем выводы из проведенных в [3] исследований более детализированы. Там, в частности, устанавливается, что при известных обстоятельствах асимптотические линии срединной поверхности определяют направления относительно медленной изменяемости напряженно-деформированного состояния оболочки. Ниже выяснится, что в рамках предлагаемого подхода это также имеет объяснение.

Если закрепления оболочки допускают существенные псевдоизгибания, то деформация срединной поверхности будет почти всюду совпадать с одним из них и равенство показателей изменяемости нагрузки и перемещений, вообще говоря, нарушится.

Этот случай не выявился в [3], так как там не были до конца рассмотрены конкретные условия, встречающиеся в теории оболочек.

6. Сформулируем некоторые условия существования (отсутствия) псевдоизгибаний, выведенные в [1], и сравним их с известными в теории поверхностей условиями существования (отсутствия) истинных изгибаний. Для краткости поверхность с закрепленным некоторым образом краем будем называть математически жесткой, если она не имеет виртуальных истинных изгибаний, и физически жесткой, если у нее нет виртуальных псевдоизгибаний.

6.1. Овалоид (замкнутая, ограниченная, достаточно гладкая поверхность всюду положительной кривизны), а также любая часть овалоида, все точки края которой закреплены в обоих тангенциальных направлениях, обладает как математической, так, вообще говоря, и физической жесткостью (см. § 9).

6.2. Если поверхность S представляет собой часть овалоида и все точки края S принадлежат либо участкам l_1 , закрепленным в обоих тангенциальных направлениях, либо участкам l_2 , свободным в обоих тангенциальных направлениях, то, каковы бы ни были отличные от нуля суммарные длины d_1 и d_2 участков l_1 и l_2 , S обладает математической жесткостью, но не обладает физической жесткостью.

Показано [1], что если на краю есть только один свободный участок l_2 и он достаточно мал, то порождаемое им псевдоизгибание локализовано вблизи l_2 . При этом работа внешних сил будет мала и показатель работы β может выйти за пределы условия (4.1), т. е. псевдоизгиба-

ние λ , вообще говоря, будет несущественным. Это значит, что освобождение от закреплений малого участка края вызывает лишь местное ослабление оболочки, не фиксируемое обсуждаемыми «глобальными» характеристиками. Наоборот, если закреплен лишь один достаточно малый участок λ_1 края, то обусловленная этим математическая жесткость не поведет к существенному уменьшению деформативности оболочки, так как показано, что в этом случае можно построить бесчисленное количество глобальных псевдоизгибаний [1], среди которых заведомо найдутся и существенные.

Таким образом, несмотря на кажущуюся парадоксальность, утверждение 6.2 вполне согласуется с привычными механическими представлениями.

7. Если край g некоторой поверхности S неасимптотический и на нем осуществлены как тангенциальные, так и нетангенциальные закрепления, причем взятые в отдельности тангенциальные закрепления не обеспечивают математической жесткости S , то все закрепления в совокупности могут обеспечить только математическую, но не физическую жесткость S . Схема обоснования этого утверждения заключается в следующем [1].

Пусть существует тангенциально возможное (совместное только с тангенциальными закреплениями) истинное изгибание π . Тогда, прибавив к π деформацию χ_g , локализованную вблизи g и определяемую в основном нормальными прогибами, можно построить присоединенное псевдоизгибание π' , согласованное со всеми, в том числе и нетангенциальными закреплениями. При этом очевидно, что если истинное изгибание π глобально, то и присоединенное псевдоизгибание π' будет также глобальным.

Обсуждаемое утверждение означает, что с точки зрения возможности появления псевдоизгибаний краевые нетангенциальные закрепления неполноценны. Оказывается, что такая неполноценность сохраняется также для внутренних закреплений, под которыми можно подразумевать, например, эффект действия одной части поверхности на другую (вдоль воображаемого разреза). Рассуждения, подтверждающие это, приведены в [1] при обсуждении свойств тора. Пополним их рассмотрением поверхностей, имеющих ребра.

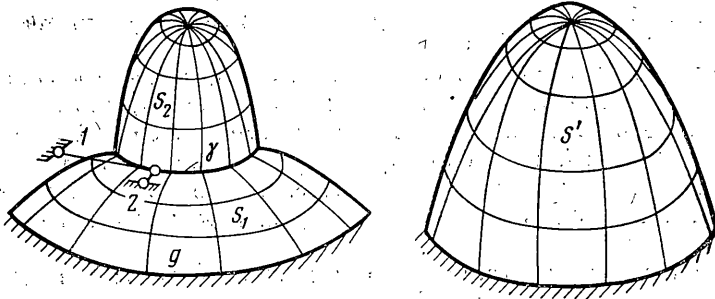
Пусть поверхность S имеет замкнутое ребро γ , разделяющее ее на две части S_1, S_2 ; всюду, кроме γ , кривизна S положительна. Край g поверхности S представляет собой замкнутую кривую, целиком расположенную на S_1 , и закреплен в обоих тангенциальных направлениях (см. фигуру).

В силу утверждения 6.2 часть S_2 обладает математической жесткостью. Поэтому если речь идет об истинных изгибаниях, то поверхность S_1 по отношению к поверхности S_2 можно рассматривать как жесткую во всех направлениях опору. Отсюда следует, что в соответствии с утверждением 6.2 поверхность S_1 , а вместе с ней и S также обладают математической жесткостью.

Если построению подлежат псевдоизгибания, то на ребре γ жесткость поверхности S_1 надо считать полноценной лишь в тангенциальных (для S_1) направлениях, изображенных на фигуре в некоторой точке A контура γ при помощи условных стерженьков 1 и 2. По отношению к поверхности S_2 тангенциальным является лишь закрепление, изображаемое стерженьком 1. Поэтому, игнорируя нетангенциальные закрепления, S_2 надо рассматривать как куполообразную поверхность с одним тангенциальным закреплением на крае. Показано [3] (гл. 17, § 31), что такие поверхности имеют три линейно-независимые тангенциально возможные истинные изгибания λ_k , которые не являются истинными изгибаниями для S , поскольку они не удовлетворяют всем условиям сопряжения на γ .

Однако получающиеся неувязки можно устранить, прибавив к λ_k деформации вида χ_γ с обеих сторон от γ , и получить искомые проявляющиеся в основном в S_2 псевдоизгибания, так как интегральный вклад от деформаций χ_γ невелик. Гладкая поверхность S' , подобная S (фигура), псевдоизгибаний не имеет в силу утверждения 6.1. Следовательно, найденная деформация является псевдоизгибанием, порожденным наличием ребра γ .

8. Ограниченную поверхность неположительной кривизны можно сделать математически жесткой, закрепив соответствующим образом ее край. Однако физически жесткой такую поверхность сделать нельзя. В [1] показано, что существуют определенного вида псевдоизгибания π , относительно медленно меняющиеся вдоль кривых ξ некоторого семейства асимптотических линий и быстро изменяющиеся ортогонально к кривым ξ (в оболочках отрицательной кривизны каждому из двух семейств асимптотических линий соответствует свое семейство псевдоизгибаний π). Показано также, что π можно подчинить любым граничным условиям



теории оболочек. Поэтому поставленный в п. 4 вопрос о построении присоединенных псевдоизгибаний в данном случае отпадает и первое предположение (п. 4) не требует дополнительной аргументации.

Существование псевдоизгибаний вида π означает, что оболочки неположительной кривизны при известных обстоятельствах могут оказаться асимптотически более деформативными, чем сопоставимые с ними оболочки положительной кривизны. Остановимся на этом подробнее, начав со случая, когда кривизна K срединной поверхности равна нулю.

В [1] показано, что при $K=0$ для псевдоизгибаний π справедливо соотношение

$$\varepsilon_{mn} \sim \theta^{2p}(v_m, w) \quad (8.1)$$

где p — общий показатель изменчивости, определяющий поведение π в ортогональном к асимптотическим линиям направлении. Отсюда при помощи (2.2) — (2.4) получаем для показателя псевдоизгибания π формулу $\kappa=4p$.

Ограничимся случаями, когда внешняя поверхностная нагрузка (X^α, x) подобна по характеру изменчивости псевдоизгибаниям π , т. е. имеет положительный показатель изменчивости ξ лишь в неасимптотических направлениях. Тогда β — показатель работы сил (X^α, x) на перемещениях π выразится согласно (5.5) так:

$$\beta \geq \max(p, \xi) \quad \text{при } p \neq \xi, \quad \beta = 0 \quad \text{при } p = \xi \quad (8.2)$$

Обозначим через Q_π значение функционала Q , вычисленного для псевдоизгибания π . Тогда при помощи (3.4), учитывая, что $\mu=4p$, можно написать оценку

$$Q_\pi \sim -\theta^a \quad (8.3)$$

$$a(p) = -4p + 2\beta \quad \text{при } p \leq 1/4, \quad a(p) = -2 + 4p + 2\beta \quad \text{при } p \geq 1/4$$

Это значит, что если среди псевдоизгибаний π существуют такие, для которых в (8.3) число a отрицательно, то для них Q_π асимптотически меньше любого Q , вычисленного для деформации, не являющейся псевдоизгибанием, и истинная деформация почти всюду будет совпадать с псевдоизгибанием π , соответствующим минимальному a (конечно, предпола-

гается, что не существует других псевдоизгибаний, сообщающих Q более сильный минимум).

Учитывая (8.2), получаем, что при $p=\xi$, когда надо положить $\beta=0$, $\min a=a(1/4)=-1$, и можно проверить, что ни при каких p и ξ нельзя уменьшить a . Отсюда следует, что если оболочка нулевой кривизны подвержена действию поверхностных сил, медленно меняющихся вдоль асимптотических линий и быстро меняющихся ортогонально к ним (с показателем ξ), то истинная деформация оболочки будет почти всюду близка к обсуждаемым здесь псевдоизгибаниям λ , имеющим такой же общий показатель изменчивости, как и нагрузка. При этом деформативность оболочки будет асимптотически больше эталонной, а показатель деформативности, определяемый по формуле (3.3), достигнет наибольшего значения ($\gamma=1$) при $\xi=1/4$.

Если $K<0$, то, согласно [1], формула (8.1) примет вид $\varepsilon_{mn} \sim \theta^2(v_m, w)$. Поэтому получим

$$\mu=2p, \quad a=-2p+2\beta \quad \text{при } p \leq 1/3$$

$$a=-2+4p+2\beta \quad \text{при } p \geq 1/3, \quad \min a=a(1/3)=-2/3$$

и максимальное асимптотическое повышение деформативности будет характеризоваться формулой $\gamma=2/3$.

Таким образом, для произвольно закрепленных оболочек неположительной кривизны характерна повышенная деформативность, проявляющаяся, однако, в полной мере только при нагрузке специального вида.

9. Если конечная замкнутая поверхность обладает математической жесткостью и содержит одну или несколько замкнутых асимптотических линий σ , то могут существовать псевдоизгибания, порождаемые такими линиями. Примером служит двоякозамкнутый тор. Математическая жесткость тора доказана в [4], но на этой поверхности лежат две линии вида σ (кривые, разделяющие зоны положительной и отрицательной кривизны). Поэтому тор имеет виртуальные псевдоизгибания двух видов: псевдоизгибания λ_1 , описанные в п. 8 и связанные с наличием зоны отрицательной кривизны, а также псевдоизгибания λ_2 , связанные с наличием линий σ . Псевдоизгибание λ_1 порождает физическую нежесткость тора, рассмотренную в п. 8. Она редко проявляется в полной мере при практических интересных нагружениях.

Примеры псевдоизгибаний λ_2 описаны в [1, 5]. Физическая нежесткость, обусловленная псевдоизгибаниями λ_2 , является причиной хорошо известной повышенной деформативности торовых оболочек, проявляющаяся при обычных для практики нагружениях.

Физическая нежесткость оболочки, срединная поверхность которой обладает математической жесткостью, может быть связана и с гипертрофией некоторых геометрических свойств S .

Примерами являются: пологие, как угодно жестко закрепленные оболочки (они не могут быть физически жесткими, так как мало отличаются от плоскости, которая не обладает математической жесткостью ни при каком закреплении краев); оболочка весьма большой длины (этот случай рассмотрен в [1]); оболочки малой положительной кривизны.

10. Показано [1], что существование виртуальных псевдоизгибаний λ означает, что в спектре оболочки содержатся сверхнизкие частоты и им соответствуют колебания, форма которых мало отличается от λ . Обратимся к проблеме устойчивости (в линеаризованной постановке).

Пусть исследованию подлежит устойчивость напряженного состояния, тензор тангенциальных усилий которого обозначим через $T_{\alpha\beta}$. Принимается, что исходными могут служить уравнения п. 1, в которых надо

положить

$$X^\alpha = 0, \quad x = PT_0^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} \quad (10.1)$$

Здесь P — искомый постоянный параметр, а тензоры без дополнительных индексов определяют послекритическое напряженно-деформированное состояние.

Ограничимся случаем, когда докритическое напряженное состояние имеет эталонную асимптотику и малую изменчивость, т.е. примем, что тензоры с нуликами оцениваются соотношениями (2.1) (в них надо считать, что $X=1$; так как интенсивность докритического состояния учитывается множителем P). Для тензоров без нуляка оставим оценки (2.4), в которых γ и p имеют прежний смысл и подлежат определению, а смысл X несуществен.

Для поставленной таким образом задачи устойчивости оценки (2.3) величин I_α , I_μ сохраняются, а чтобы оценить I_q , напомним при помощи (2.4), (10.1)

$$I_q = \frac{P}{F} \iint w T_0^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} dF$$

Из (2.1), (2.4), положив $X=1$ в (2.1), получим

$$w = \theta^{-\gamma} \frac{R^2 X}{B} (w_1), \quad T_0^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} = \theta^{-\gamma-2p'} \frac{XR}{B} (T_0^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})_1$$

Здесь выражения, взятые в скобки с нижним индексом 1, являются функциями, наибольшие абсолютные значения которых соизмеримы единице. Под p' подразумевается число, совпадающее, вообще говоря, с p — общим показателем изменчивости. Однако возможны и случаи $p' < p$, когда закритическое напряженное состояние имеет квазистационарные направления l , а в левой части второго из обсуждаемых равенств сохраняются только те компоненты $\mu_{\alpha\beta}$, в которых в старшие производные от w входит по меньшей мере одно дифференцирование в направлении l (примеры приводятся ниже).

Таким образом,

$$I_q = \frac{PR^2 X}{B^2} \theta^{-2\gamma-2p'} A_q, \quad A_q = \frac{1}{F} \iint (w)_1 (T_0^{\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta})_1 dF \quad (10.2)$$

В этой формуле, опираясь на рассуждения п. 5, можно принять, что функционал A_q соизмерим единице, так как w и $\mu_{\alpha\beta}$ подобны по характеру изменчивости, а изменчивость $T_0^{\alpha\beta}$ по предположению мала.

Внося (2.3) и (10.2) в (4.1), (2.2) и в равенство, выражающее теорему Глайперона, вместо (3.1) и (3.2) получим

$$Q = \frac{FR^2 X^2}{B^2} \theta^{-2\gamma} \left(\theta^* A_\varepsilon + \frac{1}{3} \theta^{2-4p} A_\mu - 2\theta^{-2p'-\rho} P' A_q \right) \\ \theta^* A_\varepsilon^* + \frac{1}{3} \theta^{2-4p} A_\mu^* = \theta^{-2p'-\rho} P' A_q^*$$

Здесь ρ — показатель устойчивости, определяемый соотношениями

$$PR = \theta^{-\rho} P', \quad P' \sim \theta^\rho \quad (10.3)$$

Повторив рассуждения, описанные в п. 3, получим вместо (3.3) формулу

$$\rho = -\min(\kappa, 2-4p) - 2p' \quad (10.4)$$

Исследование асимптотики P_* (критического значения) теперь сводится к нахождению при помощи (10.4) минимальных значений ρ , так как

$$P_* R \sim \theta_{\min}^{-\rho} \quad (10.5)$$

Возможны следующие случаи.

1. Форма потери устойчивости не есть псевдоизгибание, и его показатель изменчивости p может иметь произвольное значение. Тогда, положив $\kappa=0$ в (10.4) и варьируя p , получим (здесь и ниже, если не оговорено противоположное, считается $p'=p$)

$$\rho_{\min} = \rho \Big|_{p=1/2} = -1 \quad (10.6)$$

2. Форма потери устойчивости есть псевдоизгибание с фиксированными $\kappa > 0$ и p . Тогда из (10.4) получим

$$\begin{aligned} \rho &= -\kappa - 2p' \quad \text{при } \kappa \leq 2 - 4p \\ \rho &= -2 + 2p \quad \text{при } \kappa \geq 2 - 4p \end{aligned} \quad (10.7)$$

3. Форма потери устойчивости совпадает с одним из псевдоизгибаний, собственных оболочкам неположительной кривизны (§ 8), т. е. имеющих показатель $\kappa=4p$ (при $K=0$) или $\kappa=2p$ (при $K<0$). Внося эти значения κ в (10.4), считая на этот раз, что $p'=mp$ ($m \leq 1$), и варьируя p , получим

$$\rho_{\min} = \rho \Big|_{p=1/4} = -1 - m/2 \quad (K=0) \quad (10.8)$$

$$\rho_{\min} = \rho \Big|_{p=1/4} = -2/3 - 2m/3 \quad (K=0)$$

Класс деформаций, не являющихся псевдоизгибаниями, весьма широк, и естественно считать, что для оболочки любого очертания их можно подчинить любым граничным условиям. Поэтому для всех рассматриваемых здесь задач соотношения (10.5), (10.6), соответствующие первому случаю, определяют оценку ($P_* \sim \theta$) одной из возможных критических нагрузок, не обязательно низшей. Это соотношение, очевидно, устанавливает верхнюю грань низшей P_* и представляет собой оценку низшей P_* тогда, когда отсутствуют виртуальные псевдоизгибания и возможны лишь деформации первого случая. В частности, низшая P_* соизмерима θ для достаточно жестко закрепленной оболочки положительной кривизны с негипертрофированным очертанием (§ 9).

Второй случай предусматривает, в частности, один из возможных видов потери устойчивости недостаточно жестко закрепленной оболочки положительной кривизны. Для такой оболочки наименьшая критическая нагрузка определится той из формул (10.6) или (10.7), которая соответствует меньшему значению ρ_{\min} . Если показатели рассматриваемого виртуального псевдоизгибания таковы, что $\kappa < 1 - 2p$, $p < 1/2$, то меньшее ρ_{\min} даст (10.6). Это значит, что такое виртуальное псевдоизгибание не окажет асимптотического влияния ни на низшее P_* , ни на формы потери устойчивости. Вместе с тем возможны и такие виртуальные псевдоизгибания, которые вызовут сильное асимптотическое понижение низшего P_* . Так, например, при $\kappa=2$, $p=0$ меньшее ρ_{\min} даст формула (10.7), которая приводит к оценке ($P_* \sim \theta^2$). Форма потери устойчивости при этом будет почти всюду близка к обсуждаемому виртуальному псевдоизгибанию.

Отметим, что сформулированный результат получен в предположении, что докритическое состояние $T_0^{\text{оп}}$ обладает эталонной асимптотикой, а это для оболочек, имеющих виртуальные псевдоизгибания λ , возможно лишь при условии, что внешняя нагрузка совершает достаточно малую работу на перемещениях λ . Следовательно, речь идет об устойчивости некоторого «оптимизированного» (наложением определенных условий на внешние силы) напряженного состояния.

Приведенный выше пример сверхнизкой критической нагрузки ($P_* \sim \theta^2$) осуществляется, в частности, для оболочки положительной кривизны со свободными краями. В ней безмоментное докритическое напряженное состояние возможно только тогда, когда поверхностная нагрузка удовлетворяет счетному множеству интегральных условий [4], выполнение которых приводит к снижению напряженности и особенно деформативности на несколько порядков. Оценка ($P_* \sim \theta^2$) свидетельствует о весьма низкой устойчивости, оптимизированного таким образом напряженного состояния. На это явление указывалось и в [2] (гл. 22, § 29).

Третий случай предусматривает возможные виды потери устойчивости оболочек неположительной кривизны.

Формулы (10.8), если в них положить $p' = p$, т. е. $m = 1$, дают для ρ_{\min} значения, меньшие чем (10.6)

$$\rho_{\min} = -^3/2 \quad (\text{при } K=0), \quad \rho_{\min} = -^4/3 \quad (\text{при } K=0) \quad (10.9)$$

Это свидетельствует о том, что, вообще говоря, безмоментное напряженное состояние в оболочках неположительной кривизны менее устойчиво, чем в оболочках положительной кривизны, а исключения могут иметь место только при $m > 1$.

Чтобы разъяснить значение последнего неравенства, рассмотрим некоторые задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки.

Если оболочка подвержена постоянному внешнему давлению P , то второе равенство (10.1) принимает вид

$$x = RP(\partial^2 w / \partial \alpha_2^2) \quad (10.10)$$

В нем w дважды дифференцируется в направлении наибольшей (с показателем p) изменчивости псевдоизгибаний, свойственных цилиндрическим поверхностям. Поэтому в соответствии с рассуждениями, предшествовавшими (10.2), следует в (10.8) положить $m = 1$. Если оболочка подвергается кручению или осевому сжатию, то вместо (10.10) следует взять соответственно

$$x = PR \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \quad \text{или} \quad x = PR \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}$$

Здесь w частично или целиком дифференцируется в квазистационарном направлении α_2 . Поэтому следует положить $m = 1/2$ или $m = 0$.

Таким образом, для кручения получаем

$$\rho_{\min} = -^5/4 \quad (K=0) \quad (10.11)$$

а для осевого сжатия

$$\rho_{\min} = -1 \quad (K=0) \quad (10.12)$$

Соотношения (10.9), (10.11), (10.12) другим методом были получены в [6].

Отметим, что формулы (10.12) и (10.6) отвечают критической нагрузке одинакового порядка, хотя они получены для качественно разных форм потери устойчивости. В первом случае $\kappa = 1$, $p = 1/4$, а во втором $\kappa = 0$, $p = p' = 1/2$.

Это находится в соответствии с известным фактом (см., например, [1]), что в линеаризованной задаче продольного сжатия круговой цилиндрической оболочки одна и та же критическая сила получается для бесчисленного множества форм потери устойчивости, среди которых находятся и указанные выше.

Замечание. Если оболочка неположительной кривизны закреплена недостаточно жестко и имеет виртуальные псевдоизгибания, то при выборе наименьшего ρ_{\min} надо учитывать кроме (10.6) и (10.8) также формулы (10.7).

Итак, в рассмотренных линеаризованных задачах устойчивости оболочек существование виртуальных изгибаний не всегда ведет к асимптотическому понижению критической нагрузки. Однако верно обратное утверждение. Асимптотически пониженная критическая нагрузка возможна лишь тогда, когда существуют виртуальные псевдоизгибания. В этом и только в этом случае будет а priori обеспечена близость формы потери устойчивости к одному из виртуальных изгибаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М., «Наука», 1979.
2. Михлин Г. С. Прямые методы в математической физике. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1950.
3. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., «Наука», 1976.
4. Веква И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
5. Бульгин А. В. Об одном классе оболочек знакопеременной гауссовой кривизны. Изв. АН СССР, МТТ, 1977, № 5.
6. Гольденвейзер А. Л. Асимптотические свойства собственных значений в задачах теории упругих тонких оболочек. ПММ, 1964, т. 25, вып. 4.
7. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.—Л., Гостехиздат, 1946.